5 Projektive Geometrie

5.1 Motivation

- Affine Geometrie: Punkte „im Unendlichen“, so dass sich zwei Geraden in einer Ebene *immer* in einem Punkt schneiden; es gibt keine Parallen
- „Gebrochen-lineare“ Transformationen können Geometrie vereinfachen, aber schieben „Hyperebenen nach Unendlich“
- Was passiert, wenn man bei Kegelschnitten die Ebene stetig verändert?
  Ellipse $\to$ Parabel $\to$ Hyperbel?
- Zentralprojektion: Streckenverhältnisse ändern sich, aber “Doppelverhältnisse” bleiben gleich.

Was haben wir davon? Geometrie mit

- perfekter Dualität zwischen Punkten und Hyperebenen
- vielen Transformationen, also vielen Möglichkeiten zur Vereinfachung
- einfacher Matrix-Beschreibung für Transformationen

5.2 Der n-dimensionale projektive Raum

5.2.1 Definition; mehrere Modelle

Definition 5.1 (Der n-dimensionale projektive Raum)**.** Der *n-dimensionale projektive Raum* $\mathbb{RP}^n$ ist die Menge

$$\mathbb{RP}^n \;:=\; \{L \subseteq \mathbb{R}^{n+1} : L \text{ ist ein 1-dimensionaler linearer Unterraum}\}.$$

aller 1-dimensionalen Unterräume im Vektorraum $\mathbb{R}^{n+1}$.
Für $-1 \leq k \leq n$ sind die *k-dimensionalen projektiven Unterräume* die Teilmengen

$$P(U) \;:=\; \{L \in \mathbb{RP}^n : L \subseteq U\} \qquad \text{für } (k+1)\text{-dimensionale Unterräume } U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

Achtung: die *projektive Dimension* von $P(U)$ ist also gegeben durch

$$\dim P(U) \;=\; \dim U - 1.$$

Bemerkung 5.2 (Mehrere Modelle). Den Projektiven Raum $\mathbb{RP}^n$ können wir äquivalent betrachten als

(1) Raum der eindimensionalen Unterräume im $\mathbb{R}^{n+1}$, wie hier definiert,
(2) die Menge der Vektoren in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, modulo Identifikation von Vielfachen,
(3) die Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ modulo Identifizierung gegenüberliegender Punkte, oder
(4) affiner Raum $\mathbb{R}^n$ plus “Punkte im Unendlichen”.

Wichtig sind die Übersetzungen zwischen diesen Modellen, wobei wir identifizieren:

(1) einen eindimensionalen Unterräume im $\mathbb{R}^{n+1}$ mit
(2) den nicht-verschwindenden Vektoren in den Unterraum, bzw.
(3) den (beiden) Vektoren der Länge 1 in dem Unterraum,
(4) dem Vektor in dem Unterraum mit x_0-Koordinate 1, bzw. sonst einer Richtung (d.h. einem Element von $\mathbb{RP}^{n-1}$).

Notation: Wir können x für einen Punkt im $\mathbb{R}^n$ schreiben, dann

$$v = \hat{x} := \binom{1}{x}$$

für den entsprechenden Punkt in $1 \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, und

$$p = [v] := \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{v\}$$

für den Punkt in $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, der durch ein beliebiges $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, $v \neq 0$, gegeben ist.

Lemma 5.3. *Zwei verschiedene Geraden $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ schneiden sich in genau einem Punkt.*

5.3 Projektive Transformationen

Definition 5.4 (Projektive Transformationen; Projektivitäten)**.** Eine Abbildung $f : \mathbb{R}\mathrm{P}^m \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ heißt *projektiv*, wenn sie durch eine lineare Abbildung $\hat{f} : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, $x \mapsto Mx$ induziert wird, für $M \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(m+1)}$.
(Insbesondere ist dann $x \mapsto Mx$ injektiv, A hat also vollen Rang m, insbesondere ist also $m \leq n$.)
Eine *projektive Transformation* (oder *Projektivität*) ist eine projektive Abbildung $f : \mathbb{R}\mathrm{P}^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$.
(Projektivitäten sind also die *bijektiven* projektiven Abbildungen.)

Lemma 5.5. *Die projektiven Transformationen $\mathbb{R}\mathrm{P}^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ eingeschränkt auf $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ sind genau die „gebrochen-linearen“ Transformationen $x \mapsto \frac{Ax+b}{c^tx+\delta}$ für nichtsinguläre Matrix $\begin{pmatrix}\delta & c^t\\ b & A\end{pmatrix}$.*

Beweis.

$$\begin{pmatrix}1\\ x\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}\delta & c^t\\ b & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c^tx+\delta\\ Ax+b\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1\\ \frac{Ax+b}{c^tx+\delta}\end{pmatrix}.$$

□

Beachte:

- Die gebrochen-lineare Abbildung $x \mapsto \frac{Ax+b}{c^tx+\delta}$ ist für $c \neq 0$ nur außerhalb der Hyperebene $H := \{x : c^t + \delta = 0\}$ definiert. Interpretation: diese bildet H „nach Unendlich“ ab.
- In einer projektiven Transformation kann $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ singulär sein, aber es gilt $\operatorname{rank} A \geq n-1$. Hier kann sogar $A = O$ sein, allerdings nur für $n \leq 1$.
- Vielfache der Matrix $\begin{pmatrix}\delta & c^t\\ b & A\end{pmatrix}$ erzeugen *dieselbe* projektive Transformation.

Definition 5.6. Eine *projektive Quadrik* ist eine Teilmenge $Q \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ der Form

$$Q = \{[v] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n : v^tMv = 0\}$$

für eine symmetrische Matrix $M \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$, $M \neq O$.

Aufgabe. (i) "Für jede projektive Quadrik $Q \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ ist $\bar{Q} := Q \cap \mathbb{R}^n$ eine affine Quadrik." Stimmt das?
(Antwort: $\bar{Q}$ könnte auch eine lineare Hyperebene oder leer sein.)

(ii) Welche Quadriken treten als $\bar{Q}$ auf? Das heißt, für welche affine Quadriken $\bar{Q}$ gibt es eine projektive Quadrik Q mit $Q \cap \mathbb{R}^n = \bar{Q}$?
Ist Q in diesem Fall eindeutig?

Proposition 5.7 (Invarianten)**.** *Projektive Transformationen*

(i) *bilden projektive Unterräume auf projektive Unterräume (derselben Dimension!) ab,*

(ii) *bilden projektive Quadriken auf projektive Quadriken ab.*

Definition 5.8 (Projektive Basis)**.** Eine *projektive Basis* des $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ besteht aus $n+2$ Punkten $p_0, p_1, \ldots, p_{n+1}$, von denen keine $n+1$ auf einer Hyperebene (also in einem Unterraum der Dimension $n-1$) liegen.

Affine Visualisierung: wann bilden/induzieren $n+2$ Punkte im $\mathbb{R}^n$ eine projektive Basis? Beispielsweise bilden die Ecken eines n-Simplex zusammen mit einem Punkt im Inneren des Simplex immer eine projektive Basis.

Lemma 5.9. *Sei $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ eine affine Basis des $\mathbb{R}^n$ und $p_{n+1} = \lambda_0 p_0 + \cdots + \lambda_n p_n$ mit $\lambda_0 + \cdots + \lambda_n = 1$, so ist $\{p_0, p_1, \ldots, p_n, p_{n+1}\}$ eine projektive Basis genau dann, wenn $\lambda_i \neq 0$ für alle i.*

Proposition 5.10 (Erster Hauptsatz der Projektiven Geometrie)**.** *Seien $(p_0, p_1, \ldots, p_{n+1})$ und $(p'_0,'_1, \ldots, p'_{n+1})$ zwei (geordnete) projektive Basen des $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, so gibt es genau eine projektive Abbildung $f : \mathbb{R}\mathrm{P}^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$, die p_i auf p'_i abbildet ($0 \leq i \leq n+1$).*

Beweis. Seien $\hat{p}_i$ bzw. $\hat{p}'_i$ entsprechende Vektoren im $\mathbb{R}^{n+1}$. Dann gibt es lineare Abhängigkeiten $\lambda_0 \hat{p}_0 + \cdots + \lambda_{n+1} \hat{p}_{n+1}$ und $\lambda'_0 \hat{p}'_0 + \cdots + \lambda'_{n+1} \hat{p}'_{n+1}$, die beide bis auf Vielfache eindeutig sind, und deren Koeffizienten nicht Null sind. Weiter sind $(\lambda_0 \hat{p}_0, \ldots, \lambda_n \hat{p}_n)$ und $(\lambda'_0 \hat{p}'_0, \ldots, \lambda'_n \hat{p}'_n)$ Basen des $\mathbb{R}^{n+1}$, so dass $\lambda_i \hat{p}_i \mapsto \lambda'_i \hat{p}'_i$ eine eindeutige lineare Abbildung definiert. Die linearen Abhängigkeiten garantieren dann, dass $\lambda_{n+1} \hat{p}_{n+1} \mapsto \lambda'_{n+1} \hat{p}'_{n+1}$. □

Aufgabe. Beschreiben Sie die gebrochen-linearen Abbildungen, die die folgenden geordneten Basen aufeinander abbilden:

(i) $(0,0),(1,0),(1,1),(0,1) \quad \to \quad (0,0),(1,0),(0,1),(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$,

(ii) $(0,0),(1,0),(1,1),(0,1) \quad \to \quad (0,0),(1,0),(0,1),(1,1)$.

Aufgabe. Beschreiben Sie die gebrochen-linearen Abbildungen, die die folgenden geordneten affinen Quadriken aufeinander abbilden:

◦ den Einheiskreis $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$,
◦ die Normalparabel $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y\}$ und
◦ die Hyperbel $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 = 1\}$.

Wie sehen die zugehörigen linearen Transformationen im $\mathbb{R}^3$ aus?

Geben Sie eine stetige Familie von projektiven Transformationen an (als gebrochen-lineare Abbildungen auf $\mathbb{R}^2$, bzw. als lineare Transformationen des $\mathbb{R}^3$, die die drei Quadriken verbindet).

Korollar 5.11. *Die projektiven Transformationen auf dem $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ bilden eine Gruppe. Diese ist gegeben durch lineare Transformationen auf dem $\mathbb{R}^{n+1}$ modulo Dilatationen, also*

$$\mathrm{PGL}(n, \mathbb{R}) \;=\; \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R})/\mathbb{R}^*$$

Die Dimension dieser Gruppe, also auch die Anzahl der Freiheitsgrade, die wir für eine projektive Transformation haben, ist $(n+1)^2 - 1 = (n+2)n$.

Beispiel 5.12. In der Ebene, kann man mit projektiven Transformationen jedes Dreieck auf jedes Dreieck abbilden, und jedes Viereck auf ein beliebiges Viereck (z.B. ein Einheitsquadrat), aber nicht jedes Fünfeck auf ein beliebiges (z.B. das regelmäßige) Fünfeck. – Letzteres kann man schon daran sehen, dass der Raum der Fünfecke Dimension 10 hat, die Gruppe $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{R})$ aber nur Dimension 8.

Korollar 5.13 (Projektive Koordinaten)**.** *Die Vektoren $e_0, e_1, \ldots, e_n, e_0 + \cdots + e_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ induzieren eine geordnete projektive Basis im $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$.*
Ist nun $(p_0, \ldots, p_{n+1})$ eine beliebige geordnete Basis des $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, so gibt es nach Hauptsatz 5.10 eine eindeutige Projektivität $f : \mathbb{R}\mathrm{P}^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ mit $[e_i] \mapsto p_i$ für $0 \le i \le n+1$. Diese induziert Koordinaten $(x_0 : x_1 : x_2 : \cdots : x_n)$ für $f([x_0 e_0 + \cdots + x_{n+1} e_{n+1}])$, also

$(1 : 0 : 0 : \cdots : 0)$ *für* p_0,
$(0 : 1 : 0 : \cdots : 0)$ *für* p_1,
$\ddots$
$(0 : 0 : 0 : \cdots : 1)$ *für* p_n,
$(1 : 1 : 1 : \cdots : 1)$ *für* p_{n+1}.

Die Notation $(x_0 : x_1 : x_2 : \cdots : x_n)$ signalisiert hier, dass diese Vektoren von “Koordinaten” nur bis auf Vielfache definiert sind.

Mit diesen projektiven Koordinaten kann man rechnen. So entsprechen die Koordinatenvektoren mit $x_0 \neq 0$ (ohne Einschränkung der Allgemeinheit: $x_0 = 1$) genau den Punkten im affinen Raum $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}\mathrm{P}^n$, während die Koordinatenvektoren mit $x_0 = 0$ genau den Punkten “im Unendlichen” entsprechen. Punkte, die auf einer Hyperebene liegen, erfüllen eine homogene lineare Gleichung, usw.

5.4 Das Doppelverhältnis

Definition 5.14 (Doppelverhältnis)**.** Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ vier Punkte im $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, die auf einer Geraden liegen, mit $a \neq b$, $c \neq d$. Seien $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$ entsprechende Vektoren in $\in \mathbb{R}^{n+1}$. In Bezug auf diese Vektoren sei $\hat{c} = \alpha\hat{a} + \beta\hat{b}$, $\hat{d} = \gamma\hat{a} + \delta\hat{b}$.
Das *Doppelverhältnis* ist dann

$$[a, b; c, d] \;:=\; \frac{\beta/\alpha}{\delta/\gamma} \;=\; \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta} \;\in\; \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Lemma 5.15. *Das Doppelverhältnis ist wohl-definiert.*

Beweis. Für den Beweis wählen wir $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, und beobachten, dass sich das Doppelverhältnis nicht verändert, wenn wir die Vektoren $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$ durch Vielfache ersetzen.
Weiter überprüfen wir, dass unter der Annahme $a \neq b$, $c \neq d$ kein Ergebnis der Form $\frac{0}{0}$ auftreten kann, so dass wir eindeutige Werte in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ erhalten. $\square$

Lemma 5.16. *Wir identifizieren $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.*
Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ vier Punkte auf einer Geraden, wobei a, b, c paarweise verschieden sein sollen. Dann gibt es genau eine projektive Abbildung $f : \mathbb{R}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ (die also den Punkten auf der Gerade eine "projektive Koordinate" zuordnet) mit $f(\infty) = a$, $f(0) = b$ und $f(1) = c$. Unter dieser Abbildung ist dann $f([a, b; c, d]) = d$, die durch a, b, c festgelegte "projektive Koordinate" auf der Geraden ist also für d durch das Doppelverhältnis gegeben.
Kurz also: $[\infty, 0; 1, \delta] = \delta$.

Lemma 5.17. *Affine Teilungsverhältnisse sind Doppelverhältnisse: Liegen b, c, d auf einer affinen Geraden, a "im Unendlichen" auf der Geraden, mit $\hat{d} = (1-\lambda)\hat{b} + \lambda\hat{c}$, $\hat{b} \neq \hat{c}$, so können wir $\hat{a} = \hat{c} - \hat{b}$ setzen, also $\hat{c} = \hat{a} + \hat{b}$ und $\hat{d} = \lambda\hat{a} + \hat{b}$, und das ergibt $[a, b; c, d] = \lambda$.*
Kurz also: $[\infty, b; c, (1-\lambda)b + \lambda c] = \lambda$.

Aufgabe. Wie müssen vier verschiedene Punkte a, b, c, d auf einer (projektiven) Geraden liegen, damit das Doppelverhältnis $[a, b; c, d]$ positiv ist? Und wann gilt $[a, b; c, d] < 0$.

Theorem 5.18 (Invarianten)**.** *Projektive Transformationen erhalten Doppelverhältnisse. Ist also $a \neq b$ und $c \neq d$ und ist $f : \mathbb{R}\mathrm{P}^m \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$, so gilt*

$$[a, b; c, d] \;=\; [f(a), f(b); f(c), f(d)].$$

Beweis. Wir stellen a, b, c, d dar durch $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d} \in \mathbb{R}^{m+1}$, und f durch $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(m+1)}$. Gilt $\hat{c} = \alpha\hat{a} + \beta\hat{b}$, $\hat{d} = \gamma\hat{a} + \delta\hat{b}$, so folgt $A\hat{c} = \alpha A\hat{a} + \beta A\hat{b}$, $A\hat{d} = \gamma A\hat{a} + \delta A\hat{b}$, und damit ergeben $f(a), f(b), f(c), f(d)$ *dieselben* Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und damit auch dasselbe Doppelverhältnis. □

31. Mai 2013

Proposition 5.19. *Seien a, b, c, d vier verschiedene Punkte auf einer Geraden im $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, mit $[a, b; c, d] = \lambda$. Dann gilt*
(1) $[a, b; c, d] = [b, a; d, c] = [c, d; a, b] = [d, c; b, a] = \lambda$,
(2) $[a, b; d, c] = [b, a; c, d] = \frac{1}{\lambda}$,
(3) $[a, c; b, d] = 1 - \lambda$
(4) *und damit sind alle anderen Werte des Doppelverhältnisses einer Permutation der vier Punkte festgelegt; dabei können nur 6 verschiedene Werte auftreten, nämlich λ, $\frac{1}{\lambda}$, $1-\lambda$, $1-\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{1-\lambda}$ und $\frac{\lambda}{\lambda-1}$.*

Beweis. Wegen Theorem 5.18 genügt es, dies für $n = 1$ zu beweisen.
(1) und (4) folgen aus (2) und (3).
Dabei ist (2) ziemlich offensichtlich, während (3) auf eine polynomiale Identität zwischen Determinanten hinausläuft, eine "3-Term Grassmann-Plücker-Identität". □

Aufgabe. Unter Verwendung von Proposition 5.19 können wir das Doppelverhältnis immer dann definieren, wenn die vier Punkte a, b, c, d kollinear sind, und *nicht drei von Ihnen gleich*.

Proposition 5.20 (Zentralprojektion)**.** *Sind a, b, c, d und A, B, C, D jeweils kollineare Punkte im $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, so dass sich die Geraden aA, bB, cC, dD schneiden (bzw. so dass es einen Punkt o gibt, der nicht auf einer der beiden Geraden $abcd$ und $ABCD$ liegt und so dass oaA, obB, ocC, odD kollinear sind), dann gilt $[a, b, c, d] = [A, B, C, D]$.*

Beweis. Wegen Theorem 5.18 genügt es, dies für $n = 2$ zu beweisen.
Man konstruiert nun eine projektive Transformation ("Zentralprojektion"), die o festhält und a auf A und b auf B abbildet, und so weiter: Dafür arbeiten wir im $\mathbb{R}^3$, wobei $[\hat{o}]$ eine Gerade (1-dimensionaler Unterraum) ist, und Ebenen (2-dimensionale Unterräume) $e = \text{span}\{\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}\}$ und $E = \text{span}\{\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}\}$ beide $[\hat{o}]$ nicht enthalten. Hier brauchen wir jetzt eine lineare Abbildung, die $\hat{o}$ fest lässt und e auf E abbildet. Dafür kann man zum Beispiel die Summe der Projektion auf $[\hat{o}]$ mit Kern e und die Projektion auf E mit Kern $[\hat{o}]$ nehmen. Diese Summe bildet nämlich offenbar $[\hat{o}]$ auf $[\hat{o}]$ ab, während das Bild von $\hat{a}$ in $\text{span}\{\hat{o}, \hat{a}\}$ liegt, gleichzeitig aber auf E liegt, also insgesamt im Schnitt dieser beiden Ebenen, der aber $[\hat{A}]$ ist, etc.
Und dann können wir Theorem 5.18 anwenden. □

Projektive Abbildungen erhalten Doppelverhältnisse. Es gilt aber auch eine Umkehrung:

Theorem 5.21 (Zweiter Hauptsatz der Projektiven Geometrie)**.** *Jede bijektive Abbildung $f : \mathbb{R}\mathrm{P}^m \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$, die kollineare Punkte auf kollineare Punkte (also Geraden auf Geraden) abbildet und Doppelverhältnisse erhält, ist eine projektive Abbildung.*

Bemerkung: für $n \geq 2$ braucht man die Bedingung über Doppelverhältnisse nicht, dann muss man für den Beweis aber signifikant härter arbeiten; siehe Fischer [2, Abschnitt 3.3]. Es sind die bijektiven Abbildungen, die Kollinearitäten erhalten ("Kollineationen") also genau die, die durch lineare Abbildungen induziert sind ("Projektivitäten"). Im Fall, dass man Geometrie über einem allgemeinen Körper K arbeitet, muss man weiterhin Körperautomorphismen berücksichtigen, die ebenfalls Kollinearitäten induzieren.

Aufgabe. Definieren Sie die projektive Geometrie $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ und ihre Geraden. Zeigen Sie, dass sich zwei verschiedene Geraden immer in genau einem Punkt schneiden.
Definieren Sie Kollinearitäten sowie projektive Abbildungen. Zeigen Sie, dass die Konjugation $z \mapsto \bar{z}$ eine Kollinearität $\mathbb{C}\mathrm{P}^2 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ induziert, die aber keine Projektivität ist.

5.5 Projektive Inzidenzgeometrie

5.5.1 Schnitt und Verbindung

Seien $U, V \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ projektive Unterräume, dann ist der *Schnitt* $U \wedge V := U \cap V$ wieder projektiver Unterraum. Dieser ist auch der größte Unterraum, der sowohl in U als auch in V enthalten ist. In dieser Charakterisierung wird er auch als *Meet* von U und V bezeichnet und als $U \wedge V$ notiert.
Aber $U \cup V$ ist üblicherweise kein projektiver Unterraum.

Definition 5.22 (Verbindung)**.** Die *Verbindung* (oder auch der *Join*) $U \vee V$ von zwei projektiven Unterräumen $U, V \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ ist der Schnitt aller projektiven Unterräume, die $U \cup V$ enthalten.

Proposition 5.23 (Dimensionsformel: Modulare Gleichung)**.** *Für beliebige projektive Unterräume $U, V \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ gilt*

$$\dim U + \dim V \;=\; \dim(U \wedge V) + \dim(U \vee V).$$

Beweis. Dies folgt sofort aus der Dimensionsformel für lineare Unterräume $\hat{U}, \hat{V} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ für *lineare* Unterräume, mit $\dim P(\hat{U}) = \dim U - 1$ für $P(\hat{U}) = U$ usw. $\square$

Korollar 5.24. *Gilt* $\dim U + \dim V \geq n$ *für* $U, V \subseteq \mathbb{R}\mathrm{P}^n$*, so folgt* $U \cap V \neq \emptyset$*.*

Korollar 5.25. *Sei* $H \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ *eine Hyperebene und* $p \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n \setminus H$*. Dann schneidet jede Gerade durch* p *die Hyperebene* H *in einem einzigen Punkt.*

5.5.2 Dualität

Theorem 5.26. *Für jedes* $n \geq 0$ *gibt es eine Abbildung, die jedem projektiven Unterraum von* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *einen projektiven Unterraum* $U^* \subseteq \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ *zuordnet mit*

- $\dim U^* = n - 1 - \dim U$,
- $(U^*)^*$,
- $U \subseteq V \;\Leftrightarrow\; V^* \subseteq U^*$,
- $U \wedge U^* = \emptyset$, $U \vee U^* = \mathbb{R}\mathrm{P}^n$.

Die Abbildung $U \mapsto U^*$ *heißt auch* Dualitätsabbildung. *Sie bildet insbesondere Punkte auf Hyperebenen ab, und umgekehrt.*

Beweis. Für $U = P(\hat{U})$ setze $U^* := P(\hat{U}^{\perp})$. $\square$

Damit übersetzt sich jedes Inzidenztheorem in ein duales Inzidenztheorem. Beispiele:

(i) Zwei verschiedene Geraden im $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ schneiden sich in genau einem Punkt $\longleftrightarrow$
Zwei verschiedene Punkte im $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ liegen auf genau einer Gerade

(ii) n Geraden in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ bestimmen $\binom{n}{2}$ Schnittpunkte $\longleftrightarrow$
n Punkte in allgemeiner Lage im $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ liegen auf $\binom{n}{2}$ Verbindungsgeraden

(iii) n Punkte in der projektiven Ebene, nicht alle auf einer Geraden, bestimmen immer eine Verbindungsgerade, die genau zwei der Punkte enthält $\longleftrightarrow$
n Geraden in der projektiven Ebene, nicht alle durch einen Punkt, bestimmen immer einen Schnittpunkt, der auf genau zwei Geraden liegt
(das ist der Satz von Sylvester–Gallai, siehe [1, Kap. 10])

(iv) Drei Ebenen im $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$ haben immer einen gemeinsamen Punkt $\longleftrightarrow$
Drei Punkte im $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$ liegen immer auf einer Ebene.

(v) *etc.*

Aufgabe. Welche mögliche Konfigurationen gibt es für drei Geraden im $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$?
Und für drei 2-dimensionale Unterräume im $\mathbb{R}\mathrm{P}^5$?

3. Juni 2013

5.5.3 Pappus und Desargues

Theorem 5.27 (Satz von Pappus)**.** *Sind* A, B, C *Punkte auf einer Geraden* G *und* A', B', C' *Punkte auf einer Geraden* G'*, und ist* γ *der Schnittpunkt von* AB' *mit* $A'B$*,* β *der Schnittpunkt von* AC' *mit* $A'C$*,* α *der Schnittpunkt von* BC' *mit* $B'C$*, so sind* α, β, γ *kollinear.*

Beweis. Nach projektiver Transformation (!) dürfen wir annehmen, dass $\alpha\gamma$ die Gerade im Unendlichen ist.

Schneiden sich G und G' in der affinen Ebene, so betrachtet man die affinen Streckungen $\varphi : A \mapsto B$ und $\psi : B \mapsto C$ mit Zentrum $G \cap G'$. Affine Streckungen erhalten Parallelität, also gilt $\varphi : B' \mapsto A'$ und $\psi : C' \mapsto B$. Also $\psi \circ \varphi : A \mapsto C$, $\varphi \circ \psi : C' \mapsto A'$. Es gilt aber $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi$. Sind G und G' parallel, so argumentiert man separat. $\square$

Beobachtung: Kommutativität spielt eine entscheidende Rolle im Beweis. (In der Tat ist der Satz von Pappus für projektive Geometrie über einem Schiefkörper nicht richtig.)

Theorem 5.28 (Satz von Desargues)**.** *Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind perspektivisch (also die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken AA', BB', CC' konkurrent) dann und nur dann wenn die Schnittpunkte $\alpha = BC \cap B'C'$ $\beta = AC \cap A'C'$ $\gamma = AB \cap A'B'$ der entsprechenden Seiten kollinear sind.*

Beweis. Für "$\Longleftarrow$": Nach projektiver Transformation liegen α, β, γ auf der Geraden im Unendlichen. Also ist $AB \| A'B'$, $AC \| A'C'$ und $BC \| B'C'$. Damit sind die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ ähnlich, ihr Zentrum kann durch Schnitt von Geraden ausgerechnet werden.

Dabei verwendet man das "Lemma von Thales", wonach parallele Geraden auf unterschiedlichen Geraden dieselben Teilungsverhältnisse induzieren — was man nachrechnen kann.

Für "$\Longrightarrow$": Dualität! $\square$

Beobachtung: Arithmetik spielt eine entscheidende Rolle im Beweis. (In der Tat ist der Satz von Desargues für "synthetische" projektive Ebenen nicht richtig.) Es gibt einen 3D-Beweis für den Satz von Desargues – aber in der Tat lässt sich jede "synthetische" projektive Raum der Dimension $n \geq 3$ über einem Schiefkörper koordinatisieren.

Bemerkung 5.29. Vorsicht bei der Formulierung mit degenerierten Versionen!
Vergleiche Richter-Gebert [4, Example 1.1]:

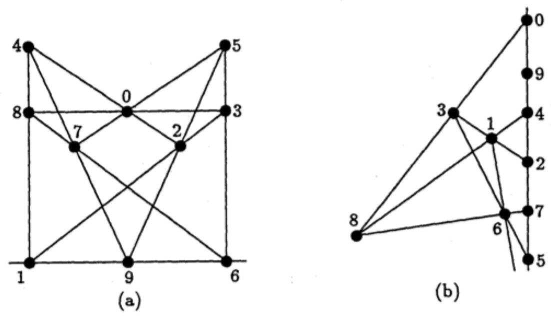

Figure 1.1 Desargues' Theorem.

Die Übersetzung zu unseren üblichen Notation: Hier sind in beiden Abbildungen die Dreiecke $2 = A$, $3 = B$, $5 = C$ und $4 = A'$, $8 = B'$ und $7 = C'$ vom Punkt 0 aus perspektivisch, aber nur in der linken Zeichnung stimmt, dass die Schnittpunkte der entsprechenden Seiten, $\alpha = BC \cap B'C' = 6$ $\beta = AC \cap A'C' = 9$ und $\gamma = AB \cap A'B' = 1$ auf einer Geraden liegen ...

Bemerkung 5.30. Es gibt vielfältige Verallgemeinerungen: So kann man im Satz von Pappus die Vereinigung der beiden Geraden $G \cup G'$ durch einen beliebigen Kegelschnitt ersetzen ("Satz von Pascal" http://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Pascal)!

5.6 Quadriken

Theorem 5.31 (Projektive Hauptachsentransformation)**.** *Jede Quadrik im $\mathbb{R}^n$ lässt sich durch eine gebrochen-lineare Transformation auf eine Normalform der Form*

$$1 + x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+\ell}^2 \; = \; 0,$$

mit $k, \ell \geq 0$, $k+1 \geq \ell \geq 0$, $k + \ell \leq n$ bringen.
In projektiven Koordinaten: Jede Quadrik im $\mathbb{RP}^n$ lässt sich durch eine projektive Transformation auf eine Normalform der Form

$$Q = \{(x_0 : x_1 : \cdots : x_n) \in \mathbb{RP}^n : x_0^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+\ell}^2 = 0\}$$

mit $k, \ell \geq 0$, $k+1 \geq \ell \geq 0$, $k + \ell \leq n$ bringen.

Beweis. Wir schreiben Q als

$$\begin{aligned} Q \; &= \; \{x \in \mathbb{R}^n : (1, x^t) \begin{pmatrix} c & b^t \\ b & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = 0\} \\ &= \; \{x \in \mathbb{R}^n : (1, x^t) \widehat{A} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = 0\} \end{aligned}$$

für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$, bzw. $\widehat{A} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ symmetrisch.
Weil $\widehat{A}$ symmetrisch ist, gibt es eine orthogonale Matrix $\widehat{S} \in \mathrm{O}(n+1)$ so dass $\widehat{S}^t \widehat{A} \widehat{S}$ diagonal ist, also gleich $\mathrm{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k, -\lambda_{k+1}, \ldots, -\lambda_{k+\ell}, 0, \ldots, 0)$ mit $\lambda_i > 0$, wobei $k \geq -1$ und $\ell \geq 0$ gilt. Mit Hilfe der invertierbaren Diagonalmatrix $\widehat{D} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ mit Diagonaleinträgen $1/\sqrt{\lambda_i}$ für $0 \leq i \leq k + \ell$ und 1 für $i > k + \ell$ erreichen wir, dass

$$\widehat{D}\widehat{S}^t \widehat{A} \widehat{S} \widehat{D} \; = \; \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, 0, \ldots, 0).$$

Die Tatsache, dass bei dieser Koordinatentransformation $k+1$ und ℓ eindeutig bestimmt sind, folgert man aus Sylvester'scher Trägheitssatz [2, S. 186] [3, S. 362]: $k+1$ ist nämlich die Dimension des größten Unterraums von $\mathbb{R}^{n+1}$, auf dem die quadratische Form $\widehat{x}^t \widehat{A} \widehat{x}$ positiv definit ist, und genauso für ℓ und negativ definit.
Wegen $\widehat{A} \neq O$ ist dabei $(k+1) + \ell > 0$. Die Bedingung $k + 1 \geq \ell$ stellt man her, indem man ggf. $\widehat{A}$ durch $-\widehat{A}$ ersetzt. Insbesondere ist damit auch $k \geq 0$. $\square$

Aufgabe. Unter welchen Bedingungen sind die durch die Normalform oben beschriebenen Quadriken nicht leer? Wann sind sie linear? (Achtung: die Antwort muss für den affinen und den projektiven Fall unterschiedlich ausfallen!)

Aufgabe. Welche Quadrik wird durch $x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_0 = 0$ im $\mathbb{RP}^2$ bzw. im $\mathbb{R}^2$ definiert? Welche Quadrik wird durch $x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_0 = 0$ im $\mathbb{RP}^3$ definiert?

5.7 Komplexe Perspektive

Die Bedingung, dass sich sechs Punkte im $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ auf einer Quadrik befinden, kann man durch die Bedingung

$$[ABC][AYZ][XBZ][XYC] - [ABZ][AYC][XBC][XYZ] = 0$$

beschreiben: Wenn fünf der Punkte gegeben sind, und diese generisch liegen, dann beschreibt das eine Quadrik, auf der die fünf Punkte liegen. Dabei stehen die Ausdrücke der Form $[ABC]$ für Determinanten der Form $\det(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c})$.

Genauso kann man die Bedingung für vier Punkte im $\mathbb{R}^2$, auf einem Kreis zu liegen, durch eine Gleichung schreiben – und es stellt sich heraus, dass sie auf einem Kreis genau dann liegen, wenn sie mit den beiden "komplexen" Punkten $I = (0, i, 1)^t$ und $J = (0, -i, 1)^t \in \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ auf einer Quadrik liegen. Im Sinne der Cayley-Klein-Geometrien sind dabei I und J die Tangentialpunkte der Quadrik im Unendlichen. Dabei verwenden wir die Inklusionen

$$\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^2.$$

Das alles wird hier aber nicht weiter ausgeführt – siehe Richter-Gebert [5, Sect. 10.2].

[1] Martin Aigner and Günter M. Ziegler. *Das BUCH der Beweise*. Springer-Verlag, Heidelberg Berlin, third edition, 2009.

[2] Gerd Fischer. *Analytische Geometrie*. Vieweg, Wiesbaden, 2001. 7. Auflage.

[3] Gerd Fischer. *Lernbuch Lineare Algebra und Analytische Geometrie*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2011.

[4] Jürgen Richter-Gebert. Mechanical theorem proving in projective geometry. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 13:139–172, 1995. vs24.kobv.de/opus4-zib/files/101/SC-93-05.pdf.

[5] Jürgen Richter-Gebert. *Projectives on Projective Geometry*. Springer, Heidelberg, 2011.

6 Was ist (eine) Geometrie?

7. Juni 2013

6.1 Axiomatische Beschreibungen von Geometrie

Nach Euklid ca. 300 vor Christus [2, 3] und Hilbert 1899 [5]; siehe auch Artmann [1], Hartshorne [4]).

So beschreibt Hilbert in den “Grundlagen der Geometrie” ein System von Axiomen für eine Menge von Elementen, die “Punkte” heißen, mit Teilmengen, die “Geraden” heißen, so dass ein Satz von Axiomen erfüllt ist:

- 8 Axiome der Verknüpfung (Inzidenz)
- 4 Axiome der Anordnung
- 5 Axiome der Kongruenz
- ein Parallelenaxiom
- 2 Axiome der Stetigkeit.

Das Hilbert’sche Axiomensystem findet man beispielsweise zusammengefasst unter
de.wikipedia.org/wiki/Hilberts_Axiomensystem_der_euklidischen_Geometrie.

Mühsame Arbeit ergibt dann, dass die Axiome unabhängig voneinander sind, widerspruchsfrei sind (unter der Annahme, dass die elementare Arithmetik widerspruchsfrei ist), und vollständig: dass damit die Geometrie in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ eindeutig beschrieben ist.

Problem: es gibt auch viele sehr unsymmetrische, unnatürliche etc. Systeme, die sinnvolle Axiomensysteme für Geometrie erfüllen können. Die Axiome sehen teilweise sehr willkürlich aus.

Es stellt sich heraus, dass *projektive* Geometrie einfacher und konziser beschrieben werden kann (nach Veblen & Young 1905).

Definition 6.1. Eine *projektive Geometrie* ist ein Paar $P = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$, wobei die Elemente von $\mathcal{P}$ *Punkte* und die Elemente von $\mathcal{L}$ *Geraden* heißen, mit $\mathcal{L} \subseteq 2^{\mathcal{P}}$ (die Geraden sind Mengen von Punkten), mit

Axiom 1 Durch zwei verschiedene Punkte gibt es genau eine Gerade.

Axiom 2 Sind $A, B, C \in \mathcal{P}$ verschiedene Punkte und schneidet $\ell \in \mathcal{L}$ die Geraden AB und BC in unterschiedlichen Punkten, dann schneidet sie auch AC. (“Axiom von Pasch”)

Axiom 3 Jede Gerade enthält mindestens 3 Punkte; es gibt mindestens zwei verschiedene Geraden.

Theorem 6.2 (Veblen & Young). *Gilt in einer projektiven Geometrie der Satz von Desargues, so ist sie als projektiver Raum über einem Schiefkörper darstellbar.*

Gilt in einer projektiven Geometrie der Satz von Pappus, so ist sie sogar als projektiver Raum über einem Körper darstellbar.

(Nach Hessenberg 1905 impliziert der Satz von Pappus den Satz von Desargues.)

Fügt man Axiome der Ordnung und Stetigkeit hinzu, dann kann man weiter auch den $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ charakterisieren.

6.2 Kleins Erlanger Programm

In seiner Antrittsvorlesung in Erlangen (1872) hat Felix Klein eine andere Sichtweise auf Geometrie propagiert: als eine Menge von Elementen, die "Punkte" heißen, mit einer transitiven Gruppenaktion, die zeigt, wie der Raum von jedem Punkt aus gleich aussieht. Eigenschaften der Geometrie sind dann Invarianten der Gruppenaktion, wie z.B. Geraden, Unterräume, etc.

Wir versuchen die Idee von Klein formal zu fassen.

Definition 6.3. Eine *Geometrie* ist eine Menge X von Elementen, die *Punkte* heißen, mit Wirkung einer Gruppe G, die *transitiv* und *treu* auf X wirkt.

(Transformationsgruppe: jedem Element $g \in G$ entspricht eine Bijektion $\varphi_g : X \to X$, so dass φ_e die Identität ist, und $\varphi_g \circ \varphi_h(x) = \varphi_g(\varphi_h(x))$ gilt: Die Wirkung ist *transitiv*, wenn es für beliebige $x, y \in X$ ein $g \in G$ gibt mit $\varphi(x) = y$. Die Wirkung ist *treu*, wenn nur das neutrale Element $e \in G$ als Identität wirkt.)

Aufgabe der Geometrie (als Wissenschaft) ist dann das Studium der Eigenschaften/Strukturen, die unter der Transformationsgruppe invariant sind (also erhalten bleiben).

Beispiele n-dimensionaler Geometrien (Tabelle im Folgenden noch zu vervollständigen):

Geometrie	X	Gruppe G	$\dim G$	Invarianten
euklidisch	$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O}(n)$	$\binom{n+1}{2}$	Kollinearität ($\Rightarrow$ Unterräume); Abstände ($\Rightarrow$ Winkel, Volumina)
Ähnlichkeit	$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}^n \rtimes (\mathrm{O}(n) \times \mathbb{R}_{>0})$	$\binom{n+1}{2} + 1$	Kollinearität; Abstandsverhältnisse ($\Rightarrow$ Winkel, Volumenverhältnisse)
affin	$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$	$n(n+1)$	Kollinearität; Abstands-/ Teilungsverhältnisse auf Geraden
projektiv	$\mathbb{RP}^n$	$\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R})/\mathbb{R}^*$	$n(n+2)$	Kollinearität; Doppelverhältnisse; Quadriken
sphärisch	S^n			
elliptisch				
hyperbolisch				
Möbius				

10. Juni 2013

Hier ist mit $\mathbb{R}^*$ die multiplikative Gruppe $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ gemeint. Üblich sind die Bezeichnungen $\mathrm{PO}(n+1) = \mathrm{O}(n+1)/(\pm I)$ und $\mathrm{PGL}(n+1, \mathbb{R}) = \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R})/\mathbb{R}^*$ für die Transformationsgruppen von elliptischer bzw. projektiver Geometrie.

Viele dieser Geometrien sind Teilgeometrien/Erweiterungen von anderen – wobei wir einige erst noch kennenlernen werden:

Definition 6.4. Eine *Teilgeometrie* einer Geometrie (X, G) ist gegeben durch eine Teilmenge $X' \subseteq X$ und eine Untergruppe $G' \subseteq G$, die X' erhält (also $\varphi_{g'}(x') \in X'$ für $x' \in X'$ und $g' \in G'$), so dass sich jede Transformation $g' \in G'$ eindeutig auf X fortsetzt, es also keine unterschiedlichen Gruppenelemente in G gibt, die auf X' dieselbe Wirkung zeigen.

In diesem Fall heißt (X, G) auch eine *Erweiterung* der Geometrie (X', G')

$$
\begin{tikzcd}
& \text{projektiv} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\text{elliptisch} & \text{affin} \arrow[d] & \text{hyperbolisch} \\
& \text{Ähnlichkeit} \arrow[d] & \\
& \text{euklidisch} &
\end{tikzcd}
$$

[1] Benno Artmann. *Euclid — The Creation of Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1999.

[2] Oliver Byrne. *The First Six Books of the Elements of Euclides*. Web presentation by Bill Casselman; http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/byrne.html.

[3] Euclid. *The Elements*. Web presentation by David E. Joyce; http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html.

[4] Robin Hartshorne. *Geometry: Euclid and Beyond*. Undergraduate Texts in Math. Springer-Verlag, New York, 2000.

[5] David Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*. Chelsea Publishing Company, Leipzig, 1899. mit zahlreichen Neuauflagen, zuletzt bei Teubner, Stuttgart 1999.