Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Günter M. Ziegler
Albert Haase

Geometrie
SoSe 2013

1. Übungsblatt Geometrie

Abgabe bis spätestens ***Freitag, den 19.4.2013,*** *vor der Vorlesung.*
Vergesst nicht, euren Namen, eure Matrikel– und die Blattnummer sowie den Namen eures Tutors auf der ersten Seite zu vermerken. Bitte die Lösungen *tackern* ! Die Korrektur erhaltet ihr im Tutorium.

Aufgabe 1: *Skalarprodukt und Winkel* (3 + 4 + 1 (+2) Punkte)

a) Gegeben seien Vektoren $v := \begin{pmatrix}3 & -1 & 2\end{pmatrix}^t$ und $w := \begin{pmatrix}0 & 4 & -5\end{pmatrix}^t$ im $\mathbb{R}^3$. Stehen v und w senkrecht aufeinander? Berechne die Projektion von v auf w und umgekehrt (Ergebnis ist jeweils ein Vektor).

b) Gegeben seien alle Vektoren des $\mathbb{R}^4$, die jeweils 2 Nullen und 2 Einträge der Form ± 1 enthalten; zum Beispiel $(0, 1, -1, 0)$. Wie viele sind es insgesamt? Die konvexe Hülle dieser Vektoren wird als *24-Zell* bezeichnet. Berechne die Längen der Vektoren. Wie lautet der minimale Winkel zweier solcher Vektoren?

c) Was kann unter Verwendung von b) über die Kusszahl[1] $K(4)$ ausgesagt werden? *Zusatzaufgabe:* Küssen manche Sphären nicht nur eine?

Aufgabe 2: *Transformationen* (2 + 2 + 2 Punkte)

a) Gegeben sei eine euklidische Bewegung (Isometrie) im $\mathbb{R}^n$ der Form $Ax+b$. Berechne ihre Inverse.

b) Betrachten wir den n–dimensionalen Würfel $[0,1]^n$. Gib zunächst für $n = 2$ und $n = 3$ eine orthogonale Abbildung (als Matrix) an, die die Ecke $(1, \dots, 1)$ auf $(0, \sqrt{2})$ bzw. $(0, 0, \sqrt{3})$ abbildet.

c) Verallgemeinere b) auf den Fall $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

Aufgabe 3: *Unterräume, kürzester Abstand* (2 + 2 + 2 Punkte)

a) Gesucht sind zwei zweidimensionale Ebenen im $\mathbb{R}^4$, die sich in genau einem Punkt schneiden. Gib jeweils eine äußere und innere Beschreibung an und beweise die Aussage.

b) Angenommen $H = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, a \rangle = \alpha \,\}$ ist eine äußere Beschreibung einer Hyperebene. Was ist der Abstand von H zum Ursprung? Liegt a in H?

c) Seien $p \in \mathbb{R}^n$ und U ein affiner Unterraum des $\mathbb{R}^n$ der Dimension k für $0 < k < n$. Zeige, dass die Orthogonalprojektion von p auf U der einzige Punkt ist, der unter allen Punkten aus U minimalen Abstand zu p hat.

[1] Zur Definition der Kusszahl siehe Wikipedia. Der Radius der Sphären darf beliebig (aber für alle gleich und > 0) gewählt werden. Warum?