Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Günter M. Ziegler
Albert Haase

Geometrie
SoSe 2013

2. Übungsblatt Geometrie

*Abgabe bis spätestens **Freitag, den 26.4.2013,** vor der Vorlesung.*
Vergesst nicht, euren Namen, eure Matrikel– und die Blattnummer sowie den Namen eures Tutors auf der ersten Seite zu vermerken. Bitte die Lösungen *tackern* !

Aufgabe 1: *Spiegelungen, Orthogonale Abbildungen* (4 + 4 Punkte)

a) Gegeben sei ein Vektor $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Gesucht ist die Spiegelungsabbildung S, die $\mathbb{R}^3$ an der Normalenebene[1] zu x spiegelt. Gib sie zum einen in der Notationen der Vorlesung an, also unter Verwendung des Skalarprodukts. Bestimme zum anderen ihre „Matrixdarstellung”. Die Existenz dieser Darstellung geht auf den Satz aus der Vorlesung zurück, dass jede Isometrie g im $\mathbb{R}^n$ eine Darstellung der Form $g(v) = Av + b$ hat, wobei $A \in \mathrm{O}(n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$.

b) Ein Endomorphismus F eines euklidischen Vektorraus V heißt *orthogonal*, falls

$$\langle\, F(v), F(w)\,\rangle = \langle\, v, w\,\rangle \quad \text{für alle } v, w \in V$$

gilt. In injektiver Endomorphismus heißt *winkeltreu*, wenn

$$\measuredangle(v, w) = \measuredangle(F(v), F(w)) \quad \text{für alle } v, w \in V$$

ist. Zeige, dass F genau dann winkeltreu ist, wenn eine orthogonale Abbildung G auf V und ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert, sodass $F = \lambda G$ ist. *Beachte*, dass V nicht notwendigerweise endlichdimensional ist.

Aufgabe 2: *Gruppe von Drehungen* (2 + 2 + 2 + 2 (+1) Punkte)

Gegeben sei der dreidimensionale Würfel $[0, 1]^3$. Betrachte die Drehungen, die den Würfel auf sich selbst abbilden, also „nur” die Ecken permutieren.

a) Bestimme alle Drehachsen und gib jeweils bespielhaft eine Drehung an.

b) Wir fassen alle Drehungen inklusive der Identität zu einer Menge G zusammen. Wie lautet $|G|$?

c) Man kann zeigen, dass G eine Gruppe ist. Bestimme eine Untergruppe H der Ordnung 3 und weise nach, dass H eine Gruppe ist. Verwende hierbei *nicht* die Tatsache, dass G eine Gruppe ist.

d) Gib G an. Es gibt mehrere Möglichkeiten, dies zu tun. Du kannst alle Elemente aufzählen, eine Präsentation angeben (mit Beweis), oder aber die Elemente gruppieren und genau beschreiben. Den *Zusatzpunkt* gibt es, falls ihr erkennt, zu welcher (sehr bekannten) Gruppe G isomorph ist und dies begründet.

[1] Mit Normalenebene ist hier diejenige Ebene des $\mathbb{R}^3$ gemeint, die senkrecht auf x steht und den Punkt x enthält.

Aufgabe 3: *Bahnen von Gruppenwirkungen* (2 + 2 + 2 Punkte)

Gegeben sei die Gruppe G aus Aufgabe 2. Falls noch Unklarheiten bezüglich der Gruppe bestehen, siehe folgenden Wikipedia-Artikel. In dieser Aufgabe betrachten wir die Gruppenwirkung von G auf $[0,1]^3$, die ein Gruppenelement auf seine entsprechende Drehung abbildet.
Gegeben seien nun folgende Punkte auf dem Würfel:

$$x := (0,0,1), \quad y := (\tfrac{1}{2},0,1), \quad z := (\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{2})$$

und ein weiterer Punkt w, der keine Ecke und kein Mittelpunkt einer Kante oder Seitenfläche ist.

a) Gib die Bahnen (Orbits) von x, y und z an. Beschreibe die Bahn von w.

b) Ist die Gruppenwirkung diskret? Transitiv[2]?

c) Betrachte die konvexen Hüllen[3] der Bahnen Gx, Gy und Gz. Um welche geometrischen Objekte handelt es sich?

[2] Eine Gruppenwirkung von einer Gruppe G auf einen topologischen Raum X heißt transitiv, falls für alle $x_1, x_2 \in X$ ein $g \in G$ existiert, mit $g \cdot x_1 = x_2$.

[3] Die konvexe Hülle einer Menge von Punkten ist die Menge aller Affinkombinationen mit nichtnegativen Koeffizienten.