FREIE UNIVERSITÄT BERLIN
Institut für Mathematik
Prof. Günter M. Ziegler

Geometrie
SoSe 2013
Albert Haase

4. Übungsblatt Geometrie

*Abgabe bis spätestens **Montag, den 13.5.2013,** vor der Vorlesung. Bitte vermerken, in welcher Veranstaltung ihr das korrigierte Blatt erhalten möchtet.*

Aufgabe 1: *Affine Abbildungen* (8 Punkte)

Zwei Punktmengen $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ heißen affin-äquivalent, wenn es eine Affinität $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gibt, deren Einschränkung $f_{|X}$ auf X eine Bijektion von $X \to Y$ induziert.
Sind die folgenden Punktmengen im $\mathbb{R}^2$ affin-äquivalent? Wenn nein, woran kann man das sehen – z.B. an affinen Abhängigkeiten? Falls ja, dann gib eine Affinität wie oben beschrieben in der Form $Ax + b$ mit $A \in \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(2)$ und $b \in \mathbb{R}^2$ an. Bestimme die Fixpunkte dieser Affinitäten.

1. $\{(0,0),(1,0),(1,1)\}$ und $\{(0,0),(1,0),(2,2)\}$
2. $\{(0,0),(1,1),(2,2)\}$ und $\{(0,0),(2,2),(4,4)\}$
3. $\{(0,0),(1,1),(2,2)\}$ und $\{(1,0),(3,2),(5,4)\}$
4. $\{(0,0),(1,1),(2,2)\}$ und $\{(0,0),(2,2),(5,5)\}$
5. $\{(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)\}$ und $\{(0,0),(1,0),(\frac{1}{2},1),(\frac{1}{2},-1)\}$
6. $\{(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)\}$ und $\{(0,0),(1,0),(\frac{1}{2},1),(\frac{1}{2},-2)\}$

Aufgabe 2: *Mannigfaltigkeiten* (2 + 2 + 2 Punkte)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Menge $\mathrm{O}(n)$ aller orthogonalen Matrizen mit reellen Einträgen eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n\times n}$ der Dimension $\binom{n}{2}$ ist. Nun wissen wir, dass $\mathrm{O}(n)$ eine Gruppe ist. Multiplikation und Inversenbildung sind differenzierbare (glatte) Abbildungen von $\mathrm{O}(n) \to \mathrm{O}(n)$. Daher ist $\mathrm{O}(n)$ eine sogenannte *Lie-Gruppe.* In dieser Aufgabe betrachten wir die Untergruppe $\mathrm{SO}(n)$ aller Matrizen aus $\mathrm{O}(n)$ mit Determinante 1.

a) Zeige, dass $\mathrm{SO}(n)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{O}(n)$ derselben Dimension ist. Argumentiere, warum $\mathrm{SO}(n)$ ebenfalls eine Lie-Gruppe ist.

b) Ist $\mathrm{O}(n)$ zusammenhängend? Und $\mathrm{SO}(n)$? Beweise.

c) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Tangentialebene im Punkt e (Einheitsmatrix) der $\mathrm{SO}(n)$ durch den Vektorraum der schiefsymmetrischen $(n \times n)$-Matrizen gegeben ist.[1] Gib für $\mathrm{SO}(3)$ eine Baisis der Tangentialebene $T_e\,\mathrm{SO}(3)$ im Punkt e an. Welche Dimension hat $T_e\,\mathrm{SO}(3)$ als Vektorraum?

[1]Eine Matrix A heißt schiefsymmetrisch, falls $A = -A^t$ ist.

Aufgabe 3: *Symmetrische Gruppe* (2 + 2 + 2 (+ 3) Punkte)

Es sei X eine n-elementige Menge. Wir bezeichnen die Menge aller Bijektionen von X nach X mit $\mathfrak{S}_n$. Mit der Komposition von Abbildungen bildet $\mathfrak{S}_n$ eine Gruppe. Wir nennen sie *symmetrische Gruppe vom Grad n*. Elemente aus $\mathfrak{S}_n$ nennen wir *Permutationen*.

Es sei π eine Permutation der Menge $[n] \coloneqq \{1, \dots, n\}$. Wir nennen π einen *Zykel der Länge k*, falls paarweise verschiedene $i_1, \dots, i_k \in [n]$ existieren mit $\pi(i_1) = i_2, \dots, \pi(i_{k-1}) = i_k$ und $\pi(i_k) = i_1$ sowie $\pi(j) = j$ für alle $j \in [n] \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$. In diesem Fall schreiben wir π auch in der *Zykelschreibweise* $\pi = (i_1, \dots, i_k) = (i_2, \dots, i_k, i_1) =$ etc. Zwei Zykel $(i_1, \dots, i_k)$ und $(j_1, \dots, j_l)$ heißen *disjunkt*, falls $\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{j_1, \dots, j_l\} = \varnothing$ ist. Ein Zykel heißt *Transposition*, falls er die Länge 2 hat.

a) Sei G eine endliche Gruppe. Beweise, dass ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass G isomorph zu einer Untergruppe von $\mathfrak{S}_n$ ist. Jede endliche Gruppe kann also als Untergruppe einer symmetrischen Gruppe betrachtet werden.

b) Sei $\pi \in \mathfrak{S}_9$ eine Permutation der Zahlen $\{1, \dots, 9\}$ definiert durch $\pi(i) = 10 - i$. Schreibe π in Zykelschreibweise und als Produkt von Transpositionen.

c) Wieviele Elemente enthält $\mathfrak{S}_n$? Wieviele Elemente σ mit $\sigma^2 = \sigma \circ \sigma = e$ enthält $\mathfrak{S}_4$? Hier bezeichne $e \in \mathfrak{S}_4$ das neutrale Element. Beweise deine Aussagen.

*d) *Zusatzaufgabe:* Es sei p eine Primzahl und $\tau \in \mathfrak{S}_n$ ein Element der Ordnung p.[2] Zeige, dass τ ein Zykel der Länge p oder ein Produkt disjunkter Zykel der Länge p ist. *Tipp:* Zeige, dass sich jede Permutation in $\mathfrak{S}_n$ als Produkt disjunkter Zykel darstellen lässt. Bis auf die Reihenfolge der Zykel ist diese Darstellung eindeutig.

[2] Die Ordnung eines Elements g einer Gruppe G ist die Kardinalität der (Unter-)Gruppe $\langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$, die von g erzeugt wird. Hier wird $g^0 \coloneqq e$. Gruppen, die von einem Element erzeugt werden, nennt man *zyklisch*.