FREIE UNIVERSITÄT BERLIN
Institut für Mathematik
Prof. Günter M. Ziegler

Geometrie
SoSe 2013
Albert Haase

5. Übungsblatt Geometrie

Abgabe bis spätestens ***Freitag, den 24.5.2013,*** *vor der Vorlesung. Das 6. Übungsblatt erscheint am Freitag, den 31.5, ist aber erst 10 Tage später abzugeben. Bitte vermerken, in welcher Veranstaltung ihr das korrigierte Blatt erhalten möchtet.*

Aufgabe 1: *Quadriken – Lemma aus der Vorlesung* (2 + 3 Punkte)

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ eine Quadrik.

a) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Affinität. Zeige, dass $f(Q) \subset \mathbb{R}^n$ ebenfalls eine Quadrik ist.

b) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein affiner Unterraum. Zeige, dass $U \cap Q$ wieder eine Quadrik ist.

Aufgabe 2: *Quadriken bestimmen* (3 + 3 + 3 (+2) Punkte)

a) Bestimme den Typ der folgenden Quadrik im $\mathbb{R}^2$ für die Fälle $a = 1$, $a = 4$ und $a = 7$:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, ax^2 - 4xy + y^2 + 2x - y = 0\}.$$

b) Eine Quadrik im $\mathbb{R}^n$ enthalte die sieben Punkte

$$0,\ u,\ v,\ w,\ u+v,\ u+w \text{ und } v+w.$$

Zeige, dass sie auch den Punkt $u + v + w$ enthält. Interpretiere die Aussage geometrisch.

c) Wie lautet die Anzahl der Freiheitsgrade, die wir haben, um eine Quadrik im $\mathbb{R}^2$ zu definieren? Beweise.

*d) *Zusatzaufgabe:* Kann die Menge aller ebenen Quadriken als Mannigfaltigkeit betrachtet werden? Beweise oder widerlege.

Aufgabe 3: *Ellipse* (2 + 2 + 2 Punkte)

Gegeben sei eine Ellipse

$$E := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

mit $a \geq b > 0$. Es sei $c := \sqrt{a^2 - b^2}$, dann nennen wir $F = (c, 0)$ und $F' = (-c, 0)$ die *Brennpunkte* von E.

a) Bestimme für die Ellipse aus Aufgabe 2 a) die Brennpunkte.

b) Beweise folgende Aussage: Die Summe der Abstände eines Punktes aus E von den Brennpunkten ist $2a$.

c) Zeige, dass zwei Punkte in der Ebene und eine positive Zahl eine Ellipse definieren und argumentiere, warum diese Zuordnung eindeutig ist.