Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Günter M. Ziegler

Geometrie
SoSe 2013
Albert Haase

7. Übungsblatt Geometrie

*Abgabe bis spätestens **Montag, den 10.6.2013,** vor der Vorlesung. Bitte vermerken, in welcher Veranstaltung ihr das korrigierte Blatt erhalten möchtet.*

Aufgabe 1: *Doppelverhältnis* (4 + 2 + 2 (+ 2) Punkte)

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ vier verschiedene Punkte, die auf einer Gerade liegen. Sei $\lambda := [a, b; c, d]$.

a) Setzen Sie voraus, dass von den folgenden Bedingungen (1) und (2) schon gezeigt sind, und beweisen Sie damit (3) und (4):

(1) $[a, b; c, d] = [b, a; d, c] = [c, d; a, b] = [d, c; b, a] = \lambda$,
(2) $[a, b; d, c] = [b, a; c, d] = \frac{1}{\lambda}$,
(3) $[a, c; b, d] = 1 - \lambda$
(4) und damit sind alle anderen Werte des Doppelverhältnisses einer Permutation der vier Punkte festgelegt; dabei können nur 6 verschiedene Werte auftreten, nämlich λ, $\frac{1}{\lambda}$, $1 - \lambda$, $1 - \frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{1-\lambda}$ und $\frac{\lambda}{\lambda-1}$.

b) Für welche a, b, c, d ist λ positiv, wann ist λ negativ?

c) Zeige: „Das Doppelverhältnis von vier kollinearen Punkten[1] $a, b, c, d \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ ist bereits dann wohldefiniert, wenn *nicht drei von ihnen gleich sind.*"

d) *Zusatzaufgabe:* Geben Sie vier Punkte auf einer Geraden an, für die 6, 4, 3 oder 2 verschiedene Werte von λ auftreten – soweit dies möglich ist.

Aufgabe 2: *Komplexe projektive Geometrie* (3 + 1 + 2 Punkte)

a) Definiere die projektive Geometrie $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$. Führe dazu die Menge $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ ein und weiterhin, was ein projektiver Unterraum und was eine Transformation ist. Definiere in diesem Zusammenhang auch den allgemeineren Begriff „projektive Abbildung".

b) Zeige, dass sich zwei verschiedene Geraden im $\mathbb{C}\mathrm{P}^2$ (eindimensionale projektive Unterräume) immer in genau einem Punkt schneiden.

c) Definiere den Begriff „Kollinearität". Zeige, dass die Konjugation $z \longmapsto \bar{z}$ eine Kollinearität $\mathbb{C}\mathrm{P}^2 \longrightarrow \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ induziert, die aber keine Projektivität ist.

Aufgabe 3: *Projektive Inzidenzgeometrie* (3 + 3 Punkte)

a) Beschreibe alle möglichen Konfigurationen von drei Geraden im $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$.

b) Beschreibe alle möglichen Konfigurationen von drei 2-dimensionalen Unterräumen im $\mathbb{R}\mathrm{P}^5$.

[1] Kollinear heißt, in einem Unterraum der projektiven Dimension 1 liegend, also auf einer Geraden.