Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Günter M. Ziegler

Geometrie
SoSe 2013
Albert Haase

11. Übungsblatt Geometrie

Dies ist das letzte Übungsblatt des Semesters. Abgabe bis spätestens ***Freitag, den 12.7.2013.***

Aufgabe 1: *Möbiustransformationen* (6 Punkte)

In der Vorlesung haben wir gelernt, dass bei Vorgabe von 6 Punkten $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \widehat{\mathbb{C}}$, wovon die ersten drei und die letzen drei paarweise verschieden seien, genau eine orientierungserhaltende und eine orientierungsumkehrende Möbiustransformation f der Ebene existiert, für die $f(z_i) = w_i$ gilt (Korollar 8.11 des Skripts). Betrachte folgende Matrix:

$$M := \begin{pmatrix} zw & z & w & 1 \\ z_1w_1 & z_1 & w_1 & 1 \\ z_2w_2 & z_2 & w_2 & 1 \\ z_3w_3 & z_3 & w_3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Zeige, wie man von dieser Matrix ausgehend eine Möbiustransformation $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ erhält, die z_i auf w_i abbildet und orientierungserhaltend (-umkehrend) ist. *Tipp:* Determinante ...

(ii) Gib eine Abbildung $g\colon \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ an, die durch sechs Punkte (wie oben beschrieben) nicht eindeutig festgelegt ist.

Aufgabe 2: *Lorentz-Modell der hyperbolischen Geometrie* (10 Punkte)

Es seien die Menge

$$H^2 = \left\{x \in \mathbb{R}^{2,1} \;\middle|\; \langle x, x\rangle = -1,\, x_3 > 0\right\}$$

und die Gruppe

$$\mathrm{O}^+(2,1) = \left\{A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3} \;\middle|\; A^tEA = E,\, a_{n+1,n+1} > 0\right\}$$

gegeben. Beachte, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das *Lorentz-Skalarprodukt* und

$$E = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0^t & -1 \end{pmatrix}$$

ist. Wir nennen H^2 zusammen mit $\mathrm{O}^+(2,1)$ *ebene hyperbolische Geometrie*, genauer das *Lorentz-Modell* der ebenen hyperbolischen Geoemtrie. Geraden sind Schnitte von H^2 mit zweidimensionalen linearen Unterräumen von $\mathbb{R}^{2,1}$. Beweise folgende Aussagen:

(i) Jede Gerade $\ell \subset H^2$ hat einen raumartigen Normalenvektor, das heißt es existiert ein $n \in \mathbb{R}^{2,1}$ mit $\ell = H^2 \cap \left\{x \in \mathbb{R}^{2,1} \;\middle|\; \langle x, n\rangle = 0\right\}$ und $\langle n, n\rangle = 1$. Daher bezeichnen wir mit „Normalenvektor einer Gerade" immer einen raumartigen.

(ii) Es sei $x \in H^2$ und ℓ_1 eine Gerade, dann gibt es eine eindeutige Gerade ℓ_2 durch x, die ℓ_1 orthogonal schneidet, also mit $\langle n_1, n_2 \rangle = 0$, wobei n_1 und n_2 die Normalenvektoren seien.

(iii) Es seien ℓ_1 und ℓ_2 Geraden mit Normalenvektoren n_1 und n_2, sodass $|\langle n_1, n_2 \rangle| > 1$. Dann gibt es genau eine Gerade ℓ_3 mit Normalenvektor n_3, die sowohl ℓ_1 als auch ℓ_2 orthogonal schneidet.

(iv) Beweise oder widerlege: Transformationen aus $\mathrm{O}^+(2,1)$ bilden Geraden auf Geraden ab? Erhalten Winkel?

Aufgabe 3: *Bonusaufgabe: Ford-Kreise und Möbiustransformationen* ((8 Punkte))

In der Vorlesung waren wir kurz auf *Ford-Kreise* zu sprechen gekommen. *Ford-Kreise* ermöglichen es, rationale Zahlen geometrisch darzustellen, indem wir jedem $p/q \in \mathbb{Q}$ mit $\mathrm{ggT}(p,q) = 1$ den *Ford-Kreis* $C[p/q]$ mit Mittelpunkt $(p/q, 1/(2q^2))$ und Radius $1/(2q^2)$ zuordnen. Beweise folgende Aussagen:

(a) Seien $p/q,\ P/Q \in \mathbb{Q}$ mit $p/q \neq P/Q$, $\mathrm{ggT}(p,q) = 1$ und $\mathrm{ggT}(P,Q) = 1$. Dann besitzen die Ford-Kreise $C[p/q]$ und $C[P/Q]$ höchstens einen gemeinsamen Punkt. (Insbesondere sind sie tangential, wenn $|Pq - pQ| = 1$ gilt.)

(b) Ein Satz aus der Zahlentheorie (der *umgekehrte euklidische Algorithmus*) liefert uns die Existenz eines tangentialen *Ford-Kreises* zu jedem beliebigem *Ford-Kreis*. Zeige nun:

Seien p/q und P/Q wie in (a) und die darstellenden *Ford-Kreise* tangential. Dann sind alle zu $C[p/q]$ tangentialen *Ford-Kreise* von der Form $C[P_n/Q_n]$ mit

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P + np}{Q + nq}\,, \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}\,.$$

Außerdem sind „aufeinanderfolgende” Ford-Kreise $C[P_n/Q_n]$ und $C[P_{n+1}/Q_{n+1}]$ ebenfalls tangential.