

Geometrie

<https://www.mi.fu-berlin.de/kvv/course.htm?cid=11063>

— vorläufiges Skript (ohne Garantie) —

— Ich bin dankbar für Hinweise auf Fehler, Korrekturen, Verbesserungsvorschläge, etc. —

— Version vom 12. April 2013 —

Prof. Günter M. Ziegler

Fachbereich Mathematik und Informatik

FU Berlin, 14195 Berlin

Tel. 030 838 75 668

ziegler@math.fu-berlin.de

<http://page.mi.fu-berlin.de/gmziegler/>

FU Berlin, Sommersemester 2013

Diese Vorlesung für das Bachelorstudium soll als natürliche Fortsetzung von Lineare Algebra I und II Fundamente legen für Vorlesungen/Zyklen wie Diskrete Geometrie, Algebraische Geometrie und Differentialgeometrie.

Sie behandelt grundlegende Modelle der Geometrie, insbesondere

- euklidische, affine, sphärische, projektive und hyperbolische Geometrie, Möbiusgeometrie, Polarität und Dualität
- Strukturgruppen, Messen (Längen, Winkel, Volumina), explizite Berechnungen und
- Anwendungen, Beispiele sowie Illustrationsthemen.

Dabei werden weitere Bezüge hergestellt, zum Beispiel zur Funktionentheorie und zur Numerik.

- [1] Marcel Berger. *Geometry I*. Universitext. Springer, Berlin Heidelberg, 1987.
- [2] David A. Brannan, Matthew F. Esplen, and Jeremy J. Gray. *Geometry*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2012.
- [3] Gerd Fischer. *Analytische Geometrie*. Vieweg, Wiesbaden, 2001. 7. Auflage.
- [4] V. V. Prasolov and V. M. Tikhomirov. *Geometry*, volume 200 of *Translations of Math. Monographs*. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [5] Thilo Rörig. Lecture notes for the Geometry I Course at TU Berlin, Winter 2012. <http://dgd.service.tu-berlin.de/wordpress/geometryws12/>.
- [6] Alexey B. Sossinsky. *Geometries*, volume 64 of *Student Math. Library*. Amer. Math. Soc., Providence RI, 2012.

Vorbemerkungen

Dies ist eine “allgemeine” Geometrie-Vorlesung für Bachelor-Studierende.

Ich will dabei meine Begeisterung für Geometrie vermitteln, interessante Beispiele, Strukturen und Effekte vorführen, insbesondere aber Werkzeuge für die Arbeit mit geometrischen Strukturen vermitteln, die dann in ganz unterschiedliche Richtungen hilfreich sein können, insbesondere für Vorlesungszyklen wie “Diskrete Geometrie I–III” (den ich in den kommenden Semestern selber halten werde), Differentialgeometrie, Algebraische Geometrie, aber auch für Vorlesungen wie Geometry Processing und Algorithmische Geometrie.

Hier kommt ein grober Zeitplan, den wir schrittweise anpassen werden:

1. Was ist Geometrie? 8. April
2. Euklidische Geometrie, I: Der \mathbb{R}^n mit einem Skalarprodukt 12. April
3. Euklidische Geometrie, II: Euklidische Bewegungen (J.P.) 15. April
4. *Hochdimensionale Effekte, Kugelpackungen, Gitter, Kusszahlen 19. April
5. *Spiegelungen, Spiegelungsgruppen, reguläre Polytope 22. April
6. Affine Geometrie, I 26. April
7. Affine Geometrie, II 29. April
8. Mannigfaltigkeiten, Transformationsgruppen und ihre Dimension..... (J.P.) 3. Mai
9. Kegelschnitte und Quadriken, I 6. Mai
10. Kegelschnitte und Quadriken, II 10. Mai
11. *Kegelschnitte und Quadriken, III 13. Mai
12. Projektive Geometrie, I 17. Mai
— Pfingstmontag — 20. Mai
13. Projektive Geometrie, II 24. Mai
14. *Projektive Geometrie, III 27. Mai
15. “Was ist eine Geometrie” 31. Mai
16. Sphärische und elliptische Geometrie, I 3. Juni
17. Sphärische und elliptische Geometrie, II 7. Juni
18. *Sphärische und elliptische Geometrie, III 10. Juni
19. Möbiusgeometrie, I 14. Juni
20. Möbiusgeometrie, II (J.P.) 17. Juni
21. *Möbiusgeometrie, III: Ford-Kreise und Ford-Kugeln (J.P.) 21. Juni
22. Hyperbolische Geometrie, I 24. Juni
23. Hyperbolische Geometrie, II 28. Juni
24. *Hyperbolische Geometrie, III: Volumenschranken für Triangulierungen 1. Juli
25. Geometrie-Modelle und ihr Zusammenhang 5. Juli
26. Wiederholung / Übersicht / Perspektiven 8. Juli
27. Abschlussklausur 15. Juli

0 Was ist Geometrie? Was ist eine Geometrie? Was soll Geometrie?

0.1 Begriff

Geo = Erde, Metrie = Vermessung
Dürer 1525 “Messung, Messkunst”

0.2 Geschichte

“5000 Jahre Geometrie” (siehe [3]) in 7 Büchern:

300 v.Chr. Euklid “Elemente”: Axiomatik, ..., Ikosaeder

1525 Albrecht Dürer “Unterweysung der Messung”: Darstellende Geometrie, Perspektive, Kegelschnitte

1637 René Descartes “Discours de la Methode”: Koordinaten (siehe auch Fermat, etc.)

1827 August Möbius “Barycentrischer Calkul”: homogene Koordinaten, projektive Geometrie, Freiheitsgrade

... Gauß, Lobachevsky 1827, Bolyai 1831, etc.: “nicht-euklidische Geometrien”

1872 Felix Klein “Erlanger Programm”: einheitliche Konzeption

1854 Bernhard Riemann “Über die Hypothesen, die der Geometrie zugrunde liegen”: Differentialgeometrie, Riemann’sche Geometrie

1899 David Hilbert “Grundlagen der Geometrie”: moderne Axiomatik

0.3 Begriffe

- Euklidische Geometrie
- Projektive Geometrie
- Hyperbolische Geometrie
- Sphärische Geometrie, Elliptische Geometrie
- Möbiusgeometrie, Kreisgeometrie
- ...
- Differentialgeometrie, Riemann’sche Geometrie, ... → [Ecker, Polthier]
- Algebraische Geometrie, torische Geometrie, ... → [Altmann]
- Arithmetische Geometrie ... → [Esnault]
- Diskrete Geometrie, Polyedergeometrie, ... → [Ziegler, ...]
- Algorithmische Geometrie, Geometry Processing, ... → [Rote, Polthier]
- ...
- Darstellende Geometrie
- Grundlagen der Geometrie
- ...
- “anschauliche Geometrie” [2]
- “unvergängliche Geometrie” [1]

0.4 Eine Geometrie

Beispiel: d -dimensionale Euklidische Geometrie (\mathbb{R}^d mit starren Bewegungen, die Abstände erhalten). Dort werden wir unter anderem die folgenden Daten sammeln/beweisen

- **Menge:** \mathbb{R}^d
- **Gruppe:** $\text{Eukl}(d) \cong \mathbb{R}^n \rtimes \text{O}(n)$
 - Dimension der Gruppe = Anzahl der Freiheitsgrade = $\binom{d+1}{2}$
 - Erzeuger: Spiegelungen an Hyperebene
- **Invarianten:** Abstände, Winkel, affine Räume, Kugeln/Sphären, ...
- **Charakterisierung:** Jede bijektive Abbildung, die Abstände erhält, ist eine euklidische Bewegung
- **Objekte:** zum Beispiel Kugelpackungen, Gitter, reguläre Polyeder, ...

0.5 Problematische Begriffe

zu definieren/klären/charakterisieren:

- Dimension (u.a. Dimension einer Transformationsgruppe!)
- Volumen (u.a. von Polyedern, Kugeln, etc. – braucht man Analysis dafür?)
- Winkel

- [1] Harold Scott Macdonald Coxeter. *Unvergängliche Geometrie*. Birkhäuser, Basel, 1981. Übersetzung der 2. Auflage von "Introduction to Geometry", 1. Auflage 1963.
- [2] David Hilbert and Stephan Cohn-Vossen. *Anschauliche Geometrie*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1932. Second edition 1996. English translation: *Geometry and the Imagination*, Chelsea Publ., 1952.
- [3] Christoph J. Scriba and Peter Schreiber. *5000 Jahre Geometrie*. Springer, Berlin Heidelberg, 2001.

1 Euklidische Geometrie

1.1 Der \mathbb{R}^n mit einem Skalarprodukt

1.1.1 Lineare und affine Unterräume

Modell: \mathbb{R}^n reeller Vektorraum mit der Standardbasis e_1, \dots, e_n und dem entsprechenden “euklidischen” Koordinatensystem.

Untervektorräume $U \subseteq \mathbb{R}^n$ der Dimension $\dim U$, mit $0 \leq \dim U \leq n$.

“Innere Beschreibung”:

$$U = \text{span}\{v_1, \dots, v_r\} = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r : \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}\}, \quad \text{mit } r \geq \dim U.$$

Hier gilt $r = \dim U$ wenn $\{v_1, \dots, v_r\}$ linear unabhängig ist; in diesem Fall sind die λ_i *Koordinaten* für U .

“Äußere Beschreibung”: durch ein *homogenes lineares Gleichungssystem*

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}, \quad \text{mit } A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad m \geq n - \dim U.$$

Hier hat A den Rang $n - \dim U$, und es gilt $m = n - \dim U$ wenn die Zeilen von A linear unabhängig sind.

Affine Unterräume $U \subseteq \mathbb{R}^n$ der Dimension $\dim U$, mit $-1 \leq \dim U \leq n$, sind die Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen, wobei \emptyset als affiner Unterraum der Dimension -1 betrachtet wird.

“Äußere Beschreibung”: $U = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$, mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n - \dim U$, $b \in \mathbb{R}^m$ durch ein *lineares Gleichungssystem*. Wenn b nicht im Spaltenraum von A liegt, dann ergibt dies $U = \emptyset$. Ansonsten ist b ein Punkt in U , A hat den Rang $n - \dim U$, d.h. $\dim U = n - \text{rank} A$, und es gilt $m = n - \dim U$ wenn die Zeilen von A linear unabhängig sind.

“Innere Beschreibung”: $U = b + \text{span}\{v_1, \dots, v_r\}$, mit $r \geq \dim U$. Hier gilt $r = \dim U$ wenn $\{v_1, \dots, v_r\}$ linear unabhängig sind. Jeder Basispunkt mit einer (geordneten) Basis liefert uns *Koordinaten* für U . Symmetrischere Alternative: *baryzentrische Koordinaten*

$$U = \{\mu_0 u_0 + \dots + \mu_r u_r : \mu_0, \dots, \mu_r \in \mathbb{R}, \mu_0 + \dots + \mu_r = 1\},$$

wobei u_0, \dots, u_r *affin erzeugen* — zum Beispiel $b, b + v_1, \dots, b + v_r$. Die Punkte u_0, \dots, u_r sind *affin unabhängig* wenn es keine nicht-triviale Abhängigkeit $\mu_0 u_0 + \dots + \mu_r u_r = 0$ mit $\mu_0 + \dots + \mu_r = 0$ gibt.

Unter anderem haben wir als affine Unterräume: Punkte, Geraden, Ebenen (Dimension 2), \dots , Hyperebenen (Dimension $n - 1$). Ein affiner Unterraum hat keinen natürlichen Basispunkt.

1.1.2 Abstände

Definition 1.1 (Metrik). Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist $d(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ der *Abstand* zwischen den durch x, y bestimmten Punkten.

Bemerkung: Diese fundamentale Definition beschreibt, wie Abstände gemessen werden; sie ist elementargeometrisch durch den *Satz von Pythagoras* motiviert!

Definition 1.2 (Norm). Die *Norm* von $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet die Länge des Vektors $0x$, also der Abstand des Punktes x vom Nullpunkt: $|x| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Damit lässt sich die Metrik auch als $d(x, y) = |x - y|$ beschreiben.

Definition 1.3 (Standard-Skalarprodukt). Für $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Proposition 1.4 (Polarisierung). *Aus der Norm kann das Skalarprodukt rekonstruiert werden, da für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$*

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2\langle x, y \rangle.$$

Proposition 1.5 (Dreiecksungleichung). *Für $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ gilt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, mit Gleichheit nur wenn x, y, z in der richtigen Reihenfolge auf einer (affinen) Geraden liegen.*

Beweis. OBdA $y = 0$, dann reduziert sich die Ungleichung nach Quadrieren auf $-\langle x, z \rangle \leq |x||z|$, also die Cauchy-Schwarz¹-Ungleichung. \square

1.1.3 Orthogonalität

Definition 1.6 (Orthogonalität). Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ sind *orthogonal*, wenn $\langle x, y \rangle = 0$.

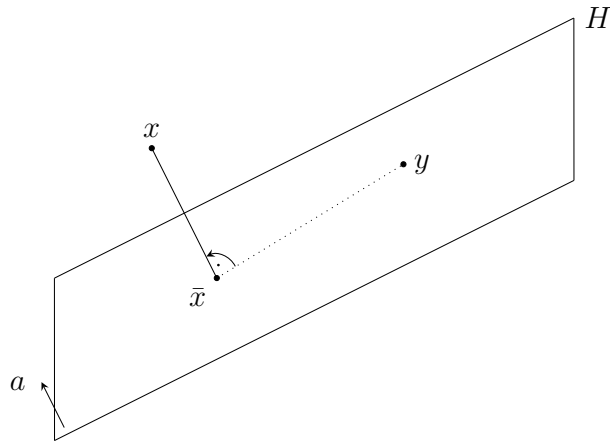
Orthogonalisierung. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ kann man $\bar{y} := y - \frac{\langle y, x \rangle}{|x|^2} x$. Und es gilt $\bar{y} \neq 0$, wenn y nicht von x linear abhängig ist. Iteration dieses Schemas ergibt die *Gram-Schmidt Orthogonalisierung*. (Einfacheres Rechenschema, wenn man die Vektoren jeweils auf Länge 1 normiert.)

Orthogonale Projektion eines Punktes x auf eine Hyperebene $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle = \alpha\}$ für $a \neq 0$: der eindeutige Bildpunkt $\bar{x} \in H$ lässt sich auf unterschiedliche Weise beschreiben/charakterisieren.

Aufgabe. Für eine Hyperebene $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle = \alpha\}$ mit $a \neq 0$ und einen Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ sind äquivalent:

- (i) $d(\bar{x}, x)$ ist minimal für $\bar{x} \in H$
- (ii) $\langle x - \bar{x}, y - \bar{x} \rangle = 0$ für alle $y \in H$
- (iii) $\bar{x} = x + ta$ mit $t \in \mathbb{R}$ so dass $\bar{x} \in H$
- (iv) $\bar{x} = x + \frac{\alpha - \langle a, x \rangle}{\langle a, a \rangle} a$

¹Hermann Amandus Schwarz (1843-1921 Berlin), http://de.wikipedia.org/wiki/Hermann_Amandus_Schwarz



1.1.4 Beispiele: Punktmengen mit wenigen Abständen

Theorem 1.7. *Im \mathbb{R}^n gibt es $n + 1$ Punkte, aber keine $n + 2$ Punkte, die paarweise voneinander denselben Abstand haben.*

Beweis (für den ersten Teil der Aussage). Betrachte die Punktmenge $e_1, \dots, e_n, t(e_1 + \dots + e_n)$ (für Abstand $\sqrt{2}$). Das liefert eine quadratische Gleichung für t , mit zwei Lösungen für t . \square

Aufgabe. Man beweise, dass $k + 1$ Punkte, die paarweise denselben Abstand 1 haben, affin unabhängig sind, also einen affinen Raum der Dimension k aufspannen.

Problem. Wie viele Punkte kann es im \mathbb{R}^n geben, zwischen denen nur zwei verschiedene Abstände auftreten? — nicht vollständig gelöst!

Beispiel 1.8. Zwischen den $\binom{d}{2}$ Punkten $e_i + e_j \in \mathbb{R}^d$ ($1 \leq i < j \leq d$) gibt es nur zwei verschiedene Abstände.

Aufgabe. Man beschreibe explizit $\binom{d+1}{2}$ Punkte im \mathbb{R}^d (oder $\binom{d}{2}$ Punkte im \mathbb{R}^{d-1}), zwischen denen es nur zwei verschiedene Abstände gibt.

Aufgabe. (*) Zwischen n Punkten in der Ebene \mathbb{R}^2 kann der größte Abstand höchstens n mal auftreten. (Hopf & Pannwitz, siehe [4])

1.1.5 Sphären und Bälle

Definition 1.9 (Bälle und Sphären). Der *Einheitsball* im \mathbb{R}^n ist

$$B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}.$$

Allgemeiner betrachten wir den Ball mit Mittelpunkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und Radius $r > 0$:

$$B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq r\}.$$

Die *Einheitssphäre* im \mathbb{R}^n ist

$$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}.$$

Allgemeiner betrachten wir die Sphäre mit Mittelpunkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und Radius $r > 0$:

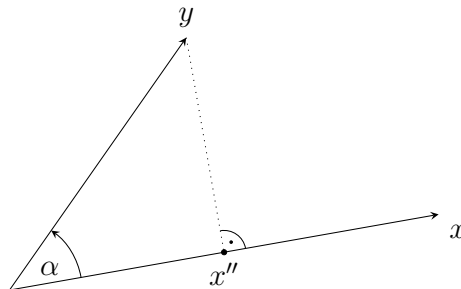
$$S(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}.$$

1.1.6 Winkel

Definition 1.10. Den Winkel zwischen zwei Vektoren $0x$ und $0y$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$ definieren wir als die Zahl $\alpha \in [0, \pi]$ mit

$$\langle x, y \rangle =: |x||y| \cos \alpha.$$

Warum ist das sinnvoll? Man überlegt sich (Gram–Schmidt Orthogonalisierung! Zeichnung!), dass für $x'' := \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} x$ das Dreieck $0x''y$ rechtwinklig ist — und deshalb $\cos \alpha = \frac{|x''|}{|x|} = \frac{\langle x, y \rangle}{|x||y|}$.

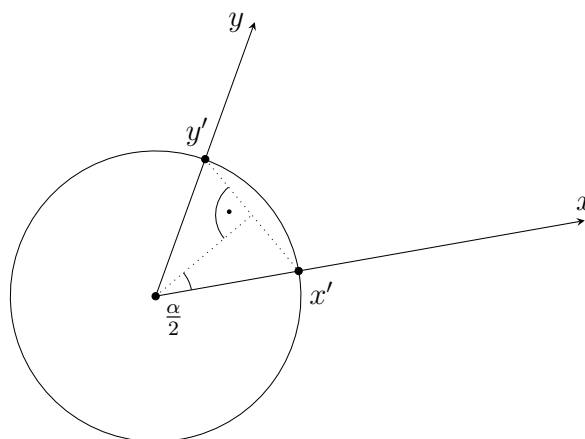


Alternative (braucht Analysis/Geometrie auf der Kugel(!), aber vielleicht intuitiver): Den Winkel $\sphericalangle(x, y)$ zwischen zwei Vektoren $x, y \neq 0$ definieren wir als den *Abstand* zwischen $x' := \frac{1}{|x|x}x$ und $y' := \frac{1}{|y|y}y$, aber gemessen auf der Einheitssphäre $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$.

Man überlegt sich (Trigonometrie!), dass dann $|x' - y'| = 2 \sin(\frac{\alpha}{2})$ ist, also

$$\alpha = 2 \sin^{-1}(\frac{1}{2}|x' - y'|).$$

Jetzt muss man natürlich zeigen, dass die beiden Definitionen dasselbe liefern!



Lemma 1.11 (Winkel sind additiv. Dreiecksungleichung für Winkel!). Für Vektoren $x, y, z \neq 0$ gilt

$$\sphericalangle(x, z) \leq \sphericalangle(x, y) + \sphericalangle(y, z),$$

mit Gleichheit nur wenn x, y, z linear abhängig sind, mit y "zwischen" x und z liegt.

Beweis. Dreiecksungleichung auf der Kugel. □

1.1.7 Volumen

Volumen kann man für “geeignete” Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ unterschiedlich definieren:

1. elementar: Zerschneiden und Zusammensetzen (Isometrien)
2. mit Hilfe der Determinantenfunktion (für Würfel, Spate, etc.)
3. Riemann’sches Volumen: mit kleinen Würfelchen ausschöpfen (vgl. Analysis-Vorlesung).
Das führt zu dem Riemann-Integral $\text{vol}(A) := \int_A 1 dx$.

Die Volumengleichheit z.B. von Parallelotopen, also Formeln von der Form

$$\text{vol}\{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n : 0 \leq \lambda_i \leq 1\} = |\det(a_1, \dots, a_n)|$$

folgen leicht mit Hilfe von Analysis-Methoden — aber lässt sich lässt sich Volumengleichheit von Polyedern “elementar” durch Zerlegungsgleichheit in kongruente Stücke begründen? Das war “Hilberts drittes Problem”; es wurde von Dehn *negativ* gelöst: Es gibt Tetraeder mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe, die nicht “zerlegungsgleich” sind. Siehe [1, Kap. 9] [2].

1.2 Kongruenztransformationen

Definition 1.12 (Kongruenztransformationen). Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Kongruenztransformation* oder *euklidische Abbildung* oder *Isometrie* wenn sie Abstände erhält, also

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Wir betrachten erst einmal Beispiele.

1.2.1 Translationen

Translationen: $T_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto x + a$.

Die Translationen bilden eine abelsche Gruppe, die wir mit $(\mathbb{R}^n, +)$ identifizieren können.

1.2.2 Spiegelungen

Die Spiegelung von x an der Hyperebene $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle = \alpha\}$ mit $a \neq 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$S_H : x \mapsto x + 2 \frac{\alpha - \langle a, x \rangle}{\langle a, a \rangle} a.$$

ist eine Kongruenztransformation. Sie ist auch eine *Involution*: doppelt spiegeln ergibt die Identität, $S_H \circ S_H = \text{id}$.

Spiegelung an einem affinen Unterraum: Genauso!

1.2.3 Orthogonale Abbildungen

Proposition 1.13. *Isometrien, die den Nullpunkt festhalten, sind orthogonale Abbildungen.*

Solche Abbildungen sind also insbesondere linear, und können also in der Form $x \mapsto Ax$ beschrieben werden, mit orthogonaler Matrix A .

Beweis. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Isometrie mit $f(0) = 0$. Dann gilt insbesondere $|f(x)| = |x|$ für alle x , und deshalb $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ wegen *Polarisation*:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2 - |x - y|^2).$$

Nun sei e_1, \dots, e_n eine Orthonormalbasis (ONB), zum Beispiel die Standardbasis (wir setzen ja das Standardskalarprodukt voraus). Dann gilt für jeden Vektor

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i,$$

und deshalb, weil auch $f(e_1), \dots, f(e_n)$ eine ONB ist, und weil f das Skalarprodukt erhält,

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \langle f(x), f(e_i) \rangle f(e_i) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle f(e_i).$$

Daran sieht man, dass f linear ist. □

Lemma 1.14. Eine lineare Abbildung $x \mapsto Ax$ ist genau dann orthogonal, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen gilt:

- sie eine Orthonormalbasis auf eine Orthonormalbasis abbildet,
- sie jede Orthonormalbasis auf eine Orthonormalbasis abbildet,
- die Spalten von A eine Orthonormalbasis bilden,
- $A^t A = E_n$,
- die Zeilen von A eine Orthonormalbasis bilden.

Jede orthogonale Abbildung hat Determinante $+1$ oder -1 . Die orthogonalen Abbildungen des \mathbb{R}^n (und damit die darstellenden Matrizen) bilden eine Gruppe, die *orthogonale Gruppe*

$$O(n) = \{A \in \mathbb{R}^n : A^t A = E_n\}.$$

Die orientierungserhaltenden orthogonalen Abbildungen bilden eine Untergruppe, die *spezielle orthogonale Gruppe*

$$SO(n) = \{A \in \mathbb{R}^n : A^t A = E_n, \det A = 1\}.$$

Die Gruppe $O(n)$ ist nicht kommutativ für $n \geq 2$, $SO(n)$ ist nicht kommutativ für $n > 2$.

Theorem 1.15 (Normalformsatz für orthogonale Abbildungen). Für jede orthogonale Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt es eine Zerlegung des \mathbb{R}^n in ein- und zweidimensionale invariante orthogonale Unterräume, so dass

- auf jedem der ein-dimensionalen invarianten Unterräumen ist die Abbildung die Identität oder ihr Negatives,
- auf jedem der zwei-dimensionalen invarianten Unterräumen ist die Abbildung eine Drehung um einen Winkel im Intervall $]0, \pi[$.

Äquivalent dazu: für jede orthogonale Matrix $A \in O(n)$ gibt es $S \in O(n)$ so dass $S^{-1}AS$ eine Blockdiagonalmatrix ist

$$S^{-1}AS = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, D(\alpha_1), \dots, D(\alpha_k))$$

mit Einsen, Minus-Einsen und 2×2 Drehmatrizen zu Winkeln $0 < \alpha_i < \pi$ auf der Diagonale, also $D(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Lemma 1.16. Jede orthogonale Abbildung der Determinante $+1$ kann stetig (innerhalb der Gruppe $O(n)$!) in die Identität deformiert werden.

Jede orthogonale Abbildung der Determinante -1 kann stetig in die Spiegelung $s_1 : x \mapsto x - 2x_1 e_1$ deformiert werden.

Korollar 1.17. Für $n \geq 1$ hat die Gruppe $O(n) \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$ zwei Zusammenhangskomponenten, nämlich die spezielle orthogonale Gruppe $SO(n)$ und die Nebenklasse $SO(n)s_1 = \{A \in \mathbb{R}^n : A^t A = E_n, \det A = -1\}$.

Korollar 1.18. Jede orthogonale Abbildung des \mathbb{R}^n kann aus höchstens n Spiegelungen an Hyperebenen durch den Nullpunkt erzeugt werden. Im Allgemeinen reichen dafür jedoch $n - 1$ Spiegelungen nicht aus.

1.2.4 Allgemeine Kongruenztransformationen

Die Gruppe der Isometrien des \mathbb{R}^n (also der “euklidischen Bewegungen” oder “Kongruenztransformationen”) enthält einerseits die Untergruppe der Translationen — die wir mit \mathbb{R}^n identifizieren — andererseits die orthogonalen Abbildungen, also die Isometrien, die den Nullpunkt festlassen.

Die Schnittmenge zwischen diesen beiden Untergruppen enthält nur die Nullabbildung (die einzige Translation, die den Nullpunkt festlässt).

Jede Isometrie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ kann man als “orthogonale Abbildung gefolgt von einer Translation” beschreiben, also als $f : x \mapsto Ax + b$ für $A \in O(n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Dabei sind $b = f(0)$ und damit auch A durch f eindeutig festgelegt.

Theorem 1.19. *Die volle Gruppe der euklidischen Bewegungen ist*

$$\text{Eukl}(n) = \{f : f(x) = Ax + b \text{ für ein } A \in O(n), b \in \mathbb{R}^n\}.$$

Achtung: *Trotzdem ist die Gruppe der euklidischen Bewegungen **nicht** einfach das Produkt $\mathbb{R}^n \times O(n)$, weil die Translationen und die orthogonalen Abbildungen nicht kommutieren. Sie kann strukturell beschrieben werden als ein *semidirektes* Produkt “ $\mathbb{R}^n \rtimes O(n)$ ”, das gebildet werden kann, weil die Gruppe der orthogonalen Abbildungen $O(n)$ als eine Gruppe von Automorphismen auf der Gruppe der Translationen (isomorph zu \mathbb{R}^n) wirkt. (Siehe Fischer [3, Abschnitte I.3.4–I.3.6].) In dem semidirekten Produkt bilden die Translationen eine *normale* Untergruppe: Jede Konjugation einer Translation $x \mapsto x + a$ hat die Form*

$$x \mapsto S^{-1}((Sx + b) + a) - b = x + S^{-1}a,$$

ist also eine Translation.

1.2.5 Erzeugung durch Spiegelungen

Korollar 1.20. *Jede Kongruenztransformation im \mathbb{R}^n kann als Produkt von höchstens $n + 1$ Spiegelungen an Hyperebenen dargestellt werden — von denen alle, bis auf möglicherweise die letzte, Hyperebenen durch den Nullpunkt sind.*

Im Allgemeinen reichen dafür jedoch n Spiegelungen nicht aus.

Aufgabe. Wie sieht die letzte Spiegelung konkret aus? Man beweise damit die Aussage. (Korollar 1.18 darf benutzt werden.)

1.2.6 Hauptsatz der Euklidischen Geometrie

Theorem 1.21. *Sind p_0, \dots, p_m und p'_0, \dots, p'_m Punkte im \mathbb{R}^n mit*

$$d(p_i, p_j) = d(p'_i, p'_j) \quad \text{für alle } i, j \ (0 \leq i < j \leq m),$$

so gibt es eine euklidische Transformation $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax + b$, mit $A \in O(n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$, so dass $f(p_i) = p'_i$ für alle i gilt, $0 \leq i \leq m$.

Wenn die Punkte p_i nicht alle auf einer Hyperebene liegen (was insbesondere $m \geq n$ erzwingt), dann ist diese euklidische Transformation eindeutig bestimmt.

Beweis. Nach einer Verschiebung um den Vektor $b := p'_0 - p_0$ dürfen wir annehmen, dass $p_0 = p'_0 = 0$ ist.

Nun wenden wir das Gram–Schmidt-Verfahren auf die Vektoren p_1, \dots, p_m an, und erhalten daraus eine Orthogonalbasis $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n$. Achtung: wenn die Vektoren p_i nicht linear unabhängig sind, können dabei einige Vektoren durchaus Null ergeben – diese werden dann nicht weiter berücksichtigt. Wenn die Vektoren nicht aufspannen, wird am Ende zu einer Orthogonalbasis ergänzt – in diesem Fall ist die Basis $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n$ nicht eindeutig durch die Folge p_1, \dots, p_m bestimmt.

Genauso erzeugen wir mit dem Gram–Schmidt-Verfahren aus der Folge p'_1, \dots, p'_m von Vektoren eine Orthogonalbasis $\hat{p}'_1, \dots, \hat{p}'_n$. Dabei läuft das Gram–Schmidt-Verfahren ganz analog ab, mit denselben Koeffizienten, weil nämlich die Koeffizienten aus Skalarprodukten zwischen den Vektoren entstehen, und diese (*Polarisierung!*) durch die Normen der Vektoren und ihrer Differenzen bestimmt sind, und diese Daten sind nach Annahme für die Folgen p_1, \dots, p_m und p'_1, \dots, p'_m gleich.

Nun definiert die Vorschrift $f : \hat{p}_j \mapsto \hat{p}'_j$ eine orthogonale Abbildung f (weil sie eine ONB auf eine ONB abbildet). Die Tatsache, dass die \hat{p}_j mit denselben Koeffizienten aus den p_i gewonnen werden, wie die \hat{p}'_j aus den p'_i ergibt insbesondere, dass auch die p_i mit denselben Koeffizienten aus den \hat{p}_j dargestellt werden können wie die p'_i aus den \hat{p}'_j . Also bildet f auch p_i auf p'_i ab.

In dem Fall, dass keine Basisergänzung nötig ist, die p_i also den \mathbb{R}^n aufspannen, ist die Abbildung f sogar eindeutig. \square

Korollar 1.22 (Kongruenzsatz “SSS”). *Wenn zwei Dreiecke im \mathbb{R}^n gleiche Seitenlängen haben, dann sind sie kongruent.*

1.2.7 Freiheitsgrade

Bemerkung 1.23 („Freiheitsgrade“ — Dimension der Gruppe der Kongruenztransformationen). Jede Kongruenztransformation bildet $(0, e_1, \dots, e_n)$ auf *orthogonalen Rahmen* ab. Für den ersten Punkt liegt das Bild beliebig im \mathbb{R}^n , der zweite liegt auf einer $(n-1)$ -dimensionalen Sphäre, der nächste auf einer $(n-2)$ -Sphäre, usw. Daher ist die Anzahl der „Freiheitsgrade“ insgesamt $n + (n-1) + \dots + 1 = \frac{1}{2}(n+1)n$.

Alternative Rechnung: wir müssen die Bilder von $n+1$ Punkten festlegen, das sind $(n+1)n$ Variable, aber es gibt $\binom{n+1}{2}$ Bedingungen/paarweise Distanzen, also ist die Anzahl der Freiheitsgrade: $(n+1)n - \binom{n+1}{2} = \frac{1}{2}(n+1)n$.

Technisch (Analysis III): die Gruppe ist eine *Lie-Gruppe*, also insbesondere eine *Mannigfaltigkeit* der Dimension $\binom{n}{2} + n = \binom{n+1}{2} = \frac{1}{2}n(n+1)$.

1.2.8 Anwendung von Kongruenztransformationen

Wenn wir “euklidische Geometrie” betreiben, dann interessieren uns Eigenschaften von Figuren, die sich unter Isometrien nicht ändern. Das sind insbesondere alle Eigenschaften, die sich aus Längen und Längenverhältnissen gewinnen lassen, darunter

- Volumen
- Winkel

Dementsprechend definieren wir Winkel in einem Dreieck einfach dadurch, dass wir (nach einer Isometrie) annehmen, dass die betreffende Ecke im Nullpunkt liegt, und die daran anliegenden Kanten eben Vektoren x, y sind.

Notation: Im Dreieck ABC bezeichnen wir den Winkel zwischen \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{AC} , also den “Winkel bei A ”, mit $\alpha := \sphericalangle BAC$.

Freiheitsgrade/Kongruenztransformationen ausnutzen!

Unter Verwendung von Kongruenztransformationen gelingt uns auch der vollständige Beweis von Satz 1.7:

Theorem 1.24. *Im \mathbb{R}^n gibt es $n+1$ Punkte, aber keine $n+2$ Punkte, die paarweise voneinander den Abstand 1 haben.*

Charakterisierung von Projektionen auf affinen Unterraum U durch $x \mapsto \bar{x} \in U$ mit

- $|x - \bar{x}|$ minimal
- $\langle x - \bar{x}, y - \bar{x} \rangle = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n, y \in U$.

Aufgabe. Projektionen: Charakterisierung von *linearen* Projektionen $x \mapsto Px$ durch $P^2 = P$, von *orthogonalen* Projektionen durch $P^t P = P$ (also insbesondere: die Matrix ist symmetrisch!).

- [1] Martin Aigner and Günter M. Ziegler. *Das BUCH der Beweise*. Springer-Verlag, Heidelberg Berlin, third edition, 2009.
- [2] V. G. Boltianskii. *Hilbert's Third Problem*. V. H. Winston & Sons (Halsted Press, John Wiley & Sons), Washington DC, 1978.
- [3] Gerd Fischer. *Lehrbuch der Algebra*. Vieweg, Wiesbaden, 2008.
- [4] János Pach and Pankaj K. Agarwal. *Combinatorial Geometry*. J. Wiley and Sons, New York, 1995.