

8 Möbiusgeometrie

17.+21. Juni 2013

Quelle/Referenz für dieses Kapitel: Springborn [2, Lectures 28/29]

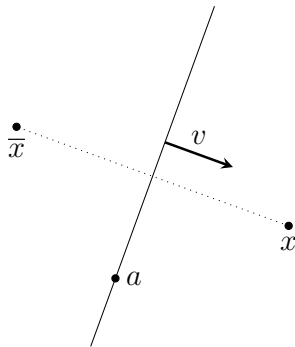
8.1 Spiegelung an einer Sphäre

Jede Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^n$ kann in der Form $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x - a, v \rangle = 0\}$ geschrieben werden, wobei $a \in H$ ist und $v \neq 0$ ein Normalenvektor ist.

Die Spiegelung an H ist gegeben durch

$$x \mapsto \bar{x} = x - 2 \frac{\langle x - a, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v.$$

Dabei liegt $\hat{x} =: x - \frac{\langle x - a, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v$ auf der Hyperebene, und es gilt $|x - \hat{x}| = |\bar{x} - \hat{x}|$.

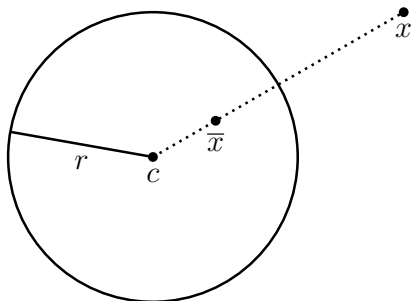


Sehr ähnlich definiert man die Spiegelung (oder ‘Inversion’) an einer Sphäre.

Definition 8.1 (Spiegelung an einer Sphäre). Sei $S(c, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x - c, x - c \rangle = r^2\}$ die Sphäre mit Mittelpunkt $c \in \mathbb{R}^n$ und Radius $r > 0$.

Die *Spiegelung* an $S(c, r)$ ist die Abbildung

$$s : x \mapsto \bar{x} = c + \frac{r^2}{\langle x - c, x - c \rangle} (x - c).$$



Wir notieren:

- \bar{x} liegt auf dem Strahl, der in c beginnt und durch x geht.
- Dabei gilt $|x - c| |\bar{x} - c| = r^2$.
- Die Punkte auf $S(c, r)$ werden auf sich selbst abgebildet.

- Die Abbildung ist eine Involution: $x \mapsto \bar{x} \mapsto \overline{\bar{x}} = x$.
- Die Abbildung ist für $x = c$ nicht definiert. Wir fügen einen *Punkt im Unendlichen* “ ∞ ” hinzu, und definieren dann die Abbildung als $c \mapsto \infty$ and $\infty \mapsto c$.
- Mit dieser Festsetzung ist die Spiegelung an der Sphäre $S(c, r)$ eine *Bijektion* $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$.

8.2 Möbiusgeometrie

Definition 8.2 (Möbiustransformationen, Möbiusgeometrie). Eine *Möbiustransformation* ist eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, die sich als Hintereinanderausführung von endlich vielen Spiegelungen in Hyperebenen und/oder Sphären darstellen lässt.

Ist eine Möbiustransformation die Hintereinanderausführung einer geraden Anzahl von Spiegelungen, so ist sie *orientierungserhaltend*, andernfalls ist sie *orientierungsumkehrend*.

Die Gruppe der Möbiustransformationen bezeichnen wir mit $\text{Möb}(n)$, die Untergruppe der orientierungserhaltenden Möbiustransformationen mit $\text{Möb}^+(n)$.

$$X = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}, \quad G := \text{Möb}(n).$$

In dieser Definition sind natürlich einige Behauptungen versteckt, etwa dass $\text{Möb}(n)$ wirklich eine Gruppe ist und $\text{Möb}^+(n)$ eine Untergruppe, und dass Orientierung wohldefiniert ist.

Lemma 8.3. *Ähnlichkeitsabbildungen sind Möbiustransformationen:*

$$\text{Ähnl}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \rtimes (\text{O}(n) \times \mathbb{R}_{>0}) \subseteq \text{Möb}(n).$$

Beweis. Jede orthogonale Abbildung in $\text{O}(n)$ ist eine Hintereinanderausführung von höchstens n Spiegelungen an Hyperebenen.

Translationen kann man durch Spiegelung an zwei parallelen Hyperebenen erzeugen.

Die Streckung $x \mapsto \lambda x$ erhält man durch Spiegelung an $S^{n-1} = S(0, 1)$, gefolgt von Spiegelung an $S(0, \sqrt{\lambda})$. \square

Hinweis: Mit “Sphären” bezeichnet man in der Möbiusgeometrie oft nicht nur die $(n - 1)$ -dimensionale Sphären $S(c, r) \subset \mathbb{R}^n$, sondern auch die Hyperebenen (interpretiert als “Sphären durch ∞ ”).

Theorem 8.4. *Möbiustransformationen bilden Hyperebenen und Sphären auf Hyperebenen und Sphären ab.*

Beweis. (1) Es reicht, das für die Spiegelung in der Einheits sphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ zu zeigen, weil jede Sphäreninversion in einer beliebigen Sphäre S dargestellt werden kann als

- Ähnlichkeitstransformation, die S auf $S(0, 1)$ abbildet,
- gefolgt von Inversion in $S(0, 1)$
- gefolgt von Umkehrung der Ähnlichkeitstransformation.

(2) Wir zeigen, dass

$$\{x \in \mathbb{R}^n : p|x|^2 - 2\langle x, v \rangle + q = 0\} \quad \text{für } |v|^2 - pq > 0$$

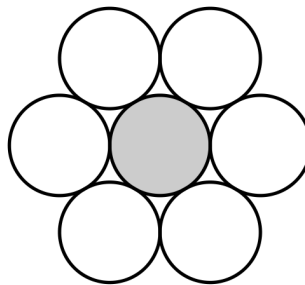
genau die Sphären (also $(n - 1)$ -Sphäre und Hyperebenen) im \mathbb{R}^n beschreibt. Für $p = 0$ folgt nämlich $v \neq 0$, und wir haben eine Hyperebenengleichung. Für $p \neq 0$ zeigt quadratische Ergänzung, dass dies eine Sphärengleichung ist.

(3) Rechnung: Für $\bar{x} := \frac{1}{|x|^2}x$ gilt

$$p|x|^2 - 2\langle x, v \rangle + q = 0 \quad \iff \quad q|\bar{x}|^2 - 2\langle \bar{x}, v \rangle + v = 0.$$

□

Aufgabe. Beschreiben Sie das Bild der folgenden Konfiguration



nach einer sphärischen Inversion

- in einem der abgebildeten Kreise,
- in einem Kreis mit Mittelpunkt in einem der Berührungspunkte.

Theorem 8.5 (Möbiustransformationen sind lokal winkelerhaltend (“konform”)). *Möbiustransformationen erhalten lokal die Winkel zwischen glatten Kurven (insbesondere: Geraden, Kreise) die sich schneiden.*

Beweis. Weil Ähnlichkeitsabbildungen offenbar konform sind, reicht es, dies für die Inversion in der Einheitssphäre $x \mapsto \frac{1}{|x|^2}x$ nachzuweisen.

Nun rechnet man das Differenzial dieser Abbildung (oder, wer mutiger ist, einer beliebigen Sphäreninversion $s : \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$) aus, also die Matrix $Ds = \left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j}\right)$, und zeigt, dass diese Matrix eine Ähnlichkeitsabbildung beschreibt, also Vielfaches einer orthogonalen Matrix ist. □

Bemerkung 8.6. (1) “winkelerhaltend” gilt auch bei ∞ , wenn man den Winkel im Unendlichen geeignet interpretiert. (Dazu betrachtet man Geraden durch den Mittelpunkt der Sphäre, in der invertiert wird.)

(2) Für $n > 2$ gilt auch die Umkehrung: eine konforme Abbildung ist eine Möbiustransformation. Auch schon lokal. Für $n = 2$ ist das global auch richtig, lokal aber völlig falsch: Riemann’scher Abbildungssatz. Trotzdem ist komplexe Interpretation wichtig, siehe nächster Abschnitt.

Umkehrung von Theorem 8.4:

Proposition 8.7. *Für $n > 1$ sind die bijektiven Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, die Hyperebenen und Sphären auf Hyperebenen und Sphären abbilden, genau die Möbiustransformationen.*

Beweis. Eine solche Abbildung bildet insbesondere auch Kreise und Geraden (die 1-dimensionalen Schnitte von Hyperebenen und Sphären) auf Kreise und Geraden ab.

(1) Im Fall $f(\infty) = \infty$ werden alle Geraden auf Geraden abgebildet. Also haben wir es nach Theorem 2.6 mit einer affinen Abbildung zu tun. Weiter dürfen wir (nach einer Translation) annehmen, dass die Abbildung 0 auf 0 abbildet. Also ist die Abbildung linear.

Wenn nun weiter die Einheitssphäre auf die Einheitssphäre abgebildet wird, dann ist die Abbildung eine Ähnlichkeitstransformation (nämlich ein Vielfaches einer orthogonalen Abbildung).

(2) Gilt $f(\infty) = c$, so sei g die Inversion in der Sphäre $S(c, 1)$. Weil die Sphäreninversion g Hyperebenen und Sphären auf Hyperebenen und Sphären abbildet, gilt dies auch für die Abbildung $g \circ f$. Die Abbildung $g \circ f$ bildet nach ∞ nach ∞ ab, ist also nach Fall (1) eine Möbiustransformation. Weil $g = g^{-1}$ als Sphäreninversion aber auch eine Möbiustransformation ist, gilt dies auch für f . \square

Bemerkung: für $n = 1$ ist das natürlich falsch.

Erweiterung von Lemma 8.3:

Korollar 8.8. *Ähnlichkeitstransformationen sind genau die Möbiustransformationen, die ∞ fixieren.*

Korollar 8.9. *Für die n -dimensionale Möbiusgeometrie ist die Anzahl der Freiheitsgrade, also die Dimension der Gruppe $\text{Möb}(n)$, gleich $\frac{1}{2}(n+2)(n+1) = \binom{n+2}{2}$.*

Beweis. n Freiheitsgrade für den Punkt, der durch Inversion g in einer Sphäre vom Radius 1 nach Unendlich abgebildet wird. $g \circ f$ ist dann eine Ähnlichkeitstransformation, und für die gibt es (wie schon diskutiert) $n+1 + \binom{n}{2}$ Freiheitsgrade, mit $\binom{n}{2} = \dim \text{O}(n)$. \square

Aufgabe. Beschreiben Sie die Möbiustransformationen, die die folgenden Folgen von Punkten aufeinander abbilden:

- (i) $(0, 0), (1, 0), (0, 1) \rightarrow (0, 0), (1, 0), (2, 0)$,
- (ii) $(0, 0), (1, 0), (0, 1) \rightarrow (0, 0), (1, 0), (-1, 0)$.

8.3 Komplex-projektive Interpretation der 2-dimensionalen Möbiusgeometrie

Im Fall $n = 2$ können wir den \mathbb{R}^2 mit der komplexen Zahlenebene identifizieren, $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ also mit $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Die Möbiustransformationen in der Ebene können wir alle als gebrochen-lineare komplexe oder konjugiert-komplexe Funktionen darstellen:

- orientierungserhaltende Ähnlichkeitstransformationen sind $z \mapsto az + b$ für $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$,
orientierungsumkehrende Ähnlichkeitstransformationen sind $z \mapsto a\bar{z} + b$ für $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$,
- Spiegelung an der x -Achse ist $z \mapsto \bar{z}$,
- Spiegelung im Einheitskreis ist $z \mapsto \frac{1}{|z|^2} z = \frac{1}{\bar{z}}$.

Proposition 8.10. Die orientierungserhaltenden Möbiustransformationen auf $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sind genau die Transformationen

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{für } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ mit } \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0,$$

die orientierungsumkehrenden Möbiustransformationen auf $\widehat{\mathbb{C}} =$ sind genau die Transformationen

$$z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \quad \text{für } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ mit } \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0.$$

Beweis.

(1) Die angegebenen gebrochen-linearen Transformationen bilden eine Gruppe: Die orientierungserhaltenden sind dabei genau die projektiven Transformationen von \mathbb{CP}^1 .

(2) Als Spezialfälle identifizieren wir alle oben angegebenen Erzeuger für die Möbiustransformationen in der Ebene; also ist die Gruppe $\text{Möb}(2)$ in der Gruppe der gebrochen-linearen komplexen Funktionen enthalten.

(3) Umgekehrt sieht man aus

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)}$$

für $c \neq 0$, dass jede gebrochen-lineare Funktion sich als Komposition der oben angegebenen Erzeuger schreiben lässt. Entsprechend gilt das, wenn wir z durch \bar{z} erzeugen. Daraus folgt auch die umgekehrte Inklusion: Jede gebrochen-lineare komplexe oder konjugiert-komplexe Funktion ist eine Möbiustransformation. \square

Insbesondere sehen wir also, dass $\text{Möb}^+(2) \cong \text{PGL}(2, \mathbb{C})$.

Aus der Identifikation der Möbiusgruppe der Ebene mit komplex-projektiven Transformationen können wir nun leicht mehrere wichtige Schlussfolgerungen ziehen

Korollar 8.11. (1) orientierungserhaltende Möbiustransformationen der Ebene erhalten das komplexe Doppelverhältnis

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)},$$

für vier beliebige komplexe Zahlen $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ von denen mindestens drei verschieden sind, orientierungsumkehrende Möbiustransformationen konjugieren das Doppelverhältnis.

(2) "6-Punkte-Formel": Sind z_1, z_2, z_3 und w_1, w_2, w_3 jeweils drei verschiedene Werte, so gibt es genau eine gebrochen-lineare Funktion $f \in \text{PGL}(2, \mathbb{C})$ mit $f(z_i) = f(w_i)$.

(3) Vier Punkte $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ liegen genau dann auf einem Kreis, wenn ihr Doppelverhältnis reell ist.

8.4 Stereographische Projektion als Möbiusabbildung

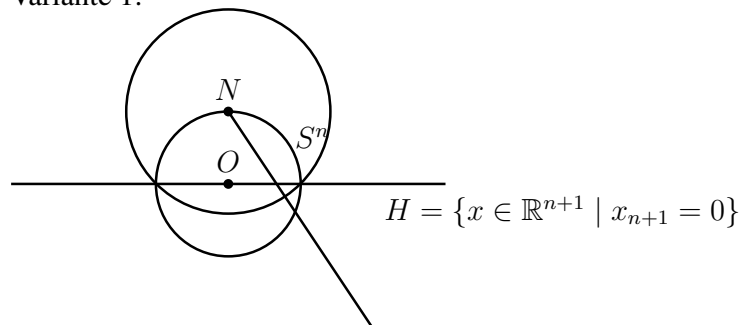
Definition 8.12 (Stereographische Projektion). Sei $S^n = S(0, 1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die Einheitskugel, und sei $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die durch $x_{n+1} = 0$ (Variante 1) bzw. $x_{n+1} = -1$ (Variante 2) gegebene Hyperebene, welche wir (durch Weglassen der konstanten letzten Koordinate, also 0 oder -1) mit \mathbb{R}^n identifizieren können.

Die *stereographische Projektion* ist die Abbildung

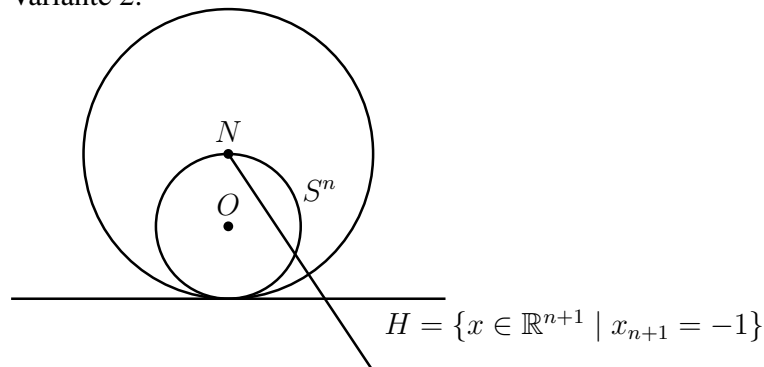
$$S^n \rightarrow H \cup \{\infty\},$$

die dadurch gegeben wird, dass der Nordpol $N \in S^n$ auf ∞ abgebildet wird, und jeder andere Punkt von $P \in S^n$ auf eindeutigen Schnittpunkt der Geraden PN mit der Hyperebene H .

Variante 1:



Variante 2:



Proposition 8.13. Die Stereographische Projektion ist die Einschränkung einer Möbiustransformation $\mathbb{R}^{n+1} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \cup \{\infty\}$, nämlich der Sphäreninversion in der Sphäre $S(N, \sqrt{2})$ in Variante 1 bzw. der Sphäre $S(N, 2)$ in Variante 2.

Beweis. Die Sphäreninversion bildet (in beiden Varianten) Geraden durch den Mittelpunkt N der Inversionssphäre auf Geraden durch N ab, andererseits die Sphäre S^n auf die Hyperebene $H \cup \{\infty\}$ ab — also den Schnittpunkt jeder Gerade mit $S \setminus \{N\}$ auf den Schnittpunkt derselben Geraden mit H . Daraus folgt schon alles. \square

Korollar 8.14. Die stereographische Projektion ist konform.

Korollar 8.15. $\text{Möb}(n)$ ($n > 1$) ist genau die Menge aller bijektiven Abbildungen $f : S^n \rightarrow S^n$, die Kreise auf Kreise abbilden. Genauso ist dies die Menge aller bijektiven Abbildungen, die $(n - 1)$ -dimensionale Teilsphären auf ebensolche abbilden.

Beweis. Mit Hilfe der (inversen) stereographischen Transformation können wir die n -dimensionale Möbiusgeometrie auch auf der n -dimensionalen Sphäre $X := S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ interpretieren.

Damit transportieren wir die Aussage, dass die Möbiustransformationen auf $X = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ genau die bijektiven Abbildungen sind, die Hyperebenen und Sphären auf Hyperebenen und Sphären abbilden — und genauso Kreise und Geraden auf Kreise und Geraden. \square

8.5 Lorentz-Geometrie

Definition 8.16. Für $p, q \geq 0$ mit $p + q = n + 1$ bezeichnet $\mathbb{R}^{p,q}$ den Vektorraum \mathbb{R}^{n+1} mit der Bilinearform

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \cdots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - \cdots - x_{p+q} y_{p+q},$$

die wir als *Skalarprodukt* bezeichnen.

Allgemeiner könnten wir mit einem endlich-dimensionalen reellen Vektorraum \mathbb{R}^m arbeiten, auf dem eine symmetrische Bilinearform gegeben ist, die nicht degeneriert (die also vollen Rang hat: nur der Nullvektor ergibt mit jedem anderen Vektor Null), die aber *nicht* notwendigerweise positiv definit ist.

In dieser Situation kann man den Algorithmus von Gram–Schmidt so anpassen, dass er doch eine “Orthogonalbasis” e_1, \dots, e_n liefert, für die

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{für } 1 \leq i = j \leq p, \\ -1 & \text{für } p < i = j \leq p + q, \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

gilt. Hier ist p die maximale Dimension eines Unterraums, auf dem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit ist, q die maximale Dimension eines Unterraums, auf dem das Skalarprodukt negativ definit ist. Insbesondere gilt $p + q = m$ (weil das Skalarprodukt nach Annahme nicht degeneriert ist), und die Kennzahlen p und q sind für alle Orthogonalbasen dieselben. Das Paar (p, q) heißt der *Index* des Vektorraums.

Mit $O(p, q)$ bezeichnet man die Gruppe aller orthogonalen Transformationen auf $\mathbb{R}^{p,q}$, die also das Skalarprodukt erhalten. Uns interessiert im Folgenden besonders der Spezialfall $q = 1$.

Definition 8.17 (Lorentz-Raum). Der Raum $\mathbb{R}^{n,1}$, also der Vektorraum \mathbb{R}^{n+1} mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n - x_{n+1} y_{n+1}$$

heißt ein *Lorentz-Vektorraum*.

Die *Lorentz-Gruppe* aller linearen Transformationen $T : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, die das Skalarprodukt erhalten, für die also $\langle Tv, Tw \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle v, w gilt, wird mit $O(n, 1)$ bezeichnet.

Lemma 8.18 (Koordinatendarstellung). Eine Matrix $A \in O(n, 1)$ ist dadurch charakterisiert, dass die Spalten eine Orthonormalbasis bezüglich des gegebenen Skalarprodukts bilden, dass also

$$A^t E A = E$$

gilt, wobei E die Diagonalmatrix

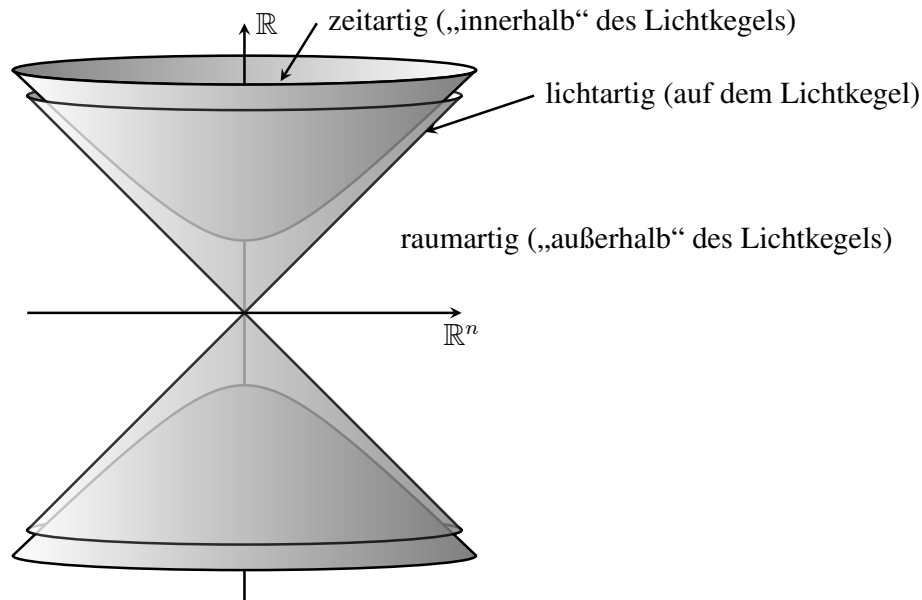
$$E = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0^t & -1 \end{pmatrix}$$

bezeichnet.

Definition 8.19 (Bezeichnungen aus der Relativitätstheorie). Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^{n,1}$ heißt

- raumartig, wenn $\langle x, x \rangle > 0$,
- lichtartig, wenn $\langle x, x \rangle = 0$,
- zeitartig, wenn $\langle x, x \rangle < 0$.

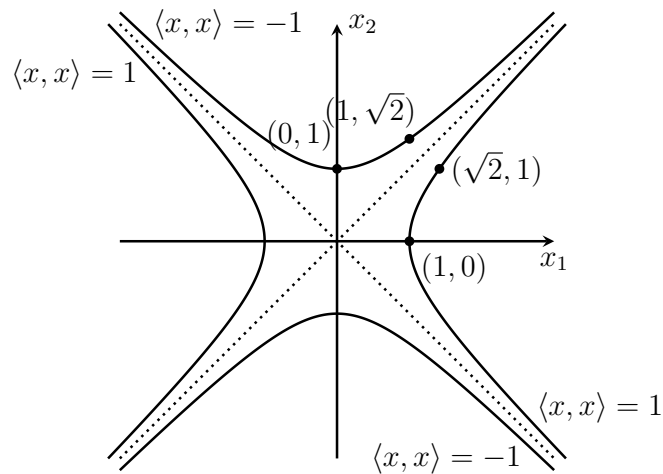
Der Doppelkegel der lichtartigen Vektoren heißt der *Lichtkegel*.



Beispiel 8.20. Im Lorentz-Raum $\mathbb{R}^{1,1}$ ist das Skalarprodukt durch $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2$ gegeben. Die Mengen $\{x \in \mathbb{R}^{1,1} : \langle x, x \rangle = 1\}$ und $\{x \in \mathbb{R}^{1,1} : \langle x, x \rangle = -1\}$ sind jeweils Hyperbeln.

Orthonormalbasen sind zum Beispiel $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Beachte: Orthonormalbasen müssen wir als geordnete Folgen von Vektoren schreiben, weil es auf die Reihenfolge ankommt.



Definition und Lemma 8.21. Die Menge der zeitartigen Vektoren der „Länge“ 1

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^{n,1} : \langle x, x \rangle = -1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

ist ein zweischaliges Hyperboloid. Dabei bezeichnet

$$H^n := \{x \in \mathbb{R}^{n,1} : \langle x, x \rangle = -1, x_{n+1} > 0\}$$

die obere Schale.

Jede orthogonale Transformation bildet die Vektoren in der oberen Schale H^n entweder auf die Vektoren der oberen Schale ab, oder auf die Vektoren der unteren Schale (d.h., er vertauscht die Schalen).

Die Untergruppe der orthogonalen Transformationen, die die obere Schale auf sich selbst abbilden, wird mit $O^+(n, 1)$ bezeichnet. Sie ist

$$O^+(n, 1) = \{A \in O(n, 1) : a_{n+1, n+1} > 0\}.$$

Die Bedingung $a_{n+1, n+1} > 0$ kann dabei so interpretiert werden, dass das Bild Ae_{n+1} des (zeitartigen) letzten Basisvektors e_{n+1} wieder zeitartig ist, also $e_{n+1}^t Ae_{n+1} > 0$ erfüllen muss.

8.6 Das reell-projektive Modell

Die Gruppe $O(n+1, 1)$ ist eine Menge von linearen Transformationen, die den Lichtkegel auf sich selbst abbildet.

Interpretieren wir die n -Sphäre nun eingebettet in den $\mathbb{R}^{n+1,1}$ mit

$$S^{(n)} \cong \{x \in \mathbb{R}^{n+1,1} : \langle x, x \rangle = 0, x_{n+2} = 1\},$$

so sehen wir, dass $O(n+1, 1)$ bijektive Abbildungen auf $S^{(n)}$ induziert, die Kreise auf Kreise abbildet – also Möbiustransformationen, nach Korollar 8.15.

Diese Gruppe kann man mit $PO(n+1, 1)$ identifizieren — $S^{(n)}$ wird dabei als der projektivierte Lichtkegel im $\mathbb{R}^{n+1,1}$ interpretiert. Genauso können wir aber die Gruppe mit $O^+(n+1, 1)$ identifizieren — dabei wird das als die Gruppe der Transformationen interpretiert, die den positiven Lichtkegel auf sich selbst abbilden, und der ist eben ein Kegel über der $S^{(n)}$.

Wir sehen also, dass $PO(n+1, 1) = O^+(n+1, 1) \subseteq \text{Möb}(n)$. Es gilt aber noch mehr.

Theorem 8.22 (Das reell-projektive Modell der Möbiusgeometrie). *Die n -dimensionale Möbiusgeometrie kann durch die Menge $X = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{RP}^{n+1}$ mit der Gruppe*

$$\mathrm{PO}(n+1, 1) = \mathrm{O}^+(n+1, 1) = \mathrm{Möb}(n)$$

dargestellt werden.

Beweis. Um dies zu beweisen, müssen wir nur noch zeigen, dass die Transformationen, die die Möbiusgruppe erzeugen, mittels der stereographischen Projektion auf die Sphäre S^n transportiert, durch projektive Abbildungen dargestellt werden können, die die Sphäre fest halten. \square

Die $(n-1)$ -dimensionalen Untersphären der S^n können hierbei mit Hyperebenen im \mathbb{RP}^{n+1} interpretiert werden, die S^n echt schneiden — und diese können wir mit ihren Normalenvektoren, also den raumartigen Punkten in \mathbb{RP}^{n+1} identifiziert werden, also mit den Punkten “außerhalb” der Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Man verifiziert dafür, dass “außerhalb” hier wohldefiniert ist ...

Korollar 8.23 (Darstellung von Möbiustransformationen durch Matrizen). *Möbiustransformationen können durch die $(n+2) \times (n+2)$ -Matrizen in $A \in \mathrm{O}^+(n+1, 1)$ dargestellt werden.*

8.7 Möbiustransformationen, Kreispackungen und Anwendungen

8.7.1 Kreispackungen und irrationale Zahlen

Definition 8.24 (Ford-Kreise). Zu jeder rationalen Zahl $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (gekürzter Bruch!) sei der *Ford-Kreis* $C(\frac{p}{q}) \subset \mathbb{R}^2$ der Kreis mit Mittelpunkt $(\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2})$ und Durchmesser $\frac{1}{q^2}$, der also die Zahlengerade $\mathbb{R} \times \{0\}$ im Punkt $(\frac{p}{q}, 0)$ berührt.

Lemma 8.25. *Zwei Fordkreise $C(\frac{p}{q})$ und $C(\frac{r}{q})$ berühren sich genau dann, wenn $|pQ - qP| = 1$, während die Kreise disjunkt sind, wenn $|pQ - qP| > 1$. Die Fordkreise schneiden sich also nicht!*

Die Ford-Kreise sind ein Thema der Kreisgeometrie, und die Kreispackung durch die (unendlich vielen) Ford-Kreise lässt sich mit Hilfe von Möbiustransformationen studieren. Insbesondere analysiert man die Kette der zu $C(\frac{p}{q})$ benachbarten Ford-Kreise am einfachsten mit einer Inversion an einem Kreis mit Mittelpunkt $(\frac{p}{q}, 0)$.

Lemma 8.26. *Sind Ford-Kreise $C(\frac{p}{q})$ und $C(\frac{r}{q})$ benachbar, also $|pQ - qP| = 1$, dann sind alle zu $C(\frac{p}{q})$ benachbarten Ford-Kreise durch $C(\frac{p+nq}{Q+nq})$ für $n \in \mathbb{Z}$ gegeben.*

Durch Betrachtung der Ford-Kreise beweist man sehr einfach und elegant unter anderem den Satz von Borel–Hurwitz:

Theorem 8.27 (Borel–Hurwitz). *Für jede irrationale Zahl $w \in \mathbb{R} \subset \mathbb{Q}$ gibt es unendlich viele Brüche $\frac{p}{q}$ so dass*

$$\left| w - \frac{p}{q} \right| < \frac{1/\sqrt{5}}{q^2}.$$

Wir verweisen auf den Aufsatz von Lester Ford aus dem Jahr 1938 [1].

8.7.2 Kreispackungen und der Riemann'sche Abbildungssatz

Ein berühmter Satz von Koebe, Andreev und Thurston besagt, dass sich jeder endliche ebene Graph durch eine Kreispackung darstellen lässt – und dass die Packung sogar eindeutig ist, wenn der Graph 3-fach zusammenhängend ist: eben so eindeutig wie möglich, also bis auf eine Möbiustransformation der Ebene!

Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich sogar der Riemann'sche Abbildungssatz aus der Funktionentheorie herleiten, und wir bekommen ein Kreispackungsmodell für konforme Abbildungen von Bereichen der Ebene.

Wir verweisen auf die Übersichtsarbeit [3] und die darin angegebene Literatur.

- [1] Lester R. Ford. Fractions. *American Math. Monthly*, 45:586–901, 1938.
- [2] Boris A. Springborn. Geometry I. Lecture Notes, TU Berlin/Berlin Mathematical School, 2007/08, 59 pp., ftp://ftp.math.tu-berlin.de/pub/Lehre/GeometryI/WS07/geometry1_ws07.pdf.
- [3] Günter M. Ziegler. Methoden der Kombinatorischen Geometrie “im Einsatz”. *Mathematische Semesterberichte*, 46:187–203, 1999.

9 Hyperbolische Geometrie

28. Juni 2013

9.1 Der n -dimensionale hyperbolische Raum

Definition 9.1 (Hyperbolische Geometrie). Die n -dimensionale hyperbolische Geometrie ist die Menge

$$H^n := \{x \in \mathbb{R}^{n,1} : \langle x, x \rangle = -1, x_{n+1} > 0\}$$

(also die obere Schale des zweischaligen Hyperboloids im zeitartigen Bereich der $(n + 1)$ -dimensionalen Lorentz-Raum) mit der *hyperbolischen Gruppe*

$$O^+(n, 1) = \{A \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} : A^t E A = E, a_{n+1, n+1} > 0\}$$

der orthogonalen Lorentz-Transformationen, die die Schale auf sich selbst abbilden.

Die *hyperbolischen Geraden* sind die nicht-leeren Schnitte von H^n mit zwei-dimensionalen linearen Untervektorräumen des $\mathbb{R}^{n,1}$.

Offensichtlich gibt es durch zwei verschiedene Punkte $x, y \in H^n$ immer genau eine Gerade.

Lemma 9.2. Jedes “Orthonormalsystem” (v_1, \dots, v_k) von Vektoren im Lorentzraum $\mathbb{R}^{n,1}$ (also eine Familie mit $\langle v_i, v_i \rangle = \pm 1$ für $i \leq k$ und $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ für $i \neq j$) lässt sich zu einer “Orthonormalbasis” ergänzen.

Diese besteht dann automatisch aus n “raumartigen” Basisvektoren mit $\langle v_i, v_i \rangle = 1$ und einem “zeitartigen” Vektor mit $\langle v, v \rangle = -1$.

Beweis. Dafür modifiziert man das Gram–Schmidt Verfahren geeignet. Wenn man es mit zwei Vektoren w, w' der Länge 0 zu tun hat, die aber einen Unterraum aufspannen, auf dem das Skalarprodukt indefinit ist, so ersetzt man sie durch $w + w'$ und $w - w'$.

Die zweite Aussage folgt aus dem Trägheitssatz: geometrisch ist das die Beobachtung, dass das Skalarprodukt nicht definit ist, aber auf einem Unterraum der Dimension n positiv definit und auf einem Unterraum der Dimension 1 negativ definit. \square

Theorem 9.3. Die hyperbolische Gruppe $O^+(n, 1)$ operiert transitiv auf dem H^n .

Jeder beliebige Punkt $p \in H$ lässt sich zu einer Orthonormalbasis (im Sinne von Lemma 9.2) (v_1, \dots, v_n, p) ergänzen. Die Vektoren v_1, \dots, v_n spannen dann den Tangentialraum zu H an der Stelle p auf.

Die Gruppe $O^+(n + 1)$ bildet einen beliebigen Punkt mit ONB für seinen Tangentialraum auf einen beliebigen anderen Punkt mit ONB für seinen Tangentialraum auf — und die entsprechende Transformation ist dadurch auch festgelegt.

Insgesamt gilt also

$$\dim O^+(n, 1) = n + (n - 1) + \dots + 1 = \frac{1}{2}n(n + 1).$$

Beweis. Die Transitivität der Gruppenaktion folgt direkt aus Lemma 9.2): Der Vektor p lässt sich zu Orthonormalbasis (v_1, \dots, v_n, p) ergänzen, und diese bildet eine Matrix, die eine lineare Abbildung beschreibt, die den letzten Basisvektor der Standardbasis auf p abbildet.

Man rechnet nach, dass der Tangentialraum an das Hyperboloid $H \subset \mathbb{R}^{n,1}$ im Punkt p durch

$$\begin{aligned} T_p H &= \{x \in \mathbb{R}^{n,1} : \langle x, p \rangle = -1\} \\ &= p + \{x \in \mathbb{R}^{n,1} : \langle x, p \rangle = 0\} \\ &= p + \text{span}\{v_1, \dots, v_n\} \\ &= p + \{p\}^\perp \end{aligned}$$

wobei das Lorentz-Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eingeschränkt auf das orthogonale Komplement $\{p\}^\perp = \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ positiv definit ist.

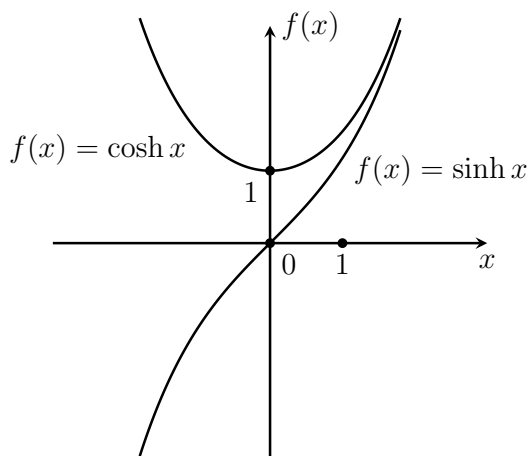
Die Hyperboloid-Schale H ist konvex, und es gilt $H \cap T_p H = \{p\}$: Dafür rechnet man nach, dass jeder Punkt $x \in H \cap T_p H$ erfüllt, dass $\langle x - p, x - p \rangle = 0$ und $x - p \in \{p\}^\perp$. \square

Insbesondere hat also die Gruppe $O^+(n, 1)$ der Transformationen des n -dimensionalen hyperbolischen Raums H^n dieselbe Dimension wie die Gruppen $O(n + 1)$ der Isometrien des sphärischen Raums S^n und wie die euklidische Gruppe $\text{Eukl}(n)$.

9.2 Der 1-dimensionale hyperbolische Raum

Bemerkung 9.4 (Kleine Formelsammlung). Im Folgenden brauchen wir den hyperbolischen Sinus und Kosinus

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



Offenbar gilt $\sinh -x = -\sinh x$, $\cosh -x = \cosh x$, $\cosh x \geq x$, $\sinh' x = \cosh x$, $\cosh' x = \sinh x$, und insbesondere

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

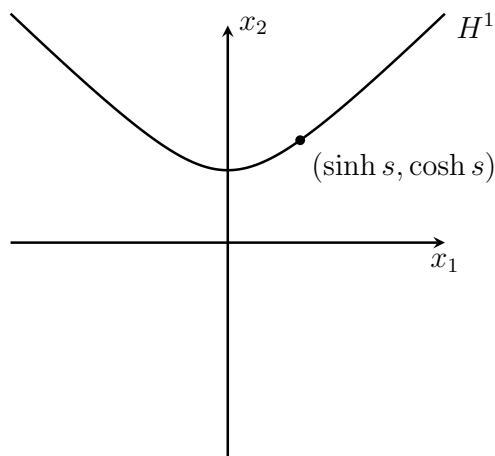
für alle $x \in \mathbb{R}$.

Die Umkehrfunktionen, Areasinus und Areakosinus, sind

$$\text{arsinh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \text{arcosh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

letzterer nur für $x \geq 1$.

Beispiel 9.5 (1-dimensionaler hyperbolischer Raum). Für $n = 1$ erhalten wir $H^1 \subset \mathbb{R}^{1,1}$ als Hyperbelast.



Dieser kann durch

$$\gamma(s) := \begin{pmatrix} \sinh s \\ \cosh s \end{pmatrix}$$

parametrisiert werden — und dies ist die Parametrisierung mit “Geschwindigkeit 1”, also nach Bogenlänge:

$$\gamma'(s) = \begin{pmatrix} \cosh s \\ \sinh s \end{pmatrix} \quad \text{mit } \langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = 1.$$

Damit berechnen wir Abstände als

$$\text{length}(\gamma(s)|_{[s_1, s_2]}) = \left| \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle} \right| = |s_2 - s_1|.$$

Wir berechnen das Skalarprodukt von zwei Punkten $x = \gamma(s_1)$ und $y = \gamma(s_2)$ auf H^1 als

$$\langle x, y \rangle = \langle \gamma(s_1), \gamma(s_2) \rangle = \sinh s_1 \sinh s_2 - \cosh s_1 \cosh s_2 = -\cosh(s_2 - s_1).$$

Damit ist eine Metrik $d(x, y) \geq 0$ auf der 1-dimensionalen hyperbolischen Geometrie durch das Lorentz-Skalarprodukt gegeben, als

$$-\cosh d(x, y) = \langle x, y \rangle.$$

Insbesondere gilt für diese Metrik

$$d(x, y) + d(y, z) = d(x, z),$$

wenn x, y, z in dieser Reihenfolge (!) auf H^1 liegen.

Lemma 9.6 (Hyperbolische Drehmatrizen).

$$O^+(1, 1) = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh s & \sinh s \\ \sinh s & \cosh s \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} -\cosh s & \sinh s \\ -\sinh s & \cosh s \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die erste der beiden Teilmengen von Matrizen ist die Untergruppe der Matrizen der Determinante +1, also $SO^+(1, 1)$.

Die hyperbolischen Drehmatrizen beschreiben genau die linearen Abbildungen des $\mathbb{R}^{n,1}$, die H^1 auf sich selbst abbilden.

Motiviert durch den 1-dimensionalen Fall definieren wir die (nicht-negative) Metrik mit Hilfe des (nicht positiv-definiten!) Skalarprodukts auf dem $H^{n,1}$ wie folgt.

Definition 9.7 (Metrik). Auf H^n definieren wir $d(x, y) \geq 0$ durch

$$\cosh d(x, y) = -\langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle|,$$

also als

$$d(x, y) = \operatorname{arcosh}(-\langle x, y \rangle) = \cosh^{-1} |\langle x, y \rangle|.$$

Theorem 9.8. Die durch Definition 9.7 definierte Funktion $d(\cdot, \cdot)$ definiert eine Metrik auf H^n . Diese ist invariant unter der hyperbolische Gruppe $O^+(n, 1)$.

Beweis. Die Funktion d ist offenbar nicht-negativ und symmetrisch. Sie ist nach Konstruktion invariant unter der Gruppe (weil die Gruppe das Skalarprodukt erhält).

Man muss nachweisen, dass sie die Dreiecksungleichung erfüllt, dass also

$$d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$$

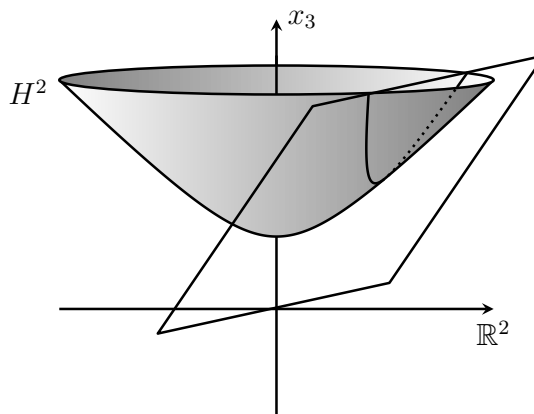
gilt für $A, B, C \in H^n$. (Nur weil die Funktion nichtnegativ ist, könnten sich doch Umwege von einer Geraden weg "lohnen".) Um dies nachzurechnen, dürfen wir nach einer hyperbolischen Transformation annehmen, dass $B = e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$. Weiter dürfen wir annehmen dass $A = (\sinh a, 0, \dots, 0, \cosh a)$, mit $a \geq 0$. Nun gilt Gleichheit, wenn $C = (-\sinh c, 0, \dots, 0, \cosh c)$ mit $c < 0$. Jetzt rotieren wir C in die richtige Lage, und beobachten, dass das Skalarprodukt $\langle A, C \rangle$ sich dabei in die richtige Richtung bewegt.

Quellenangabe: Siehe Ivanov [1]. □

Auf dieser Basis kann man dann auch leicht sehen, dass der kürzeste (stückweise-differenzierbare) Weg zwischen zwei Punkten (Länge gemessen mit der Metrik) in H^n auf der Geraden durch die beiden Punkte liegt.

9.3 Der 2-dimensionale hyperbolische Raum

Beispiel 9.9 (2-dimensionaler hyperbolischer Raum). Für $n = 2$ erhalten wir $H^2 \subset \mathbb{R}^{2,1}$ als obere Schale des zweischaligen Hyperboloids.



Jede Gerade $\ell \subset H^2$ lässt sich darstellen als $\ell = H^2 \cap U$ für $U = \{x \in \mathbb{R}^{2,1} : \langle x, n \rangle = 0\}$ mit $n \in \mathbb{R}^{2,1}$ raumartig und normiert, $\langle n, n \rangle = 1$.

Proposition 9.10. Seien $n_1 \neq \pm n_2$ raumartig, $\langle n_i, n_i \rangle = 1$, sowie ℓ_1, ℓ_2 die zugehörigen Geraden. Dann sind äquivalent:

- (i) $\ell_1 \cap \ell_2 \neq \emptyset$,
- (ii) Das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eingeschränkt auf $\text{spann}\{n_1, n_2\}$ ist positiv definit,
- (iii) $|\langle n_1, n_2 \rangle| < 1$.

Beweis. (i) \Rightarrow (ii): Für den Schnittpunkt x gilt $\{x\}^\perp = \text{spann}\{n_1, n_2\}$. Alle Vektoren, die auf x senkrecht stehen, sind raumartig.

(ii) \Rightarrow (i): $\text{spann}\{n_1, n_2\}^\perp$ ist eindimensional, und wird von einem zeitartigen Vektor aufgespannt.

(ii) \Leftrightarrow (iii): Wir stellen das Skalarprodukt eingeschränkt auf $\text{spann}\{n_1, n_2\}^\perp$ durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} \langle n_1, n_1 \rangle & \langle n_1, n_2 \rangle \\ \langle n_2, n_1 \rangle & \langle n_2, n_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \langle n_1, n_2 \rangle \\ \langle n_2, n_1 \rangle & 1 \end{pmatrix}$$

dar. Das Skalarprodukt ist positiv definit, wenn die Matrix positiv definit ist, und dafür muss die Determinante positiv sein, also $1 - \langle n_1, n_2 \rangle^2 > 0$. \square

5. Juli 2013

Definition 9.11 (Winkel). Seien ℓ_1, ℓ_2 zwei sich schneidende Geraden in der hyperbolischen Ebene H^2 , und seien $h_i := \{y \in H^1 : \langle y, n_i \rangle \geq 0\}$ die Halbebenen, die durch ℓ_1, ℓ_2 gegeben sind, mit Einheitsnormalenvektoren n_1, n_2 .

Den Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$ zwischen ℓ_1 und ℓ_2 definieren wir dann durch

$$\cos \alpha = \langle n_1, n_2 \rangle;$$

und durch die Festlegung, dass $\alpha < \pi$ falls die Determinante $\det(n_1, n_2, x)$ positiv ist, und $\alpha > \pi$ falls diese Determinante negativ ist.

Proposition 9.12. In der Situation von Definition 9.11 gibt es eine eindeutige hyperbolische Rotation, gegeben durch eine Matrix/Transformation $T \in \text{SO}^+(2, 1)$, um den Schnittpunkt $\{x\} = \ell_1 \cap \ell_2$, die h_1 in h_2 überführt und x fest lässt.

Beweis. Nach Konstruktion steht x senkrecht auf n_1 und n_2 . Verwendet wird die Drehung um die von x aufgespannte Achse, die n_1 in n_2 überführt. Dabei ist der Winkel zwischen n_1 und n_2 genau der Winkel zwischen den 2-dimensionalen Unterräumen des $\mathbb{R}^{2,1}$, die ℓ_1 und ℓ_2 enthalten, und das ist nach Definition der Winkel zwischen ℓ_1 und ℓ_2 . \square

Beispiel 9.13 (Hyperbolische Dreiecke). Seien $A, B, C \in H^2$ nicht kollinear (also als Vektoren im $\mathbb{R}^{2,1}$ linear unabhängig). Dann bestimmen sie drei unterschiedliche Geraden, die ein hyperbolisches Dreieck $\triangle ABC \subset H^2$ begrenzen.

Seien $A', B', C' \in \mathbb{R}^{2,1}$ die zugehörigen normierten raumartigen Normalenvektoren, die also nicht in H^2 liegen, mit $\langle A, A' \rangle > 0$, usw. Seien $h_{A'}, h_{B'}, h_{C'}$ die zugehörigen Halbräume, mit $h_{A'} = \{y \in H^2 : \langle y, A' \rangle \geq 0\}$, usw.

Dann gilt

$$\triangle ABC = h_{A'} \cap h_{B'} \cap h_{C'}.$$

Die Kantenlängen im Dreieck sind gegeben durch

$$- \cosh a = \langle B, C \rangle \quad \text{usw.}$$

und die Winkel durch

$$- \cos \alpha = \langle B', C' \rangle \quad \text{usw.}$$

(Achtung: hier steht ein echter Kosinus, kein cosh!)

Theorem 9.14 (Kosinussatz). *Im hyperbolischen Dreieck mit Kantenlängen a, b, c und Außenwinkeln $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$ gilt der Seitenkosinussatz*

$$\cos \alpha = \frac{-\cosh a + \cosh b \cosh c}{\sinh b \sinh c}$$

und der Winkelkosinussatz

$$\cosh a = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}.$$

und entsprechend für $\cos \beta$ und $\cos \gamma$ bzw. $\cosh b$ und $\cosh c$ bei gleichzeitiger Permutation von $a \rightarrow b \rightarrow c$ und $\hat{\alpha} \rightarrow \hat{\beta} \rightarrow \hat{\gamma}$.

Beweis. Analog zum sphärischen Fall, Theorem 7.10! (Wir hatten dort zwei verschiedene Beweismethoden angegeben.) □

Theorem 9.15 (Dreiecksungleichungen hyperbolisch). *Ein hyperbolisches Dreieck mit Kantenlängen $a, b, c > 0$ existiert dann und nur dann, wenn die Dreiecksungleichungen gelten (also $a < b + c$ etc.).*

Ein hyperbolisches Dreieck mit Innenwinkeln $\alpha, \beta, \gamma > 0$ existiert dann und nur dann, wenn $\alpha + \beta + \gamma < \pi$.

Skizze. (1) Zunächst zeigen wir, dass die Gram-Matrix $G = V^t E V$ für $V = (A B C)$ von A, B, C , die ja linear unabhängig sind, Signatur $(2, 1)$ hat — in anderen Worten, die zugehörige quadratische Form $x^t G x$ hat diese Signatur.

(2) Dann berechnen wir die Gram-Matrix explizit, als

$$G = \begin{pmatrix} -1 & -\cosh c & -\cosh b \\ -\cosh c & -1 & -\cosh a \\ -\cosh b & -\cosh a & -1 \end{pmatrix}$$

und verwenden das Kriterium, dass sich die Signatur aus den Hauptminoren ablesen lässt: Die Dimension des negativ-definiten Teils ist die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge $G_0 := 1, G_1 := g_{11} = -1, G_2 = 1 - \cosh^2 c = -\sinh c < 0$. Also hat G genau dann die Signatur $(2, 1)$, wenn die Determinante $\det G < 0$ ist.

(3) Explizite Berechnung der Determinante und Halbwinkelformeln ergeben

$$\det G = -4 \sinh \frac{-a+b+c}{2} \sinh \frac{a-b+c}{2} \sinh \frac{a+b-c}{2} \sinh \frac{a+b+c}{2}$$

und man überlegt sich, dass diese Determinante genau dann negativ ist, wenn die drei Dreiecksungleichungen gelten.

(Hinweis: Es kann von den drei Dreiecksungleichungen nicht mehr als eine falsch sein, weil aus $a > b + c$ und $b > a + c$ folgt $0 > 2c$.)

(4) Und dann ganz analog für G' , wobei die Rechnung ergibt

$$\det G' = -4 \cos \frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2} \cos \frac{\alpha-\beta+\gamma}{2} \cos \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} \cos \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}.$$

Und dann muss man, für den Beweis der Rückrichtung, die entsprechenden Dreiecke konstruieren. Die kann man aber auch direkt aus der Gram-Matrix gewinnen. \square

8. Juli 2013

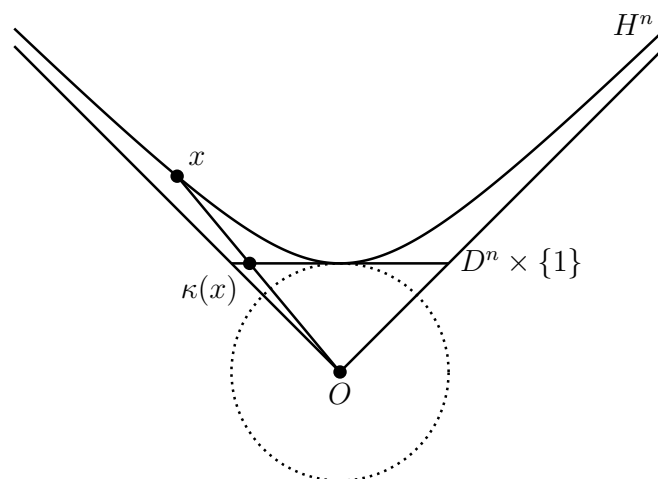
9.4 Die Modelle von Klein und Poincaré

Bezeichne im Folgenden $D^n := \{u \in \mathbb{R}^n : |u| < 1\}$ den offenen Einheitsball im \mathbb{R}^n , also das Innere des abgeschlossenen Einheitsballs B^n . Insbesondere ist also D^2 eine offene Kreisscheibe.

Definition 9.16 (Das Kreisscheibenmodell von Klein). Die bijektive Abbildung

$$\kappa : H^2 \longrightarrow D^2 \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_3} \\ \frac{x_2}{x_3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

überträgt die 2-dimensionale hyperbolische Geometrie auf die offene Kreisscheibe D^2 . Dies ergibt das *Klein'sche Kreisscheibenmodell* für die 2-dimensionale hyperbolische Geometrie. Die Geraden sind darin als die nicht-leeren Schnitte von D^2 mit affinen Geraden des \mathbb{R}^2 gegeben.



Die Gruppenaktion der $O^+(2, 1)$ sowie Winkel und Abstände werden durch κ auf das Modell übertragen, können/müssen also mit Hilfe der Umkehrabbildung

$$\kappa^{-1} : D^2 \longrightarrow H^2 \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{1 - u_1^2 - u_2^2} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

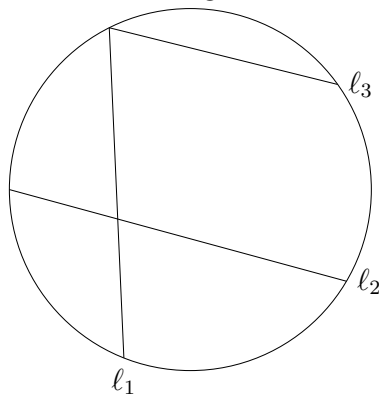
übertragen, zum Beispiel durch $d(u, u') := d(\kappa^{-1}(u), \kappa^{-1}(u'))$.

Definition 9.17 (parallel, ultraparallel). Zwei Geraden ℓ_1, ℓ_2 schneiden sich, wenn die Normalenvektoren $|\langle n_1, n_2 \rangle| < 1$ erfüllen.

Sie heißen *parallel*, wenn $|\langle n_1, n_2 \rangle| = 1$ gilt, was einem ‘‘Schnittpunkt im Unendlichen’’ (also auf dem Rand des Kleinschen Kreisscheibenmodells) entspricht. In diesem Fall schneiden sich die zugehörigen 2-dimensionalen Unterräume $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^{2,1}$ im Lichtkegel.

Sie heißen *ultraparallel*, wenn $|\langle n_1, n_2 \rangle| > 1$ gilt, was einem ‘‘Schnittpunkt jenseits des Unendlichen’’ (also außerhalb des Kleinschen Kreisscheibenmodells) entspricht. In diesem Fall schneiden sich die zugehörigen 2-dimensionalen Unterräume $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^{2,1}$ in einem raumartigen Untervektorraum.

In der Zeichnung schneiden sich ℓ_1 und ℓ_2 , ℓ_2 und ℓ_3 sind parallel, ℓ_1 und ℓ_3 sind ultraparallel,



Proposition 9.18. Ist $\ell \subset H^2$ eine Gerade und $x \notin \ell$, so gibt es zwei verschiedene Geraden und unendlich viele ultraparallele Geraden zu ℓ durch x .

Das Klein-Modell für den hyperbolischen Raum ‘‘funktioniert’’ ganz genauso in höheren Dimensionen: Die bijektive Abbildung

$$\kappa : H^n \longrightarrow D^n \quad \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{x_{n+1}}x$$

überträgt die n -dimensionale hyperbolische Geometrie auf den offenen Ball D^n ; die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$\kappa^{-1} : D^n \longrightarrow H^n \quad u \longmapsto \frac{1}{1-|u|^2} \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das Klein-Modell hat die besondere Eigenschaft, dass die Geraden des Modells genau die Geraden des \mathbb{R}^n sind (die den offenen Ball D^n schneiden). Weiter kann man das Modell mit dem Inneren der Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{RP}^{n+1}$ identifizieren, und daran sehen, dass die Geometrie auf dem Rand des Klein-Modells genau wieder die Möbiusgeometrie $\text{Möb}(n)$ ist.

Das Klein-Modell ist aber nur eines von mehreren Modellen für die n -dimensionale hyperbolische Geometrie, die alle ihre interessanten Aspekte haben, und daher ein intensiveres Studium wert wären. Wir geben hier aus Zeitmangel nur noch ein solches Modell an.

Definition 9.19 (Das Kreisscheibenmodell von Poincaré). Die bijektive Abbildung

$$\pi : H^2 \longrightarrow D^2 \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{x_3+1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

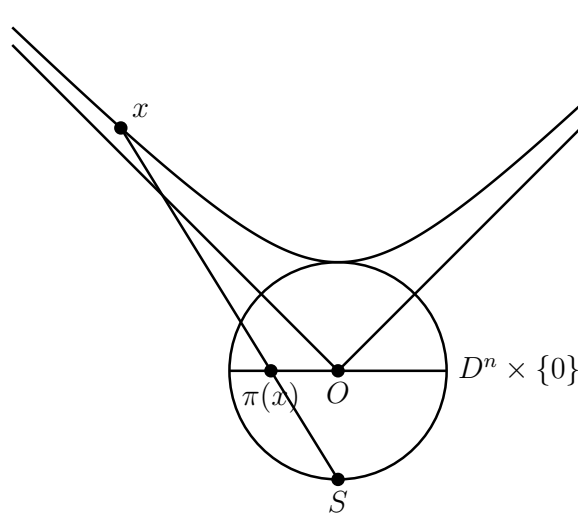
überträgt die 2-dimensionale hyperbolische Geometrie auf die offenen Kreisscheibe D^2 . Dies ergibt das *Poincaré'sche Kreisscheibenmodell* für die 2-dimensionale hyperbolische Geometrie. Die Geraden sind darin als die Schnitte von D^2 mit Kreisen gegeben, die den Rand $S^1 = \partial D^2$ der Kreisscheibe senkrecht schneiden.

Die Gruppenaktion der $O^+(2, 1)$ sowie Winkel und Abstände werden durch π auf das Modell übertragen, können/müssen also mit Hilfe der Umkehrabbildung

$$\pi^{-1} : D^2 \longrightarrow H^2 \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{1-u_1^2-u_2^2} \begin{pmatrix} 2u_1 \\ 2u_2 \\ 1+u_1^2+u_2^2 \end{pmatrix}$$

übertragen, zum Beispiel durch $d(u, u') := d(\pi^{-1}(u), \pi^{-1}(u'))$.

Auch das Poincaré-Modell kann analog für den n -dimensionalen Fall konstruiert werden:



Theorem 9.20 (Geraden und Unterräume des Poincaré-Modells). Die stereographische Projektion $\pi : H^n \rightarrow D^n \subset \mathbb{R}^n$ bildet Schnitte von H^n mit linearen Unterräumen des \mathbb{R}^{n+1} auf Schnitte von D^n mit Sphären und mit linearen Unterräumen ab, die senkrecht auf dem Rand $S^{n-1} = \partial D^n$ des Modells stehen. (Die linearen Unterräume gehen also durch den Mittelpunkt von D^n .)

Theorem 9.21 (Das Poincaré-Modell ist konform). Das Poincaré-Modell ist konform: Winkel sind euklidische Winkel!

Die Metrik ist im Poincaré-Modell zum Beispiel dadurch gegeben, dass

$$d(0, y) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+|y|}{1-|y|}.$$

Proposition 9.22 (ideale Dreiecke). *Alle “idealen” Dreiecke in H^2 (also Dreiecke, deren Seiten parallel sind, und deren Ecken auf dem Rand des Modells “im Unendlichen” liegen, sind kongruent. Sie haben alle die Fläche π .*

Proposition 9.23 (hyperbolische Dreiecksfläche). *Die Fläche eines hyperbolischen Dreiecks mit den Winkeln α, β, γ ist*

$$A(\triangle ABC) = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

Alle endlichen hyperbolischen Dreiecke haben also eine Fläche, die kleiner als π ist.

Man überlege sich dazu, dass beim Zerschneiden eines Dreiecks in zwei Dreiecke (mit einem Schnitt durch einen Eckpunkt) sich die Größe $\pi - \alpha - \beta - \gamma$ additiv verhält.

Man überlegt sich genauso, dass in der hyperbolischen Ebene regelmäßige n -Ecke beliebig kleine Winkel haben — im Grenzfall von “idealen” regelmäßigen n -Ecken sind die Winkel gleich 0. Andererseits sind die Winkel immer *kleiner* als die Winkel von regelmäßigen euklidischen n -Ecken. Zum Beispiel hat ein regelmäßiges euklidisches Fünfeck Winkel gleich $3\pi/5 = 108^\circ$, regelmäßige hyperbolische Fünfecke haben beliebige Winkel im offenen Intervall $(0^\circ, 108^\circ)$.

Genauso existieren hyperbolische Dreiecke mit beliebigen Winkeln $0 < \alpha, \beta, \gamma$ für $\alpha + \beta + \gamma < \pi$. Experimentiert man nun mit Spiegelungen an den Kanten von solchen Dreiecken, so ergibt dies für besondere Winkeln Pflasterungen der hyperbolischen Ebene mit Dreiecken, regelmäßigen n -Ecken, usw.: wie man sie zum Beispiel aus Graphiken von Maurits Cornelis Escher² kennen kann.

Quelle/Referenz für dieses Kapitel: Springborn [2, Lectures 7–11]

- [1] Sergei Ivanov. Nice proof of the triangle inequality for the metric of the hyperbolic plane. Answer on Math Overflow, April 16, 2013, <http://mathoverflow.net/questions/21604/nice-proof-of-the-triangle-inequality-for-the-metric-of-the-hyperbolic-plane>
- [2] Boris A. Springborn. Geometry I. Lecture Notes, TU Berlin/Berlin Mathematical School, 2007/08, 59 pp., ftp://ftp.math.tu-berlin.de/pub/Lehre/GeometryI/WS07/geometry1_ws07.pdf.

²Holländischer Graphiker, 1898–1972, http://en.wikipedia.org/wiki/M._C._Escher