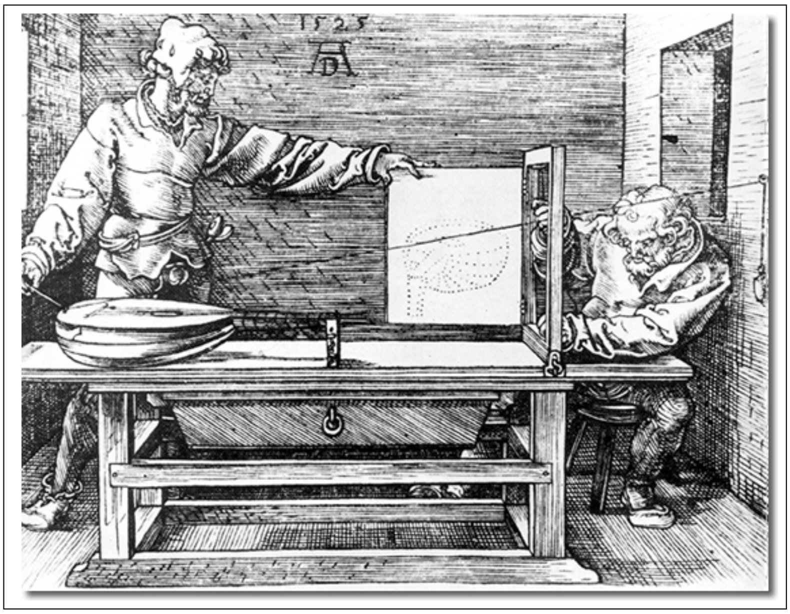
Übungsaufgaben zur Vorlesung *Geometrie*

Dr. Ivan Izmestiev, Moritz Firsching

Sommersemester 2014

Blatt 1 Abgabe: Freitag, 25.IV.2014



Albrecht Dürer, aus „Underweysung der Messung, mit dem Zirckel und Richtscheyt, in Linien, Ebenen unnd gantzen corporen“, 1525

Aufgabe 1 (Über Treue und Freiheit)

Es sei $\phi \colon G \to S_X$ eine Gruppenwirkung.

a) Man zeige, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:
   i) ϕ ist injektiv.
   ii) $\ker \phi = \{e\} \subset S_X$.
   iii) $\phi \colon G \to \operatorname{im} \phi$ ist ein Isomorphismus.
   iv) Wenn $\phi(g)(x) = x$ für alle $x \in X$, dann folgt $g = e$.

   Eine Gruppenwirkung, die eine (und damit alle) dieser Bedingungen erfüllt heißt treu.

b) Man zeige, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:
   i) Für alle $x \in X$ und alle $g \in G$ mit $g \neq e$ gilt $\phi(g)(x) \neq x$.
   ii) Für alle $x \in X$ gilt: $\{g \mid \phi(g)(x) = x\} = \{e\}$.
   iii) Wenn $\phi(g)x = x$ für ein $x \in X$, dann folgt $g = e$.

   Eine Gruppenwirkung, die eine (und damit alle) dieser Bedingungen erfüllt heißt frei.

c) Beweise oder widerlege: Wenn ϕ frei ist, so ist ϕ auch treu.

d) Beweise oder widerlege: Wenn ϕ treu ist, so ist ϕ auch frei.

Aufgabe 2 (Streckscherungen)

Man betrachte in $GL_2(\mathbb{R})$ die Menge aller Matrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ mit } a \neq 0,$$

und zeige, dass sie eine Gruppe G bilden. Ist diese Gruppe abelsch? Man gebe zwei abelsche Untergruppen an. Man folgere daraus, dass es auf $G' = \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}$ eine Gruppenstruktur gibt, nämlich

$$(a, b) * (a', b') := (aa', ab' + b),$$

die nicht isomorph zur Produktgruppe $\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 3 (Wirkungen von Untergruppen der Permutationsgruppen.)

Jede Untergruppe der endlichen Permutationsgruppe S_n wirkt auf natürlicher Weise auf der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$. In folgenden Beispielen betrachten wir jeweils die Gruppe $G = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, wobei das Element a in der Zykelschreibweise angegeben wird. Sind die entsprechenden Wirkungen frei? Transitiv?

1. $n = 5$, $a = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$
2. $n = 5$, $a = (1\ 2\ 3)(4\ 5)$
3. $n = 6$, $a = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)$

Aufgabe 4 (Erzeugte Wirkungen)

Sei ϕ eine Wirkung von G auf X. Zeige, dass ϕ eine Wirkung $\phi \times \phi$ von G auf dem kartesischen Produkt $X \times X$, sowie eine Wirkung $\phi^{(2)}$ von G auf der Menge der zweielementigen Teilmengen von X erzeugt. Welche der folgenden Behauptungen sind richtig?

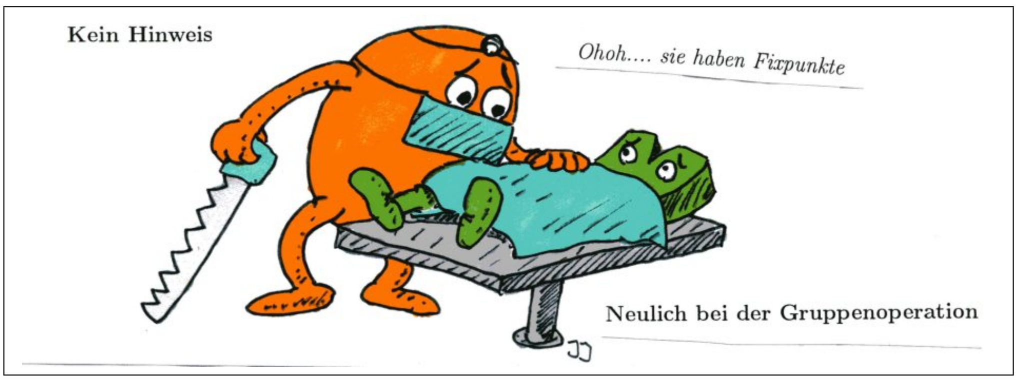
a) Wenn ϕ transitiv ist, dann ist auch $\phi \times \phi$ transitiv.

b) Wenn ϕ frei ist, dann ist auch $\phi \times \phi$ frei.

*c) Wenn $\phi^{(2)}$ transitiv ist, dann ist ϕ transitiv. (Ändert sich die Antwort, wenn man $|X| > 2$ voraussetzt?)

***Aufgabe 5** (Transpositionen erzeugen S_n)

Man zeige, dass jede Permutation $g \in S_n$ als Produkt von höchstens $n - 1$ Transposition dargestellt werden kann.



Jens Jordan, http://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/~jordan/Kram2/Gruppenoperation.html