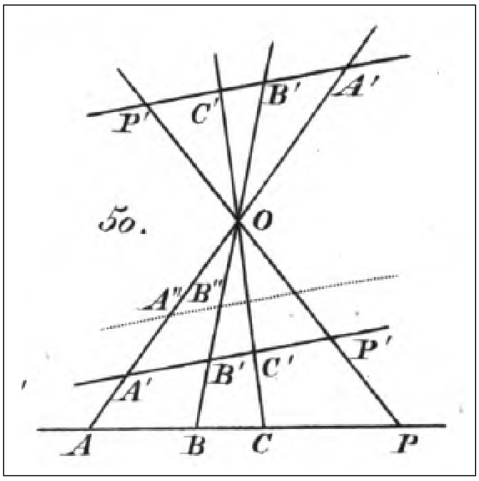
Übungsaufgaben zur Vorlesung *Geometrie*

Dr. Ivan Izmestiev, Moritz Firsching

Sommersemester 2014

Blatt 10 Abgabe: Freitag, 27.VI.2014



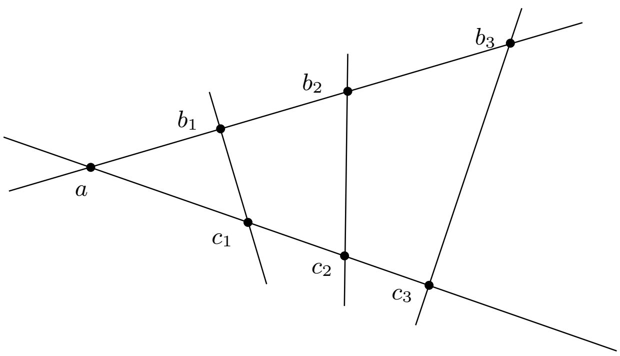
Zeichnung aus dem “Barycentrischen Calcul” von Möbius.

Aufgabe 48 (Doppelverhältnis und Zentralprojektion)

Auf zwei Geraden $\ell, m \subset \mathbb{R}P^2$ mit dem Schnittpunkt a seien zwei Punktetripel $b_1, b_2, b_3 \in \ell$ und $c_1, c_2, c_3 \in m$ so gewählt, dass

$$\mathrm{DV}(a, b_1; b_2, b_3) = \mathrm{DV}(a, c_1; c_2, c_3)$$

Man zeige, dass die Geraden b_1c_1, b_2c_2 und b_3c_3 konkurrent sind.



Aufgabe 49 (Formel der Doppelverhältnis)

a) Man zeige, dass jede gebrochene lineare Transformation $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ als Komposition von Abbildungen der Form $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto sx$, $x \mapsto x+t$ dargestellt werden kann.

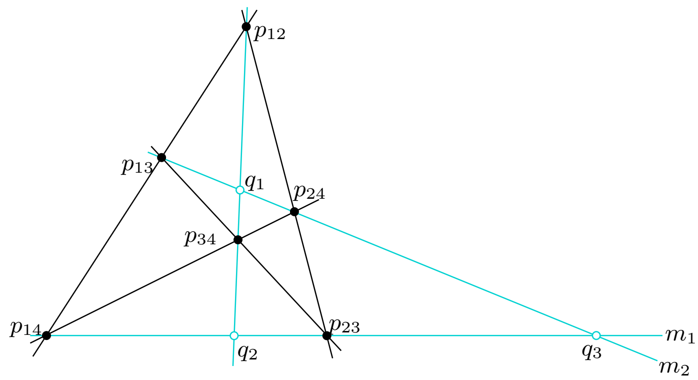
Folgere daraus, dass gebrochene lineare Transformationen das Doppelverhältnis erhalten.

b) Seien p_1, p_2, q_1, q_2, q_3 fünf verschiedene kollineare Punkte. Man beweise die folgende Identität:

$$\mathrm{DV}(p_1, p_2; q_1, q_2) \cdot \mathrm{DV}(p_1, p_2; q_2, q_3) \cdot \mathrm{DV}(p_1, p_2; q_3, q_1) = 1$$

Aufgabe 50 (Das vollständige Vierseit)

a) Beweise den Satz vom vollständigen Vierseit $\mathrm{DV}(p_{14}, p_{23}; q_2, q_3) = -1$ durch das Schicken von q_3 auf die unendlich ferne Gerade.



b) Gegeben sind drei Punkte A, B, C auf einer Geraden ℓ, sodass B der Mittelpunkt von AC ist. Konstruiere mit Hilfe eines Lineals die zu ℓ parallele Gerade durch einen gegebenen Punkt P außerhalb ℓ.

Aufgabe 51 (Harmonische Punktepaare und konjugierte Durchmesser)

Seien p_1, p_2, q_1, q_2 verschiedene Punkte auf einem Kegelschnitt Q. Man zeige, dass

$$\mathrm{DV}(p_1, p_2; q_1, q_2) = -1$$

genau dann gilt, wenn die Geraden p_1p_2 und q_1q_2 parallel zu einem Paar konjugierter Durchmesser von Q sind.

***Aufgabe 52** (Allgemeine projektive Abbildung zwischen zwei Geraden in der Ebene)

Seien ℓ und m zwei Tangenten zum Kegelschnitt Q. Für jeden Punkt $p \in \ell$ sei $f(p) \in m$ der Schnittpunkt zwischen m und der Tangenten zu Q durch p. Man zeige, dass die Abbildung $f \colon \ell \to m$ projektiv ist.

Umgekehrt, zeige, dass für jede projektive Abbildung $f \colon \ell \to m$ zwischen zwei Geraden in $\mathbb{R}P^2$ alle Geraden $pf(p)$ tangential zu einem Kegelschnitt sind.

***Aufgabe 53** (Eine lineare Darstellung der symmetrischen Gruppe)

Die Symmetrien des Doppelverhältnisses liefern einen Gruppenmonomorphismus $S_3 \to \mathrm{PGL}(2)$ (und sogar $S_3 \to \mathrm{GL}(2)$). Können Sie einen Gruppenmonomorphismus $S_n \to \mathrm{GL}(n-1)$ konstruieren?