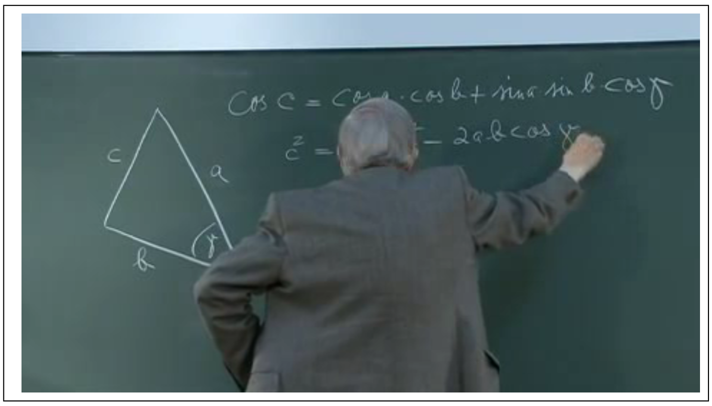
Übungsaufgaben zur Vorlesung *Geometrie*

Dr. Ivan Izmestiev, Moritz Firsching

Sommersemester 2014

Blatt 11 Abgabe: Freitag, 4.VII.2014



Hirzebruch erwähnt in einem autobiographischen Vortrag den Kosinussatz.
Video unter `https://bitly.com/1rC6lOL` ab Minute 3:07.

Aufgabe 54 (Kongruente sphärische Dreiecke)

Seien $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ zwei Dreiecke auf $\mathbb{S}^2$ (d.h. die Vektoren $A_i, B_i, C_i \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ sind linear unabhängig), bei welchen die entsprechenden Seiten gleich lang sind. Man zeige: es existiert genau eine Orthogonaltransformation $f \in \mathrm{O}(3)$, sodass

$$f(A_1) = A_2, \quad f(B_1) = B_2, \quad f(C_1) = C_2.$$

Aufgabe 55 (Partielle Ableitungen der Winkel) Man betrachte die Winkel α, β, γ eines sphärischen Dreiecks als Funktionen seiner Seitenlängen und zeige:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial c} = \frac{1}{\sin a \sin \beta} = \frac{1}{\sin b \sin \alpha}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial a} = -\frac{\cot \beta}{\sin a}$$

Aufgabe 56 (Reguläre sphärische n-Ecke)

Ein Vieleck in $\mathbb{S}^2$ heißt *regulär*, wenn alle seine Seiten gleich lang und alle Winkel gleich groß sind.

a) Man zeige, dass es reguläre sphärische Drei-, Vier- und Fünfecke mit allen Winkel gleich $120°$ existieren. Hingegen gibt es kein sphärisches Sechseck mit allen Winkel gleich $120°$.

b) Berechne die Seitenlänge des regulären n-Ecks mit allen Winkeln gleich $120°$.

Aufgabe 57 (Der Satz über die Seitenhalbierenden)

Man zeige, dass die Seitenhalbierenden eines sphärischen Dreiecks sich in einem Punkt schneiden.

***Aufgabe 58** (Isometrien der Sphäre als Kompositionen von Spiegelungen)

Eine Spiegelung der Sphäre ist definiert als die Einschränkung der Spiegelung von $\mathbb{R}^{n+1}$ in einer Hyperebene durch 0. Man zeige, dass jede Isometrie von $\mathbb{S}^n$ als Komposition von höchstens $n+1$ Spiegelungen dargestellt werden kann.