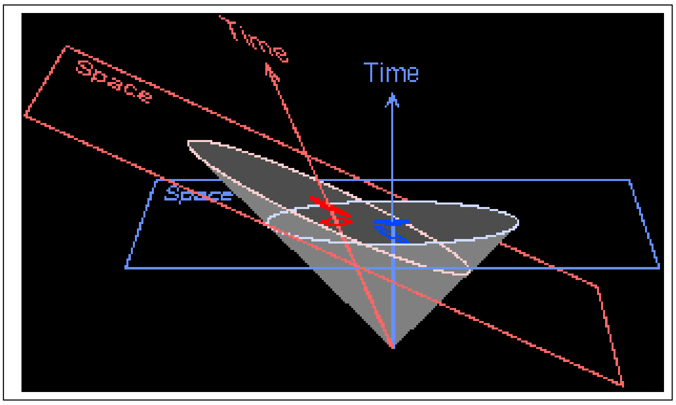
Übungsaufgaben zur Vorlesung *Geometrie*

Dr. Ivan Izmestiev, Moritz Firsching

Sommersemester 2014

Blatt 12 Abgabe: Freitag, 11.VII.2014



Mehr über die spezielle Relativitätstheorie auf dieser Webseite von Andrew Hamilton, Professor an der University of Colorado Boulder: `http://casa.colorado.edu/~ajsh/sr/sr.shtml`

Aufgabe 59 (Gram-Schmidt-Verfahren im Minkowski-Raum)

a) Seien $v_0, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^{n,1}$ linear unabhängige zeitartige Vektoren: $\|v_i\|^2_{n,1} < 0$. Man zeige, dass es eine Lorentz-Orthonormalbasis $w_0, \ldots, w_n$ von $\mathbb{R}^{n,1}$ gibt mit $\operatorname{span}\{w_0, \ldots, w_k\} = \operatorname{span}\{v_0, \ldots, v_k\}$ für alle $0 \leq k \leq n$.

b) Erweitern wir die Definition der Lorentz-Orthonormalbasis zu

$$\|w_i\|^2_{n,1} = \pm 1, \quad \langle w_i, w_j \rangle_{n,1} = 0$$

Gibt es eine Lorentz-Orthonormalbasis (w_0, w_1, w_2) mit $\operatorname{span}\{w_0, \ldots, w_k\} = \operatorname{span}\{v_0, \ldots v_k\}$ für die Vektoren

$$v_0 = (0, 1, 0), \quad v_1 = (1, 1, 1), \quad v_2 = (0, 0, 1)?$$

Woran scheitert das Gram-Schmidt Orthonormierungsverfahren?

Aufgabe 60 (Geodäten)

Sei $p \in \mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{n,1}$ und sei $v \in \mathbb{R}^{n,1}$ so, dass $\|v\|^2_{n,1} = 1$ und $\langle p, v \rangle_{n,1} = 0$. Man zeige:

a) die Kurve $\{\gamma(t) = p \cosh t + v \sinh t\}$ liegt auf $\mathbb{H}^n$;

b) $\operatorname{dist}(\gamma(t), \gamma(s)) = |s - t|$).

Aufgabe 61 (Lorentz-Matrizen)

a) Man zeige, dass

$$A_t = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t & 0 \\ \sinh t & \cosh t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Lorentz-Matrix ist.

b) Sei f eine Isometrie der hyperbolischen Ebene mit $f(e_0) = e_0$ im Hyperboloid-Modell. Man zeige, dass die Matrix von f bezüglich der Standardbasis die folgende Form hat:

$$B_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

*c) Die Matrizen $\{A_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ sowie $\{B_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ bilden Untergruppen von $\mathrm{PO}(n, 1)$. Skizziere die Orbits dieser Gruppen im Cayley-Klein-Modell.

Aufgabe 62 (Spezielle Kurven in der hyperbolischen Ebene)

Sei $v \in \mathbb{R}^{n,1}$, $v \neq 0$. Sei

$$E_v := \{p \in \mathbb{H}^n \mid \langle v, p \rangle_{n,1} = -1\}$$

a) Man zeige, dass das Bild der Menge E_v im Cayley-Klein-Modell entweder eine Ellipse, oder ein Ellipsebogen, oder ein Punkt, oder leer ist.

b) Ist jede Ellipse im Cayley-Klein-Modell das Bild einer Menge der Form E_v?

c) Man zeige, dass jeder Kreis (die Menge aller Punkte im konstanten Abstand von einem festen Punkt) im Cayley-Klein-Modell als Ellipse aussieht.

***Aufgabe 63** Man zeige, dass die Menge aller Geraden in der hyperbolischen Ebene, sowie die Menge aller Geraden in der euklidischen Ebene homöomorph zum offenen Möbiusband ist.