# Übungsaufgaben zur Vorlesung *Geometrie*

Dr. Ivan Izmestiev, Moritz Firsching

Sommersemester 2014

**Blatt 13** Abgabe: Freitag, 18.VII.2014

Hyperbolische Ebene, Häkelarbeit von Daina Taimina

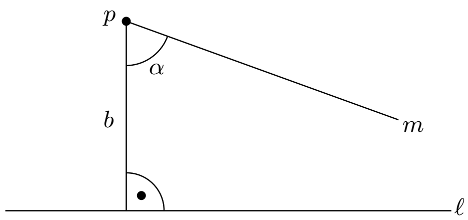
**Aufgabe 64** (Die Dreiecksungleichung)

Man zeige, dass in jedem hyperbolischen Dreieck $a + b > c$ gilt.

**Aufgabe 65** (Parallelitätswinkel und Inkreis eines ideales Dreiecks)

a) Sei $p$ ein Punkt im Abstand $b$ von einer Geraden $\ell$ und sei $m$ eine Gerade durch $p$, die den Winkel $\alpha$ mit dem Lot von $p$ auf $\ell$ bildet. Man zeige, dass $m$

- $\ell$ schneidet, wenn $\alpha < \operatorname{arccos} \tanh b$;
- zu $\ell$ parallel ist, wenn $\alpha = \operatorname{arccos} \tanh b$;
- zu $\ell$ ultraparallel ist, wenn $\alpha > \operatorname{arccos} \tanh b$.




b) Man zeige, dass jedes ideale hyperbolische Dreieck ein Inkreis hat, und dass der Radius des Inkreises gleich $\log \sqrt{3}$ ist.

*c) Man zeige, dass jedes (kompakte) hyperbolische Dreieck ein Inkreis hat, und dass der Radius des Inkreises kleiner als $\log \sqrt{3}$ ist.

**Aufgabe 66** (Abstand zwischen ultraparallelen Geraden)

Seien $\ell_1$ und $\ell_2$ zwei ultraparallele Geraden in $\mathbb{H}^2$ und seien $q_1 \in \ell_1$, $q_2 \in \ell_2$ die Fußpunkte ihres gemeinsamen Lotes. Man zeige:

$$\operatorname{dist}(q_1, q_2) = \min_{x_i \in \ell_i} \operatorname{dist}(x_1, x_2)$$

**Aufgabe 67** (Reguläre rechtwinklige Vielecke)

a) Man zeige: für jedes $n \geq 5$ existiert ein reguläres rechtwinkliges hyperbolisches $n$-Eck. Berechne seine Fläche.

b) Man zeige: die Seitenlänge eines regulären rechtwinkligen Sechsecks ist gleich $\log(2 + \sqrt{3})$.

***Aufgabe 68** (Der Hyperzyklus oder Abstandslinie)

Sei $\ell$ eine Gerade in $\mathbb{H}^2$, und sei $h \subset \mathbb{H}^2$ die Menge aller Punkte im konstanten Abstand von $\ell$:

$$h = \{p \in \mathbb{H}^2 \mid \operatorname{dist}(p, \ell) = b$$

a) Man zeige, dass der Winkel zwischen den Parallelen zu $\ell$ durch $p$ von der Wahl des Punktes $p \in h$ nicht abhängt.

b) Man zeige, dass im Cayley-Klein-Modell $h$ ein Ellipsebogen ist, der den Rand von $\mathbb{B}^2$ in denselben Punkten wie $\ell$ schneidet.

***Aufgabe 69** (Konstruktion mit Lineal)

a) Man zeige, dass es unmöglich ist, nur mit Hilfe eines Lineals das Zentrum eines Kreises zu finden.

b) Gegeben sei ein Parallelogramm im Inneren des Kreises. Konstruiere mit Hilfe eines Lineals das Zentrum des Kreises.