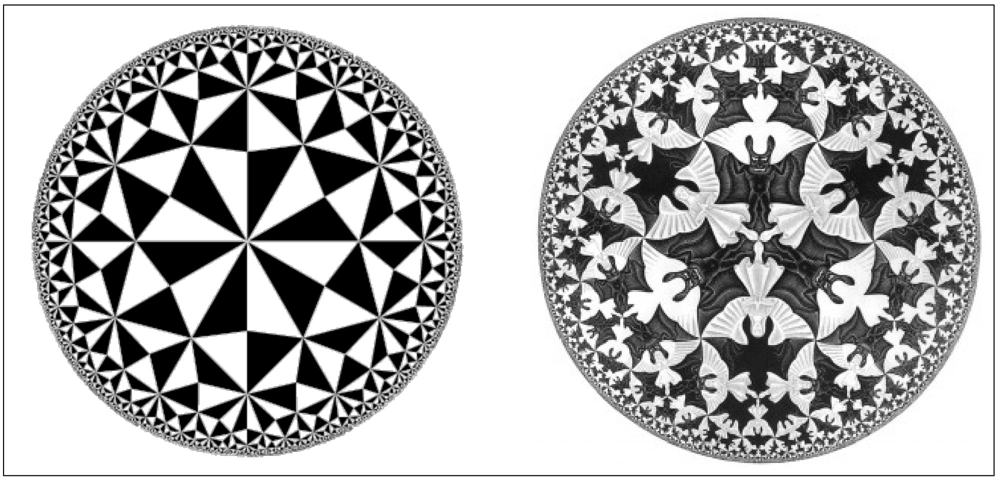
Übungsaufgaben zur Vorlesung *Geometrie*

Dr. Ivan Izmestiev, Moritz Firsching

Sommersemester 2014

Blatt 14



Eine Pflasterung der hyperbolischen Ebene im Kreisscheibenmodell von Poincaré;
Holzschnitt von M. C. Escher "Circle Limit IV (Heaven and Hell)", 1960

***Aufgabe 70** (Doppelverhältnis auf $\mathbb{S}^1$ und Winkel in $\mathbb{H}^2$)

Seien (p_1, p_2) und (q_1, q_2) zwei sich trennende Punktepaare auf $\mathbb{S}^1$. Man zeige:

$$\mathrm{DV}(p_1, p_2; q_1, q_2) = -\tan^2 \frac{\alpha}{2}$$

wobei α der Winkel zwischen den Geraden p_1p_2 und q_1q_2 der hyperbolischen Ebene im Cayley-Klein oder Poincaré-Modell ist (und zwar der Winkel von der orientierten Geraden p_1p_2 zu der orientierten Geraden q_1q_2).

***Aufgabe 71** (Kompositionen von Isometrien von $\mathbb{H}^2$)

Man zeige, dass Komposition von zwei elliptischen Isometrien der $\mathbb{H}^2$ nicht immer elliptisch ist, sondern parabolisch oder hyperbolisch sein kann.

***Aufgabe 72** (Möbiustransformationen und projektive Transformationen)

Gebe Isomorphismen $\mathrm{PO}(2, 1) \cong \mathrm{PGL}(2)$ und $\mathrm{PSO}(3, 1) \cong \mathrm{PGL}(\mathbb{C}, 2)$ explizit an.

***Aufgabe 73** (Doppelverhältnis in $\mathbb{C}P^1$ und Eigenschaften der Möbiustransformationen von $\mathbb{R}^2$)

Für vier Punkte $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}P^1$ kann das Doppelverhältnis durch dieselbe Formel wie im reellen Fall

$$\mathrm{DV}(z_1, z_2; z_3, z_4) := \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$$

definiert werden. Die gebrochene lineare Abbildungen (d. h. projektive Transformationen von $\mathbb{C}P^1$) erhalten DV.

a) Man zeige: $\mathrm{DV}(z_1, z_2; z_3, z_4) \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn die Punkte z_1, z_2, z_3, z_4 auf einem Kreis liegen. Folgere daraus, dass projektive Transformationen von $\mathbb{C}P^1$ Kreise auf Kreise abbilden.

b) Zeige, dass die Winkel zwischen den Kreisen erhalten bleiben. (Man wähle dafür z_1, z_2, z_3 auf dem ersten und z_1, z_2, z_4 auf dem zweiten Kreis.)

c) Wir haben jetzt zwei Definitionen des Doppelverhältnisses auf einem Kreis. Wie hängen die beiden zusammen?

***Aufgabe 74** (Abstand im Poincaré-Modell)

Seien p und q zwei Punkte im Inneren des Einheitskreises. Man zeige, dass wenn der Einheitskreis als Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene betrachtet wird, dann gilt

$$\mathrm{dist}(p, q) = |\log \mathrm{DV}(p, q; p_0, q_0)|$$

Hier sind p_0 und q_0 die Schnittpunkte der Geodäten pq mit dem Rand des Kreises.

***Aufgabe 75** (Sphären und Äquidistanten im Poincaré-Modell)

a) Man zeige, dass jede Sphäre (die Menge der Punkten im konstanten Abstand von einem Punkt) im Poincaré-Modell auch als Sphäre aussieht.

b) Man zeige, dass die Menge der Punkte im konstanten Abstand von einer Hyperebene im Poincaré-Modell als Schnitt von $\mathbb{S}^{n-1}$ mit einer Sphäre oder mit einer Hyperebene aussieht.