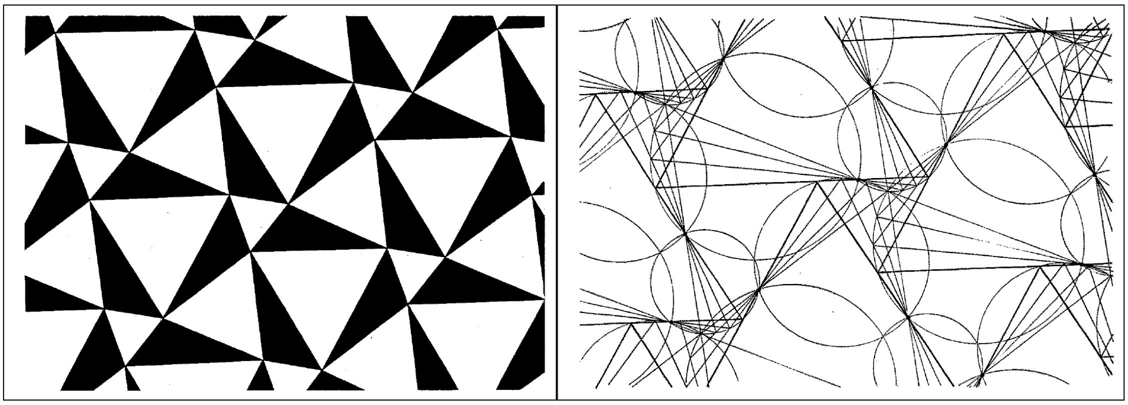
Übungsaufgaben zur Vorlesung *Geometrie*

Dr. Ivan Izmestiev, Moritz Firsching

Sommersemester 2014

Blatt 2 Abgabe: Freitag, 2.V.2014



J. F. Rigby, *Napoleon revisited*, Journal of Geometry 33, Seite 130 und 145, 1988

Aufgabe 6 (Drei Punkte sind genug)

Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) Jede Isometrie von $\mathbb{E}^2$ ist durch die Bilder von drei nicht kollinearen Punkten eindeutig definiert.

b) Wenn für eine beliebige Isometrie f und beliebige nicht-kollineare $A, B, C \in \mathbb{E}^2$ gilt: $f(A) = A, f(B) = B, f(C) = C$ und A, B, C dann ist $f = \mathrm{id}$.

Aufgabe 7 (Komposition von Drehungen)

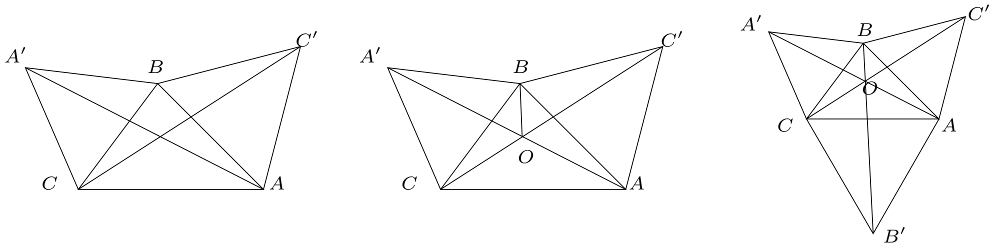
a) Seien ℓ_1 und ℓ_2 zwei Geraden durch einen Punkt $P \in \mathbb{R}^3$. Man zeige, dass die Komposition der Drehungen um ℓ_1 und ℓ_2 wieder eine Drehung um eine Gerade durch P ist.

b) Man zeige, dass die Komposition der Drehungen mit dem Winkel π um ℓ_1 und ℓ_2 (Achsensymmetrien) die Drehung um die zu ℓ_1 und ℓ_2 senkrechte Gerade ist, und der Drehwinkel gleich dem doppelten Winkel zwischen ℓ_1 und ℓ_2 entspricht.

c) * Was kann man im Allgemeinen über den Drehwinkel der Komposition sagen?

Aufgabe 8 (Ein besonderer Punkt im Dreieck)

Sei ABC ein Dreieck mit allen Winkeln $< 120°$. Seien auf den Seiten AB, BC und CA reguläre Dreiecke ABC', BCA' und CAB' nach außen konstruiert.



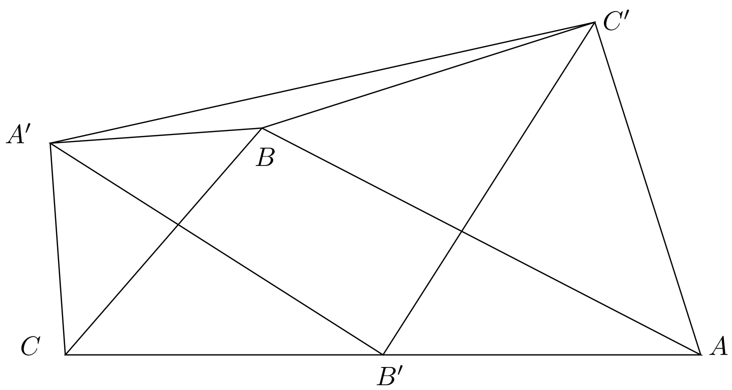
a) Man zeige, dass die Strecken AA' und CC' gleich lang sind und sich unter dem Winkel $60°$ schneiden. (Hinweis: Betrachte die Drehung um B mit dem Winkel $120°$, unter Annahme, dass ABC positiv orientiert ist.)

b) Sei O der Schnittpunkt der Strecken AA' und CC'. Zeige: $\angle BOA' = \angle BOC' = 60°$ und folgere daraus, dass alle drei Strecken AA', BB', CC' gleich lang sind, sich in einem Punkt schneiden und dabei sechs Winkel je $60°$ bilden.

c) * Man zeige, dass $AO + BO + CO = AA'$ und dass der Punkt O die Summe der Abstände zu A, B und C minimiert.

Aufgabe 9 (Napoleons Verwandte)

Sei ABC ein beliebiges Dreieck, und seien ABC' und BCA' gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke mit Hypothenusen AB, bzw. BC, nach außen von ABC konstruiert. Sei B' der Mittelpunkt der Seite AC.



Man zeige, dass das Dreieck $A'B'C'$ ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck mit Hypothenuse $A'C'$ ist.

Hinweis: Man vergleiche den Beweis des Satzes von Napoleon aus der Vorlesung.

***Aufgabe 10** (Tanzübung)

Stehen sie auf, Beine schulterbreit. Drehen Sie sich um das linke Bein um $90°$ nach links (halten sie dabei den Abstand zwischen den Füßen konstant). Drehen Sie sich anschliessend um den rechten Bein um $90°$ nach rechts. Wie hat sich Ihre Lage verändert?