Übungsaufgaben zur Vorlesung *Geometrie*

Dr. Ivan Izmestiev, Moritz Firsching

Sommersemester 2014

Blatt 3 Abgabe: Freitag, 9.V.2014

III. Vom Gleichgewichte bei sich affin bleibenden Figuren.

20. Zwei Systeme von Puncten in Ebenen stehen in der Verwandtschaft der Affinität, wenn die Fläche jedes aus den Puncten des einen Systems zu bildenden Dreiecks zu der entsprechenden Dreiecksfläche des andern Systems ein constantes Verhältniſs hat. Ist daher von drei ebenen Figuren die erste der zweiten gleich, als wobei dieses constante Verhältniſs das der Gleichheit ist, und die zweite der dritten ähnlich, so ist die erste der dritten affin verwandt; und man kann umgekehrt zu zwei affinen Figuren immer eine dritte construiren, welche der einen von beiden gleich und der andern ähnlich ist. Sind demnach Puncte in einer Ebene dergestalt beweglich, daſs die von ihnen gebildete Figur sowohl zu jeder andern ihr ähnlichen, als zu jeder andern ihr gleichen Figur übergehen kann, so kann sich die anfängliche Figur auch in jede andere ihr affine verwandeln, und alle Figuren, welche ein mit solch einer doppelten Beweglichkeit begabtes System von Puncten annehmen kann, sind einander, wo nicht ähnlich oder gleich, doch affin. Auf eben diese Weise werden daher auch die Bedingungen für das Gleichgewicht eines solchen Systems aus den Bedingungen, welche wir bei der Aehnlichkeit und bei der Gleichheit fanden, zusammengesetzt sein.

A. F. Möbius, *Anwendungen der Statik auf die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften*
Crelle Band 21, Seite 170, 1840

Aufgabe 11 (Affine Abhängigkeit)

Es seien $p_1, \ldots, p_m$ Punkte eines affinen Raums. Man zeige die Äquivalenenz der drei folgenden Aussagen:

a) Die Punkte $\{p_1, \ldots, p_m\}$ sind affin abhängig.

b) Einer der Punkte $\{p_1, \ldots, p_m\}$ kann als affine Kombination von den anderen dargestellt werden;

c) Die Vektoren $p_2 - p_1, \ldots, p_m - p_1$ sind linear abhängig.

Aufgabe 12 (Affine Abbildungen)

Man zeige, dass die folgenden Abbildungen eines affinen Raumes auf sich selbst affin sind:

a) Translation $T_v \colon p \mapsto p + v$.

b) konstante Abbildung $p \mapsto p_0$ für ein festes p_0.

c) Zentrische Streckung $p \mapsto p_0 + k(p - p_0)$.

Aufgabe 13 (Affiner Raum)

Sei A ein affiner Raum mit dem zugehörigen Vektorraum V, und sei $D\colon A \times A \to V$ die durch

$$p + D(p,q) = q$$

definierte Abbildung.

a) Man zeige

$$D(p+v,q) = D(p,q) - v, \quad D(p,q+w) = D(p,q) + w$$

und folgere daraus

$$D(p+v,q+w) = D(p,q) + (w-v)$$

b) Man zeige: $D(p,p) = 0$, $D(p,q) = -D(q,p)$.

c) Man zeige: für $\sum_i \lambda_i = 0$ gilt

$$\lambda_1 D(p,p_1) + \cdots + \lambda_m D(p,p_m) = \lambda_1 D(q,p_1) + \cdots + \lambda_m D(q,p_m)$$

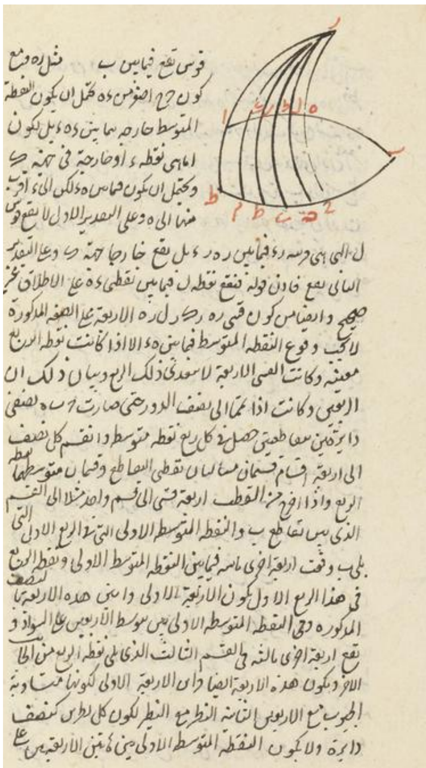
und für $\sum_i \lambda_i = 1$ gilt

$$p + \lambda_1 D(p,p_1) + \cdots + \lambda_m D(p,p_m) = q + \lambda_1 D(q,p_1) + \cdots + \lambda_m D(q,p_m).$$

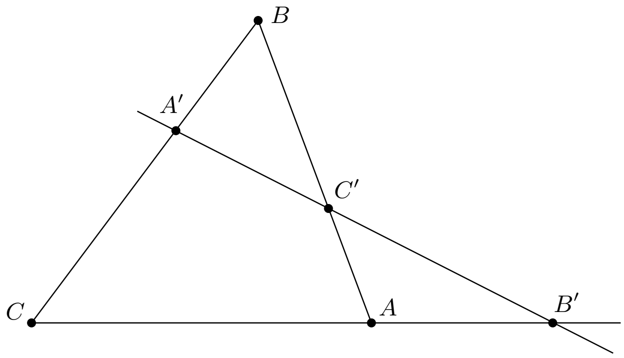
Aufgabe 14 (Satz von Menelaus)

Man beweise:
Die Punkte A', B', C' auf den Geraden BC, CA, AB sind kollinear genau dann, wenn

$$\frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{B'A}} = -1$$



Menelaus, Tahrir Kitab Menelaus fi al-Kurat al-Samawiyyah übersetzt von Nasir ad-Din al Tusi Persia, 16. Jahrhundert



***Aufgabe 15** (Satz von Pappus)

Seien $p, q, r \in \ell$ und $p', q', r' \in \ell'$ zwei Tripel kollinearer Punkte. Seien $pq' \parallel p'q$ und $qr' \parallel q'r$. Zeige, dass $pr \parallel p'r'$.