Übungsaufgaben zur Vorlesung *Geometrie*

Dr. Ivan Izmestiev, Moritz Firsching

Sommersemester 2014

Blatt 4 Abgabe: Freitag, 16.V.2014

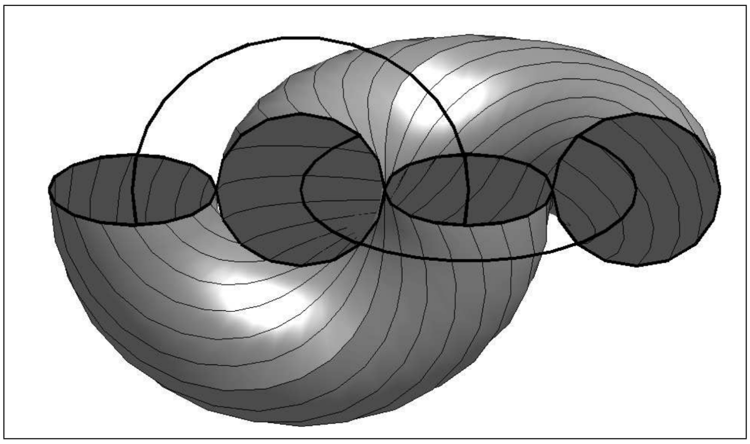

Bild zur Hopffaserung,

Aufgabe 16 (Affine Unterräume und Untervektorräume)

Sei $L \subset \mathbb{R}^n$ der affine Unterraum

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\} \text{ mit } b \neq 0$$

und V der zu ihm paralleler Untervektorraum

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$$

Zeige, dass für $p_1, \ldots, p_n \in L$ gilt

$$\sum_i \lambda_i p_i \in L \Leftrightarrow \sum_i \lambda_i = 1$$
$$\sum_i \lambda_i p_i \in V \Leftrightarrow \sum_i \lambda_i = 0$$

Aufgabe 17 (Hyperebene und zugehörige Abbildungen)

Sei $c \in \mathbb{R}^n$, und sei

$$H = \{x \mid \langle c, x \rangle = 0\}$$

die Hyperebene mit Normalenvektor c.

a) Man gebe die Formel für die Orthogonalprojektion $\pi_H \colon \mathbb{R}^n \to H$ an. (Hinweis: $\pi_H(x)$ hat die Form $x + \lambda c$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.)

b) Man gebe die Formel für die Spiegelung $S_H \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ an der Hyperebene H an.

c) Man prüfe $\langle S_H(x), S_H(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

Aufgabe 18 (Dilatationsgruppe)

Mit $\mathbb{R}^*$ bezeichnen wir die Gruppe der invertierbaren Elemente in $\mathbb{R}$. Die Gruppe $\mathrm{Dil}(\mathbb{E}^n)$ aller Dilatationen ist die Gruppe aller Ähnlichkeitstransformationen, die als Komposition von zentrischen Streckungen und Translationen dargestellt werden können.

Man zeige:

a) Durch Linksmultiplikation wirkt $\mathbb{R}^*$ auf $\mathbb{E}^n$. Diese Wirkung bezeichnen wir mit ϕ.

b) $\mathrm{Dil}(\mathbb{E}^n) \cong \mathbb{R}^* \ltimes_\phi \mathbb{R}^n$.

c) $\mathrm{Dil}(\mathbb{E}^n)$ kann als Untergruppe von $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ aufgefasst werden.

Aufgabe 19 (Parallelprojektion)

Sei $V = U \oplus W$ eine direkte Summenzerlegung eines Vektorraums V in zwei Untervektorräume.

a) Zeige, dass für alle $p, q \in V$ die affinen Unterräume $p + U$ und $q + W$ sich in genau einem Punkt schneiden. Folgere daraus, dass die Parallelprojektion

$$\pi_L^W : V \to L$$

auf den affinen Unterraum $L = p + U$ entlang des Untervektorraums W wohldefiniert ist.

b) Zeige, dass die Abbildung π_L^W affin ist.

c) Sei $U' \subset V$ noch ein Untervektorraum, sodass $V = U' \oplus W$. Sei $L' = p' + U'$ ein zu U' paralleler affiner Raum. Zeige, dass die Einschränkung

$$\pi_L^W : L' \to L$$

eine Bijektion ist.

***Aufgabe 20** (Hopffaserung)

Sei $M_t \in SO(4)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine Orthogonalmatrix der folgenden Form:

$$M_t = \begin{pmatrix} D_t & 0 \\ 0 & D_t \end{pmatrix},$$

wobei $D_t \in SO(2)$ die Drehmatrix mit dem Winkel t ist. Sei außerdem

$$\mathbb{S}^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \|x\|^2 = 1\}$$

die 3-Sphäre vom Radius 1.

a) Zeige, dass $t \mapsto M_t$ eine freie Wirkung der Gruppe $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{S}^3$ definiert, sodass die Orbits dieser Wirkung die Sphäre $\mathbb{S}^3$ als disjunkte Vereinigung der Kreise darstellen.

b) Wie sieht die Vereinigung der Orbits der Punkte

$$\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, \cos\alpha, \sin\alpha) \mid \alpha \in [0, 2\pi)\}$$

aus?