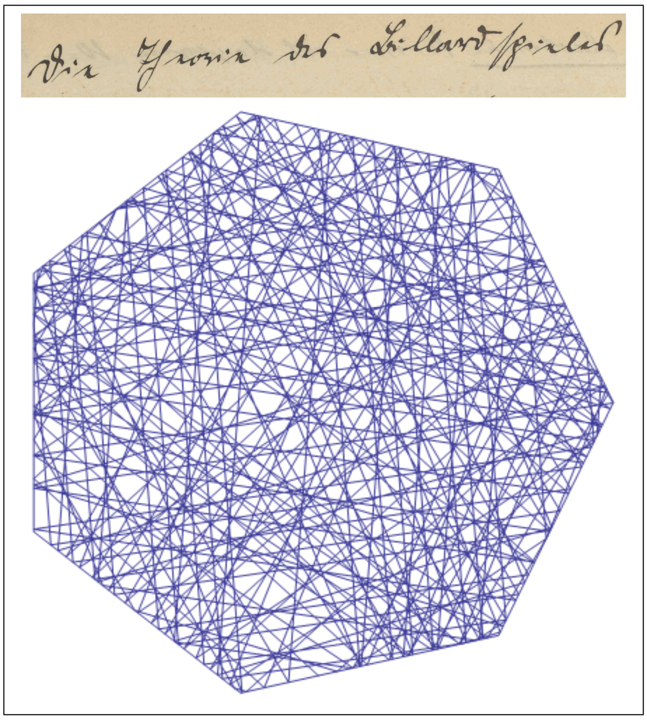
Übungsaufgaben zur Vorlesung *Geometrie*

Dr. Ivan Izmestiev, Moritz Firsching

Sommersemester 2014

Blatt 5 Abgabe: Freitag, 23.V.2014



Titel eines Vortrages von C[ARL]. BROCHMANN, gehalten am 21.V.1887, *Felix Klein Protokolle*
`http://page.mi.fu-berlin.de/moritz/klein/#id-466` und Billard im 7-Eck.

Aufgabe 21 (Spiegelungen im $\mathbb{R}^2$)

a) Zeige, dass die Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

eine Spiegelung an der durch den Vektor $(\cos\frac{\phi}{2}, \sin\frac{\phi}{2})$ aufgespannten Geraden ist.

b) Zeige, dass die Komposition der Spiegelungen an zwei den Winkel $\frac{\phi}{2}$ bildenden Geraden eine Drehung mit Winkel ϕ um den Schnittpunkt dieser Geraden ist.

c) Wie sehen Spiegelungen (an durch den Ursprung gehenden Geraden) und Drehungen (mit Drehzentrum im Ursprung) in Polarkoordinaten aus? Beweise die Aussage aus Aufgabe b) mit Hilfe der Polarkoordinaten.

Aufgabe 22 (O(3))

Nach dem fast-Diagonalisierung-Satz für Orthogonaltransformationen hat jedes $f \in \mathrm{O}(3)$ in einer geeigneten Orthonormalbasis die Form

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

a) Zeige, dass jede Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Mx+b$ mit $M \in \mathrm{SO}(3)$ eine Schraubung ist. (Man darf die Tatsache, dass die Komposition einer Drehung und Translation in $\mathbb{R}^2$ eine Drehung ist, benutzen.)

b) Zeige, dass jede Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Mx + b$ mit $M \in \mathrm{O}(3) \setminus \mathrm{SO}(3)$ eine Drehspiegelung ist.

Aufgabe 23 (Triangulierung eines Würfels)

Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$. Für jede Permutation $\sigma \in S_n$ betrachte das Simplex

$$\Delta(\sigma) := \Delta(0, v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(1)} + v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(1)} + \ldots + v_{\sigma(n)})$$

a) Zeige, dass diese Simplexe den Würfel $[0,1]^n$ überdecken, während ihre Inneren disjunkt sind:

$$P(e_1, \ldots, e_n) = \bigcup_{\sigma \in S_n} \Delta(\sigma), \quad \mathrm{int}(\Delta(\sigma)) \cap \mathrm{int}(\Delta(\tau)) = \emptyset \text{ for } \sigma \neq \tau$$

b) Zeige, dass $\mathrm{Vol}_n(\Delta(\sigma)) = \frac{1}{n!}$, und dass kein Simplex mit Ecken in $\{0,1\}^n$ Volumen kleiner als $\frac{1}{n!}$ hat.

*c) Eine Vereinigung von Simplexen heißt *Triangulierung*, wenn der Schnitt von je zwei Simplexen eine Seite (Untersimplex) von den beiden ist. Gibt es eine Triangulierung des Würfels $[0,1]^3$, die aus weniger als 6 Simplexen besteht?

Aufgabe 24 (Diagonalenlängen im Viereck)

Sei $ABCD$ ein Viereck mit den Seitenlängen $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Zeige, dass die Diagonalenlängen $x = AC$ und $y = BD$ die Gleichung

$$x^2y + xy^2 + k_{11}xy + k_{10}x + k_{01}y + k_{00} = 0$$

erfüllen, wobei

$$\begin{aligned} k_{11} &= -(a+b+c+d) \\ k_{10} &= (a-d)(b-c) \\ k_{01} &= (a-b)(d-c) \\ k_{00} &= (ac-bd)(a+c-b-d) \end{aligned}$$

***Aufgabe 25** (Drehungen und Standardblockform)

a) Bestimme die Achse und den Winkel der Drehung

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Bestimme die Standardblockform der Orthogonaltransformation mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Bestimme die Standardblockform der Orthogonaltransformation

$$M_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } j = \sigma(i) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $\sigma \in S_n$ eine Permutation ist.

***Aufgabe 26** (Billard berechnet π)

In einer von einer Seite abgeschlossenen und in die andere Seite unendlichen waagerechten Rille liegt eine schwarze Billardkugel. Sie wird aus der Unendlichkeit mit einer weißen Kugel angeschossen. Wir nehmen an, dass beim Rollen, Zusammenstoßen und Abprallen keine Energie verloren geht. Zeige, dass die Gesamtzahl der Zusammenstöße gleich

a) 3 ist, wenn die Kugeln gleich viel wiegen;

b) 314159 ist, wenn die weiße Kugel 1 Gramm und die schwarze 10 Kilogramm wiegt.