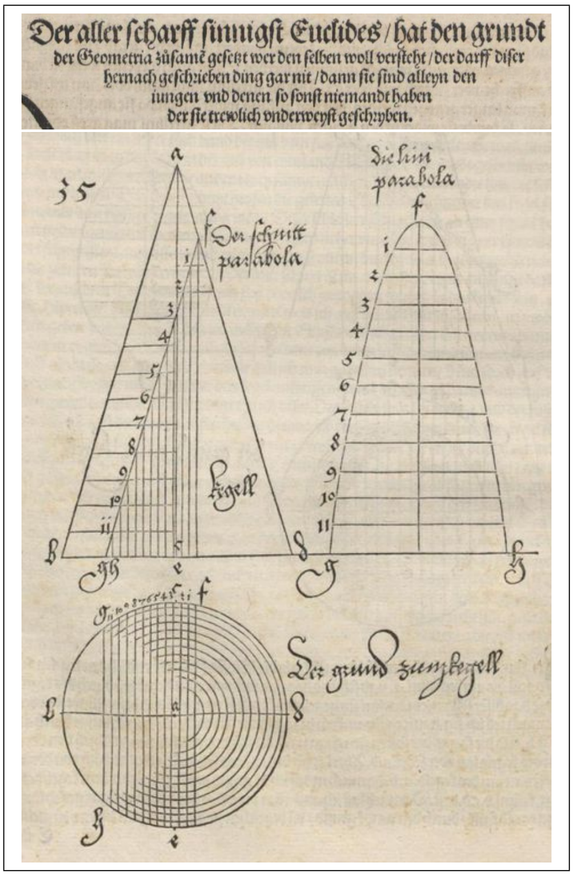
Übungsaufgaben zur Vorlesung *Geometrie*

Dr. Ivan Izmestiev, Moritz Firsching

Sommersemester 2014

Blatt 6 Abgabe: Freitag, 30.V.2014



Albrecht Dürer, aus „Underweysung der Messung, mit dem Zirckel und Richtscheyt, in Linien, Ebenen unnd gantzen corporen“, 1525

Aufgabe 27 (Brennpunkte und Direktrices)

a) Skizziere die Ellipse
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$
und finde die Koordinaten ihrer Brennpunkte, sowie die Gleichungen der entsprechenden Direktrices.

b) Die gleiche Aufgabe für die Hyperbel
$$x^2 - y^2 = 1$$

*c) Die gleiche Aufgabe für die Hyperbel
$$xy = 1$$

Aufgabe 28 (Optische Eigenschaften der Hyperbel und Parabel)

a) Seien A und B Punkte auf unterschiedlichen Seiten der Geraden ℓ, sodass $\operatorname{dist}(A, \ell) > \operatorname{dist}(B, \ell)$. Man zeige: es gibt genau einen Punkt $P \in \ell$, sodass ℓ der Bisektor des Winkels APB ist.

   Zeige ausserdem, dass der Punkt P die Differenz der Abstände von A und B zu einem Punkt auf ℓ maximiert:

$$AP - PB = \max\{AX - XB \mid X \in \ell\}$$

b) Gegeben sei eine Parabel mit Brennpunkt F und Direktrix ℓ. Man zeige, dass wenn ein Punkt X nicht auf der selben Seite von der Parabel wie F liegt, dann gilt

$$XF > \operatorname{dist}(X, \ell)$$

c) Man zeige: Für jeden Punkt X auf einer Parabel mit Brennpunkt F und Direktrix ℓ bildet die Tangente t durch X den Bisektor des Winkels FXP, wobei XP das Lot auf ℓ ist.

Aufgabe 29 (Konfokale Familien)

a) Sei $a > b > 0$. Zeige, dass die Quadriken

$$Q_\lambda = \left\{(x,y) \mid \frac{x^2}{a^2-\lambda} + \frac{y^2}{b^2-\lambda} = 1\right\}, \quad \lambda < a^2, \lambda \neq b^2$$

   konfokal sind. Was geschieht bei $\lambda \to b^2$ und bei $\lambda \to a^2$?

b) Schreibe die Gleichungen der konfokalen Familie von Parabeln mit Brennpunkt $(0,0)$ und Direktrices parallel zu der x-Achse.

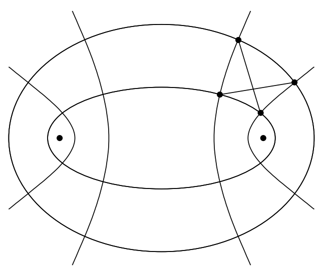
Aufgabe 30 (Rank und Typ einer Quadrik)

Sei $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid P(x) = 0\}$, wobei

$$P(x) = \tilde{x}^\top \tilde{A} \tilde{x}, \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} c & b^\top \\ b & A \end{pmatrix}$$

Bezeichnen wir $r = \operatorname{rank} A$, $\tilde{r} = \operatorname{rank} \tilde{A}$. Man zeige:

- $\tilde{r} = 1 \Leftrightarrow Q$ ist eine Gerade.
- $\tilde{r} = 2 \Leftrightarrow Q$ ist ein Punkt oder zwei Geraden.
- $\tilde{r} = 3, r = 1 \Leftrightarrow Q$ ist eine Parabel.
- $\tilde{r} = 3, r = 2 \Leftrightarrow Q$ ist eine Ellipse oder eine Hyperbel.



***Aufgabe 31** (Der Satz von Ivory)

Zeige, dass jedes von konfokalen Quadriken berandete Viereck gleichlange Diagonalen hat. Gibt es ein Analogon in Dimension 3? Und in Dimension n?