Übungsaufgaben zur Vorlesung *Geometrie*

Dr. Ivan Izmestiev, Moritz Firsching

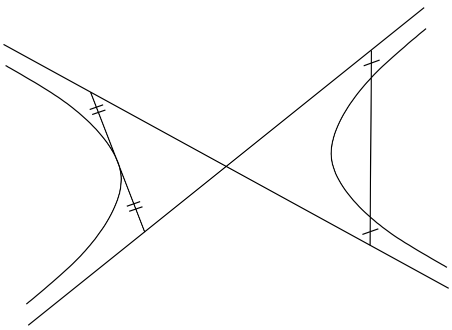
Sommersemester 2014

Blatt 7 Abgabe: Freitag, 6.VI.2014

Cartonmodelle. Flächen zweiter Ordnung nach Alexander Brill von Schilling, Mathematische Modellsammlung Philipps Universität Marburg.

Aufgabe 32 (Affin vs. euklidisch)

Sei C eine Hyperbel mit Asymptoten a_1 und a_2, und sei ℓ eine Gerade. Seien P_1, P_2 die Schnittpunkte von ℓ mit a_1 und a_2. Man zeige: wenn ℓ die Hyperbel in zwei Punkten Q_1 und Q_2 schneidet, dann gilt $P_1Q_1 = P_2Q_2$, und wenn ℓ an C tangential ist, dann ist der Tangentialpunkt Q der Mittelpunkt von P_1P_2.



Aufgabe 33 (Polarität bezüglich einer Parabel) Für jeden Punkt $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ definiere die Polare p° als die Gerade mit der Gleichung $y = ax - b$; für jede Gerade ℓ mit der Gleichung $y = cx + d$ definiere ihr Pol ℓ° als der Punkt $(c, -d)$. Man zeige:

a) die so definerte Polarität ist involutiv: $(p^\circ)^\circ = p$ und $(\ell^\circ)^\circ = \ell$;

b) $p \in \ell \Leftrightarrow \ell^\circ \in p^\circ$;

c) $p \in p^\circ$ genau dann, wenn p auf der Parabel $y = \frac{x^2}{2}$ liegt.

*Formuliere die Sätze von Brianchon und Pascal für Parabel, benutze die Polarität um zu zeigen, dass sie zueinander äquivalent sind, und beweise einen dieser Sätze mit Hilfe der Geraden auf dem hyperbolischen Paraboloid.

Aufgabe 34 (Geraden auf dem Hyperboloid und die Polarität)

Sei $Q \subset \mathbb{R}^3$ ein einschaliges Hyperboloid mit Zentrum im Koordinatenursprung, und sei $\ell \subset Q$ eine Gerade auf dem Hyperboloid. Man zeige:

a) die Polare jedes Punktes auf ℓ enthält ℓ;

b) die Gerade ℓ° ist selbstdual: $\ell^\circ = \ell$;

c) jede selbstduale Gerade liegt vollständig auf dem Hyperboloid.

Aufgabe 35 (Lineare Kovarianz der Polarität)

Sei $Q = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \alpha(p, p) = 1\}$ eine Quadrik mit einer nicht ausgearteten und nicht negativ definiten symmetrischen Bilinearform α. Sei $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Man zeige für jeden affinen Unterraum $L \subset \mathbb{R}^n$, $0 \notin L$:

$$f(L^\circ) = (f(L))^\circ$$

wobei links die Polarität bezüglich der Quadrik Q, und rechts die Polarität bezüglich der Quadrik $f(Q)$ gemeint wird.

Aufgabe 36 (Geraden auf dem Hyperboloid)

Ist es möglich, $\mathbb{R}^3$ in paarweise windschiefe Geraden zu partitionieren? (Eine Partition einer Menge M ist eine Menge P von nicht-leeren Teilmengen von M, so dass jedes Element von M in genau einer Menge von P enthalten ist.)

Ist es möglich, $\mathbb{R}^3$ in Kreise zu partitionieren?