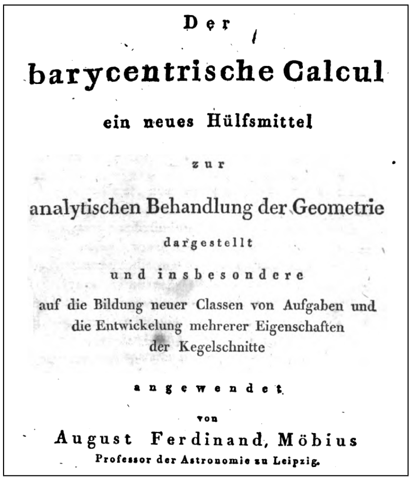
Übungsaufgaben zur Vorlesung *Geometrie*

Dr. Ivan Izmestiev, Moritz Firsching

Sommersemester 2014

Blatt 9 — Abgabe: Freitag, 20.VI.2014



Der
barycentrische Calcul
ein neues Hülfsmittel
zur
analytischen Behandlung der Geometrie
dargestellt
und insbesondere
auf die Bildung neuer Classen von Aufgaben und
die Entwickelung mehrerer Eigenschaften
der Kegelschnitte
angewendet
von
August Ferdinand Möbius
Professor der Astronomie zu Leipzig.

Die erste Verwendung von homogenen Koordinaten, 1827

Aufgabe 42 (Gerade durch zwei Punkte und der Schnittpunkt zweier Geraden)

a) Seien $p_1 = (x_1 : y_1 : z_1)$ und $p_2 = (x_2 : y_2 : z_2)$ zwei Punkte in $\mathbb{R}P^2$. Man zeige, dass die projektive Gerade durch p_1 und p_2 die folgende Gleichung hat:

$$\{(x : y : z) \in \mathbb{R}P^2 \mid \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \\ z_1 & z_2 & z \end{pmatrix} = 0\}$$

b) Seien

$$\ell_i = \{(x : y : z) \mid a_i x + b_i y + c_i z = 0\}, \quad i = 1, 2$$

zwei Geraden in $\mathbb{R}P^2$. Man zeige, dass die Komponenten des Kreuzproduktes

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

homogene Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden ℓ_1 und ℓ_2 sind.

Aufgabe 43 (Das Baryzentrum und projektive Transformationen)

Sei $A = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 + \cdots + x_n = 1\}$ eine affine Hyperebene. Betrachte die affine Basis $(e_0, \ldots, e_n)$ von A. Beschreibe die projektive Transformation $[f] \in \mathrm{PGL}(n+1)$, die diese Basispunkte festhält, und den Punkt mit baryzentrischen Koordinaten $(\frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{n+1})$ auf den Punkt $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ mit $\lambda_i \neq 0, \sum_i \lambda_i = 1$ abbildet.

Aufgabe 44 (Projektive Quadriken in $\mathbb{R}P^2$)

Man zeige, dass die projektiven Abschlüsse der folgenden affinen Quadriken zueinander projektiv äquivalent sind:

a) die Sphäre $x^2+y^2+z^2=1$, das zweischalige Hyperboloid $x^2-y^2-z^2=1$ und das elliptische Paraboloid $x^2+y^2=2z$;

b) das einschalige Hyperboloid $x^2+y^2-z^2=1$ und das hyperbolische Paraboloid $x^2-y^2=2z$.

*Man zeige, dass das einschalige Hyperboloid den projektiven Raum in zwei Volltori zerschneidet.

Aufgabe 45 (Projektive Unterräume auf projektiven Quadriken)

a) Sei $Q \subset P(V)$ eine projektive Quadrik, und $U \subset V$ ein Untervektorraum. Man zeige, dass der Schnitt $Q \cap P(U)$ entweder eine Quadrik in $P(U)$ oder das ganze $P(U)$ ist.

b) Sei $Q = \{[v] \in P(V) \mid \alpha(v,v) = 0\}$ eine projektive Quadrik. Man zeige:

$$P(U) \subset Q \Leftrightarrow U \subset U^\perp$$

wobei $U^\perp$ das Orthogonalkomplement des Untervektorraums $U \subset V$ bezüglich der Form α ist.

c) Man zeige, dass eine nicht-ausgeartete Quadrik im n-dimensionalen projektiven Raum keinen projektiven Unterraum der Dimension $\geq \frac{n}{2}$ enthalten kann.

d) Man finde einen m-dimensionalen projektiven Unterraum auf der Quadrik

$$\{x_0^2 + \cdots + x_m^2 - x_{m+1}^2 - \cdots x_{2m+1}^2\} \subset \mathbb{R}P^{2m+1}$$

e) *Man zeige, dass durch jeden Punkt auf der obigen Quadrik mindestens $(m+1)!$ in der Quadrik enthaltende m-dimensionale projektive Unterräume gehen.

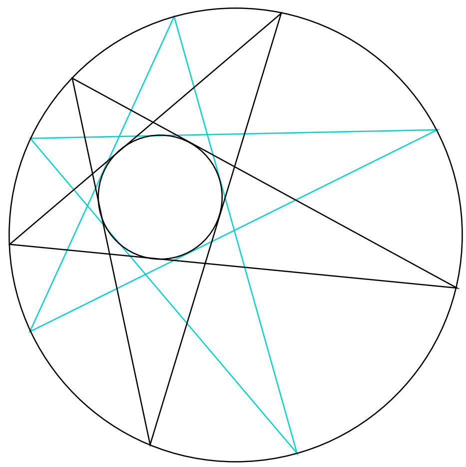
Aufgabe 46 (Projektive Polarität in Koordinaten)

Jeder Punkt in $\mathbb{R}P^n$ wird durch homogene Koordinaten $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ beschrieben. Jeder Hyperebene kann man auch homogene Koordinaten zuordnen, und zwar die Koeffizienten der homogenen linearen Gleichung, deren Lösungsmenge diese Hyperebene ist.

Sei $\alpha(x,x) = \sum_{i,j=0}^n a_{ij}x_ix_j$ eine nicht-ausgeartete Quadrik.

a) Was sind die Koordinaten (im oben beschriebenen Sinne) der Polare des Punktes $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$?

b) Wie berechnet man die Koordinaten des Pols der Hyperebene mit Koordinaten $(y_0 : y_1 : \ldots : y_n)$?



***Aufgabe 47** (Schließungssatz von Poncelet: ein Spezialfall)

Seien C und c zwei Kreise, wobei c innerhalb von C liegt. Von einem Punkt p_1 auf C zieht man eine Tangente zu c, die den großen Kreis wieder im Punkt p_2 schneidet. Dann zieht man von p_2 eine weitere Tangente zu c und erhält den Punkt $p_3 \in C$ (jedes Mal nimmt man eine neue Tangente, sodass $p_{i+1} \neq p_{i-1}$).

Angenommen, dieser Polygonzug schließt sich nach n Schritten: $p_{n+1} = p_1$. Man zeige: dann passiert das Gleiche auch für jede andere Wahl des Anfangpunktes $p_1 \in C$.