

# Geometrie

Ivan Izmetiev

FU Berlin, SS 14

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1	Was ist Geometrie? . . . . .	1
2	Gruppenwirkung . . . . .	2
2.1	Definition und Beispiele . . . . .	2
2.2	Treu, frei, transitiv . . . . .	3
2.3	Orbits . . . . .	4
2.4	Affine Räume . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Euklidische und affine Geometrie</b>	<b>6</b>
1	Isometrien: Darstellung durch Spiegelungen . . . . .	6
1.1	Isometrien . . . . .	6
1.2	Satz über $n + 1$ Spiegelungen . . . . .	7
1.3	Orientierung; Eigentliche und uneigentliche Isometrien . . . . .	9
1.4	Klassifikation der Isometrien der Ebene und des Raumes . . . . .	9
1.5	Komposition von Drehungen und der Satz von Napoleon . . . . .	11
2	Ähnlichkeitstransformationen . . . . .	13
2.1	Definition . . . . .	13
2.2	Klassifikation der Ähnlichkeitstransformationen . . . . .	15
2.3	Komposition von Drehstreckungen . . . . .	16
2.4	Dilatationsgruppe . . . . .	16
3	Affine Räume und Abbildungen . . . . .	17
3.1	Punkt plus Vektor, Punkt minus Punkt . . . . .	17
3.2	Linearkombination von Punkten? . . . . .	18
3.3	Affine Abbildungen: Definition . . . . .	19
3.4	Affine Hülle und affine Abhängigkeit . . . . .	20
3.5	Baryzentrische Koordinaten . . . . .	21
3.6	Der Hauptsatz der affinen Geometrie . . . . .	23
4	Affine Räume vs. Vektorräume . . . . .	24
4.1	Koordinatensysteme in affinen Räumen . . . . .	24
4.2	Koordinatendarstellung affiner Transformationen . . . . .	24
4.3	Allgemeine affine Gruppe und allgemeine lineare Gruppen . . . . .	26
4.4	Affine Unterräume von Vektorräumen . . . . .	27
4.5	Jeder affine Raum ist ein affiner Unterraum . . . . .	28

4.6	Parallelprojektion zwischen affinen Unterräumen . . . . .	30
5	Orthogonalgruppe und Gruppe der euklidischen Isometrien . . . . .	31
5.1	Skalarprodukt und Standardskalarprodukt . . . . .	31
5.2	Die Orthogonalgruppe . . . . .	32
5.3	Euklidische affine Räume und Isometrien . . . . .	33
5.4	Isometrien und Orthogonaltransformationen . . . . .	33
5.5	Die Gruppen $O(2)$ und $SO(2)$ . . . . .	34
5.6	Die “fast-Diagonalisierbarkeit” orthogonaler Matrizen . . . . .	35
5.7	Komplexe Zahlen . . . . .	38
5.8	Volumina der Parallelotope und Simplexe . . . . .	41
5.9	Affine und euklidische Begriffe . . . . .	45
6	Ausblick . . . . .	45
6.1	Diskrete Untergruppen und Spiegelungsgruppen . . . . .	45
6.2	Billarde . . . . .	45
6.3	Euklidische Metriken auf dem Torus . . . . .	46
6.4	Lie-Gruppen . . . . .	46
6.5	Normale Untergruppen, einfache Gruppen . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Kegelschnitte und Quadriken</b> . . . . .	<b>47</b>
1	Kegelschnitte . . . . .	47
1.1	Ellipse, Parabel, Hyperbel . . . . .	47
1.2	Fokale und bifokale Eigenschaften . . . . .	48
1.3	Gleichungen der Kegelschnitte . . . . .	50
1.4	Konfokale Kegelschnitte und die Billardeigenschaften . . . . .	52
1.5	Billard in einer Ellipse . . . . .	53
2	Quadriken . . . . .	53
2.1	Definition und Basiseigenschaften . . . . .	53
2.2	Bild einer Quadrik unter affiner Transformation . . . . .	55
2.3	Euklidische Klassifikation der Quadriken . . . . .	56
2.4	Affine Klassifikation der Quadriken . . . . .	58
2.5	Quadriken in $\mathbb{R}^2$ . . . . .	58
2.6	Quadriken in $\mathbb{R}^3$ . . . . .	58
3	Geometrie der Quadriken . . . . .	58
3.1	Die Einheitshyperbel und hyperbolische Trigonometrie . . . . .	58
3.2	Hyperbolische Drehungen . . . . .	59
3.3	Parabolische Drehungen . . . . .	60
3.4	Euklidische vs. affine Invarianten . . . . .	60
3.5	Konjugierte Durchmesser . . . . .	62
3.6	Steiner-Ellipse und andere eingeschriebene Ellipsen . . . . .	63
3.7	Sätze von Brianchon und Pascal . . . . .	64
4	Polarität bezüglich einer Quadrik . . . . .	65
4.1	Symmetrische Bilinearformen und quadratische Formen . . . . .	65
4.2	Orthogonalkomplement und konjugierte Durchmesser . . . . .	66

4.3	Polarität . . . . .	67
4.4	Geometrische Eigenschaften der Polarität . . . . .	68
4.5	Duale Sätze . . . . .	70
4.6	Geraden auf dem hyperbolischen Paraboloid und auf dem einschalen Hyperboloid . . . . .	71
4.7	Beweis der Sätze von Brianchon und Pascal . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Projektive Geometrie</b>	<b>74</b>
1	Projektive Räume und projektive Abbildungen . . . . .	74
1.1	Zentralprojektion zwischen affinen Unterräumen . . . . .	74
1.2	Projektivierung eines Vektorraums und projektiver Abschluss eines affinen Raums . . . . .	75
1.3	Projektive Abbildungen und Zentralprojektionen . . . . .	76
1.4	Der Hauptsatz der projektiven Geometrie . . . . .	79
1.5	Topologie der projektiven Räume . . . . .	80
2	Inzidenzsätze und projektive Dualität . . . . .	82
2.1	Sätze von Pascal und Brianchon für Kegelschnitte . . . . .	82
2.2	Sätze von Pappos und Desargues . . . . .	83
2.3	Projektive Dualität . . . . .	85
3	Koordinaten im projektiven Raum . . . . .	86
3.1	Homogene Koordinaten . . . . .	86
3.2	Projektive Transformationen in Koordinaten . . . . .	87
3.3	Projektive Unterräume in Koordinaten . . . . .	88
3.4	Projektive Quadriken . . . . .	88
3.5	Polarität bezüglich projektiver Quadriken . . . . .	90
3.6	Konjugierte Durchmesser und projektive Polarität . . . . .	91
4	Das Doppelverhältnis . . . . .	93
4.1	Geometrischer Zugang . . . . .	93
4.2	Doppelverhältnis als Koordinate auf einer projektiven Geraden . . . . .	94
4.3	Symmetrien des Doppelverhältnisses . . . . .	96
4.4	Harmonische Punktepaare und vollständiges Vierseit . . . . .	98
4.5	Doppelverhältnis und Dualität . . . . .	99
4.6	Doppelverhältnis von Punkten auf einem Kegelschnitt . . . . .	101
<b>5</b>	<b>Sphärische Geometrie</b>	<b>103</b>
1	Längen und Winkel . . . . .	103
1.1	Abstandsmessung in der sphärischen Geometrie . . . . .	103
1.2	Duale sphärische Dreiecke . . . . .	104
1.3	Sinus- und Kosinussätze für sphärische Dreiecke . . . . .	106
2	Winkel und Krümmung . . . . .	109
2.1	Kosinussatz auf der Sphäre vom Radius $R$ . . . . .	109
2.2	Fläche eines sphärischen Vielecks . . . . .	110
3	Elliptische Geometrie . . . . .	111
3.1	Der Raum und die Gruppe . . . . .	111

3.2	Abstandmessung in der elliptischen Geometrie . . . . .	112
3.3	Gnomonische Projektion . . . . .	113
<b>6</b>	<b>Hyperbolische Geometrie</b>	<b>115</b>
1	Das Hyperboloid-Modell . . . . .	115
1.1	Der Raum und die Gruppe . . . . .	115
1.2	Abstandmessung in der hyperbolischen Geometrie . . . . .	116
1.3	Das Cayley-Klein-Modell . . . . .	117
1.4	Lorentz-Matrizen . . . . .	119
1.5	Untervektorräume vom Minkowski-Raum . . . . .	121
1.6	Diederwinkel im hyperbolischen Raum . . . . .	122
2	Geometrie der hyperbolischen Dreiecke . . . . .	124
2.1	Hyperbolische Dreiecke und ihre Dualen . . . . .	124
2.2	Das Lorentz-Kreuzprodukt . . . . .	125
2.3	Sinus- und Kosinussätze für hyperbolische Dreiecke . . . . .	127
2.4	Rechtwinklige Dreiecke . . . . .	129
2.5	Der Abstand von Punkt zu Gerade und zwischen zwei Geraden . .	129
2.6	Ideale und hyperideale Dreiecke . . . . .	132
2.7	Fläche eines hyperbolischen Vielecks . . . . .	133

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1 Was ist Geometrie?

Euklidische, affine, projektive, sphärische, hyperbolische Geometrie. Verbindungen zu Forschung und Anwendungen.

Geschichte:

- Euklid: Axiomatische Methode.
- Descartes (und Fermat und Vorgänger): die Koordinatenmethode, erste “Algebraisierung” der Geometrie.
- Perspektive in der Malerei. Projektive Geometrie.
- Problem des fünften Postulats (das Parallelenaxiom): folgt es aus den anderen Axiomen? Viele vergebliche Versuche, es herzuleiten.
- Anfang des XIX Jh.: Aufbau der nichteuklidischen (hyperbolischen) Geometrie durch J. Bolyai und Lobatschewski auf der Basis der Negation des fünften Postulats. Keine unmittelbaren Widersprüche.
- Riemannsche Geometrie: “gekrümmte Räume”.
- Ende XIX Jh.: Beginn der systematischen Axiomatisierung der Mathematik.
- Zur gleichen Zeit: zweite Algebraisierung der Geometrie; das Erlanger Programm von Felix Klein: Geometrie als Transformationsgruppe.

Mehr über Geschichte: [Sti10].

Synthetische Geometrie: nur geometrische Axiome und Argumente, “reine Geometrie”. Analytische Geometrie: Benutzung der Koordinaten und Gleichungen. Beide Ansätze haben ihre Vorteile.

## 2 Gruppenwirkung

### 2.1 Definition und Beispiele

Sei  $X$  eine Menge. Durch  $S_X$  bezeichnen wir die Menge aller bijektiven Abbildungen von  $X$  auf sich selbst:

$$S_X := \{f: X \rightarrow X \mid f \text{ bijektiv}\}$$

Die Menge  $S_X$  bildet eine Gruppe, wobei die Gruppenoperation die Komposition der Abbildungen ist. (Stellen Sie fest, dass die Gruppenaxiome erfüllt sind!) Wir nennen  $S_X$  die *Permutationsgruppe* von  $X$ . Wenn  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ , dann wird  $S_X$  als  $S_n$  bezeichnet.

**Definition 1.1.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $X$  eine Menge. Eine Gruppenwirkung (oder Gruppenoperation) von  $G$  auf  $X$  ist ein Homomorphismus  $G \rightarrow S_X$ . Explizit, das ist eine Abbildung  $\varphi: G \rightarrow S_X$ , sodass

$$\varphi(gh) = \varphi(g) \circ \varphi(h) \tag{1.1}$$

für alle  $g, h \in G$  gilt.

Insbesondere gilt  $\varphi(e) = \text{id}_X$  und  $\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1}$ .

Anstelle von  $\varphi: G \rightarrow S_X$  schreiben wir manchmal  $G \overset{\varphi}{\curvearrowright} X$  oder  $G \curvearrowright X$ .

**Beispiel 1.2.** 1. Die Gruppe  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$  der regulären (invertierbaren) Matrizen wirkt auf  $\mathbb{R}^n$ .

2. Die Untergruppen von  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$

$$\text{SL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$$

$$\text{O}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) \mid A^\top A = E\}$$

wirken auf  $\mathbb{R}^n$ .

3. Jede Gruppe wirkt auf sich selbst mittels  $g \mapsto L_g \in S_G$ , wobei

$$L_g: G \rightarrow G, \quad L_g(h) = gh$$

Die Abbildung  $L_g$  heißt Linkstranslation.

**Aufgabe 1.3.** Analog definiert man die Rechtstranslation

$$R_g: G \rightarrow G, \quad R_g(h) = hg$$

(Wann) ist  $g \mapsto R_g$  ein Homomorphismus? Was muss man ändern, damit es zu einem Homomorphismus wird?

Spezialisierung des letzten Beispiels. Der Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  ist eine Gruppe bezüglich Vektoraddition. Folglich wirkt er auf sich selbst durch Translationen. (Da  $\mathbb{R}^n$  eine abelsche Gruppe ist, gibt es keinen Unterschied zwischen Links- und Rechtstranslation.)

## 2.2 Treu, frei, transitiv

Wenn es zu keiner Verwirrung führt, schreiben wir  $g(x)$  anstelle von  $\varphi(g)(x)$ . Wenn man will, darf man auch  $gx$  schreiben. Die Eigenschaft (1.1) wird zur

$$(gh)(x) = g(h(x)) \quad \text{bzw.} \quad (gh)x = g(hx)$$

Das sieht sehr nach dem Assoziativgesetz aus, man soll aber beachten, dass  $gh$  die Gruppenmultiplikation ist, und  $hx$  die Gruppenwirkung ist (das Bild von  $x$  unter der dem Gruppenelement  $h$  zugeordneten Abbildung).

Ein völlig uninteressantes Beispiel einer Gruppenwirkung ist  $g(x) = x$  für alle  $g$  und  $x$ . Das entspricht dem trivialen Homomorphismus

$$G \rightarrow S_X, \quad g \mapsto \text{id}_X \quad \text{für alle } g$$

Der andere (interessante) Extremfall ist, wenn *keinem*  $g$  (ausser der Einheit der Gruppe) die Identitätsabbildung zugeordnet wird.

**Definition 1.4.** Eine Wirkung  $\varphi: G \rightarrow S_X$  heißt *treu*, wenn  $\varphi$  injektiv ist; mit anderen Worten, wenn  $\text{Ker } \varphi$  die triviale Untergruppe  $\{e\} \subset G$  ist.

**Bemerkung 1.5.** Wenn  $G \rightarrow S_X$  eine treue Wirkung ist, dann können wir die Gruppe  $G$  als Untergruppe von  $S_X$  betrachten, indem wir sie mit ihrem Bild in  $S_X$  identifizieren.

Jede untreue Gruppenwirkung kann zu einer treuen “vereinfacht” werden, indem man  $G$  nach der normalen Untergruppe  $\text{Ker } \varphi$  faktorisiert.

**Definition 1.6.** Eine Wirkung  $\varphi: G \rightarrow S_X$  heißt *frei*, wenn

$$g(x) \neq x$$

für alle  $g \neq e$  und alle  $x \in X$  gilt, mit anderen Worten, jedes nichttriviale Element von  $G$  wirkt auf  $X$  ohne Fixpunkte.

**Aufgabe 1.7.** Jede freie Wirkung ist treu.

**Definition 1.8.** Eine Wirkung heißt *transitiv*, wenn es für alle  $x, y \in X$  ein  $g \in G$  gibt, sodass  $g(x) = y$  gilt.

**Beispiel 1.9.** Die Wirkung von  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$  auf  $\mathbb{R}^n$  ist treu. Sie ist nicht frei, denn es gibt lineare Transformationen mit dem Eigenwert 1; noch einfacher: jede lineare Transformation bildet 0 auf 0 ab, die 0 ist also ein Fixpunkt für alle Gruppenelemente. Aus dem selben Grund ist die Wirkung nicht transitiv: 0 kann nicht auf ein anderes Element abgebildet werden.



## 2.3 Orbits

**Definition 1.10.** Sei  $G \curvearrowright X$  eine Gruppenwirkung. Der Orbit (oder die Bahn) eines Punktes  $x \in X$  ist die Menge aller Punkte, in die  $x$  durch die Wirkung von  $G$  überführt werden kann:

$$\text{Orb}(x) := \{y \in X \mid \exists g \in G \text{ sodass } y = g(x)\}$$

**Proposition 1.11.** Die Menge  $X$  ist disjunkte Vereinigung der Orbits.

*Beweis.* Wir zeigen, dass

$$x \sim y \Leftrightarrow y \text{ liegt auf dem Orbit von } x$$

eine Äquivalenzrelation ist. Dann sind die Orbits Äquivalenzklassen und die Behauptung folgt.

Erstens,  $x \sim x$ , da  $e(x) = x$ . Zweitens,  $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ , da aus  $y = g(x)$  folgt  $x = g^{-1}(y)$ . Drittens, aus  $y = g(x)$  und  $z = h(y)$  folgt

$$z = h(g(x)) = (hg)(x)$$

□

**Proposition 1.12.** Eine Gruppenwirkung auf  $X$  ist transitiv genau dann, wenn sie nur einen Orbit hat, und zwar  $X$  selbst.

*Beweis.* Klar.

□

**Satz 1.13.** Sei  $G \curvearrowright X$  eine freie transitive Wirkung und sei  $x \in X$ . Dann ist die Abbildung

$$I_x: G \rightarrow X, \quad g \mapsto g(x)$$

eine Bijektion.

*Beweis.* Zwei-Zeilen-Beweis:

$$G \curvearrowright X \text{ transitiv} \Rightarrow I_x \text{ surjektiv}$$

$$G \curvearrowright X \text{ frei} \Rightarrow I_x \text{ injektiv}$$

Die erste Zeile ist klar, die zweite kann wie folgt erklärt werden. Sei  $I_x$  nicht injektiv, dann

$$\exists g \neq h: g(x) = h(x) \Rightarrow h^{-1}g(x) = x$$

also das Element  $h^{-1}g \neq e$  wirkt mit einem Fixpunkt, was der Freiheit der Wirkung widerspricht.

□

## 2.4 Affine Räume

**Definition 1.14.** *Ein affiner Raum ist eine Menge mit einer freien und transitiven Wirkung der additiven Gruppe eines Vektorraums.*

Sei  $V$  ein Vektorraum, und  $V \curvearrowright A$  eine transitive freie Wirkung. Das bedeutet, jedem Punkt  $p \in A$  und jedem Vektor  $v \in V$  wird ein Element  $v(p) \in A$  zugeordnet. Dabei gilt

$$(v + w)(p) = v(w(p))$$

Nennen wir die Wirkung  $v(p)$  das “Abtragen des Vektors  $v$  vom Punkt  $p$ ”. Die Bezeichnung  $p + v := v(p)$  lässt uns

$$p + (v + w) = (p + v) + w$$

schreiben (Beweis:  $p + (v + w) = (v + w)(p) = (w + v)(p) = w(v(p)) = (p + v) + w$ ). Andererseits vertuscht sie die Tatsache, dass  $p + v$  das Abtragen ist, und  $v + w$  die Vektoraddition. Mit Worten:

Das Abtragen der Summe  $v + w$  von einem Punkt  $p$  liefert den selben Punkt wie das sukzessive Abtragen von  $v$  und  $w$ .

Im Alltag lernen wir zuerst die affine Ebene (Blatt Papier) und den affinen Raum (unsere Welt) kennen, und erst danach in der Schule und Universität Vektoren und Vektorräume. In Mathematik ist es genau umgekehrt.

Die im Satz 1.13 definierte Abbildung  $I_p: V \rightarrow A$  ist eine Bijektion zwischen dem Vektorraum  $V$  und dem affinen Raum  $A$ , die  $0 \in V$  auf  $p$  abbildet, siehe Abb. 1.1. Sie “wählt  $p$  zum Koordinatenursprung in  $A$ ”, und damit kann der affine Raum mit einem Vektorraum identifiziert werden. Man drückt es manchmal so aus: “Ein affiner Raum ist ein Vektorraum, wo man die Lage des Koordinatenursprungs vergessen hat.”

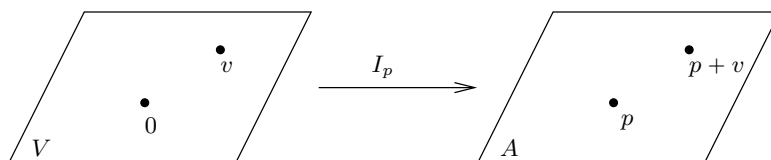


Abbildung 1.1: Bijektion zwischen einem Vektorraum und einem affinen Raum.

---

Literatur: [Ber09, Abs. 1.1–1.6], [Fis85, Abs. 1.0].

# Kapitel 2

## Euklidische und affine Geometrie

### 1 Isometrien: Darstellung durch Spiegelungen

#### 1.1 Isometrien

Mit  $\mathbb{E}^n$  bezeichnen wir die euklidische Ebene ( $n = 2$ ) bzw. den euklidischen Raum ( $n = 3$ ).

**Definition 2.1.** Eine bijektive Abbildung  $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  heißt Kongruenztransformation oder Isometrie, wenn sie Abstände erhält, also

$$\text{dist}(f(x), f(y)) = \text{dist}(x, y)$$

für alle  $x, y \in \mathbb{E}^n$  gilt.

Die Menge aller Isometrien von  $\mathbb{E}^n$  wird mit  $\text{Isom}(\mathbb{E}^n)$  bezeichnet.

**Proposition 2.2.** Isometrien von  $\mathbb{E}^n$  bilden eine Gruppe. Diese Gruppe wirkt auf eine natürliche Weise auf  $\mathbb{E}^n$ .

*Beweis.* Nach Definition ist  $\text{Isom}(\mathbb{E}^n)$  eine Teilmenge der Permutationsgruppe  $S_{\mathbb{E}^n}$ . Folglich reicht es zu zeigen, dass

- Komposition zweier Isometrien;
- das Inverse jeder Isometrie;
- die Identitätsabbildung

auch Isometrien sind. Dann ist  $\text{Isom}(\mathbb{E}^n)$  eine Untergruppe von  $S_{\mathbb{E}^n}$ . □

**Beispiel 2.3.** Die folgenden Abbildungen sind isometrisch.

- *Translation* um einen Vektor  $a \in \mathbb{R}^n$ .
- *Spiegelung* an einer Geraden in  $\mathbb{E}^2$  oder an einer Ebene in  $\mathbb{E}^3$ .

- *Drehung* um einen Punkt in  $\mathbb{E}^2$  oder um eine Gerade in  $\mathbb{E}^3$ .

Kongruenztransformationen werden benutzt, um Kongruenz der geometrischen Figuren zu definieren. Jede Gruppenwirkung  $G \curvearrowright X$  erzeugt eine Gruppenwirkung  $G \curvearrowright 2^X$  auf der Menge aller Teilmengen von  $X$ . Und zwar, für  $A \subset X$  definieren wir

$$g(A) := \{g(x) \mid x \in A\}$$

**Definition 2.4.** Zwei Teilmengen  $A, B \subset \mathbb{E}^n$  heißen kongruent, wenn es eine Isometrie  $f \in \text{Isom}(\mathbb{E}^n)$  existiert, sodass  $f(A) = B$ .

Zum Beispiel, alle einpunktigen Mengen sind zueinander kongruent, weil die Isometrien auf  $\mathbb{E}^n$  transitiv wirken (jeder Punkt kann auf einen anderen z.B. durch eine Translation der Ebene/Raumes abgebildet werden).

**Proposition 2.5.** Seien  $A, B, C \in \mathbb{E}^2$  drei nicht kollineare Punkte. Wenn  $A', B', C' \in \mathbb{E}^2$  die Bedingungen

$$AB = A'B', \quad BC = B'C', \quad CA = C'A'$$

erfüllen, dann gibt es genau eine Isometrie  $f: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$ , sodass  $f(A) = A'$ ,  $f(B) = B'$  und  $f(C) = C'$ .

*Beweis.* Die Existenz von  $f$  ist zum SSS-Kongruenzsatz äquivalent. Für Eindeutigkeit siehe Aufgabe 2.6. □

**Aufgabe 2.6.** Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Jede Isometrie von  $\mathbb{E}^2$  ist durch die Bilder von drei nicht kollinearen Punkten  $A, B, C$  eindeutig bestimmt.
2. Wenn  $f \in \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$  und  $f(A) = A$ ,  $f(B) = B$ ,  $f(C) = C$  für nicht kollineare  $A, B, C$ , dann  $f = \text{id}$ .

*Beweise die zweite Aussage.*

Später werden wir eine Verallgemeinerung der Proposition 2.5 auf höhere Dimensionen beweisen.

## 1.2 Satz über $n + 1$ Spiegelungen

**Satz 2.7.** Jede Kongruenztransformation der Ebene kann als Komposition von höchstens drei Spiegelungen an Geraden dargestellt werden.

Jede Kongruenztransformation des Raumes kann als Komposition von höchstens vier Spiegelungen an Ebenen dargestellt werden.

*Beweis.* Sei  $f \in \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ . Seien  $A, B, C \in \mathbb{E}^2$  drei beliebige nicht kollineare Punkte, und seien

$$A' := f(A), \quad B' := f(B), \quad C' := f(C)$$

Wir werden Isometrien  $S_1, S_2, S_3$  (wobei jede  $S_i$  eine Geradenspiegelung oder die Identitätsabbildung ist) so konstruieren, dass

$$S_3 \circ S_2 \circ S_1(A) = f(A), \quad S_3 \circ S_2 \circ S_1(B) = f(B), \quad S_3 \circ S_2 \circ S_1(C) = f(C) \quad (2.1)$$

Nach Proposition 2.5 wird daraus  $S_3 \circ S_2 \circ S_1 = f$  folgen.

Wenn  $A \neq A'$ , dann sei  $S_1$  die Spiegelung an der Mittelsenkrechten zwischen  $A'$  und  $A$ , sodass  $S_1(A) = A'$ . Wenn  $A' = A$ , dann sei  $S_1 = \text{id}$ .

Es gilt

$$\text{dist}(A', B') = \text{dist}(A, B) = \text{dist}(S_1(A), S_1(B)) = \text{dist}(A', S_1(B))$$

Folglich liegt der Punkt  $A'$  auf der Mittelsenkrechten zwischen  $B'$  und  $S_1(B)$ . Wenn  $S_2$  die Spiegelung an  $\ell_2$  ist, dann gilt

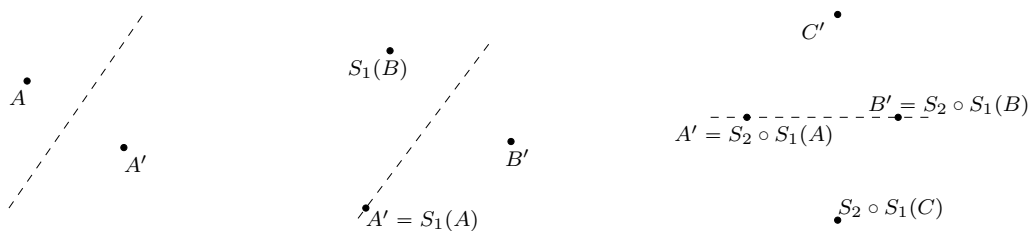
$$S_2 \circ S_1(A) = S_2(A') = A', \quad S_2 \circ S_1(B) = B'$$

Wenn  $B' = S_1(B)$ , sodass die Mittelsenkrechte nicht definiert ist, dann setze  $S_2 = \text{id}$ . Die obigen Gleichungen bleiben richtig.

Nun haben wir

$$\begin{aligned} \text{dist}(C', A') &= \text{dist}(S_2 \circ S_1(C), S_2 \circ S_1(A)) = \text{dist}(S_2 \circ S_1(C), A') \\ \text{dist}(C', B') &= \text{dist}(S_2 \circ S_1(C), S_2 \circ S_1(B)) = \text{dist}(S_2 \circ S_1(C), B') \end{aligned}$$

Daraus folgt dass entweder  $C' = S_2 \circ S_1(C)$  oder sind  $C'$  und  $S_2 \circ S_1(C)$  bezüglich der Geraden  $A'B'$  symmetrisch. Im ersteren Fall setzen wir  $S_3 = \text{id}$ , im letzteren sei  $S_3$  die Spiegelung an der Geraden  $A'B'$ . Dann gilt (2.1) und der Satz ist im Fall der Ebene bewiesen.



Der Beweis für  $\mathbb{E}^3$  ist analog, vorausgesetzt dass jede Isometrie von  $\mathbb{E}^3$  durch die Bilder von 4 nicht komplanaren Punkte eindeutig bestimmt ist.  $\square$

Vergleiche diesen Beweis mit dem der Darstellbarkeit jeder Permutation einer  $n$ -elementigen Menge als Komposition von höchstens  $n - 1$  Transpositionen.

### 1.3 Orientierung; Eigentliche und uneigentliche Isometrien

Darstellung einer Isometrie als Komposition der Spiegelungen ist nicht eindeutig. Sogar die Anzahl der Spiegelungen ist nicht eindeutig: die Identität kann als Komposition von 0 Spiegelungen dargestellt werden, oder als Komposition zweier Spiegelungen an derselben Geraden/Ebene. Invariant ist aber die Parität der Anzahl der benötigten Spiegelungen.

**Definition 2.8.** *Orientierter Winkel  $\in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  zwischen zwei Halbgeraden.*

Jede Isometrie  $f$  erhält die Winkelmaß:  $\angle A'B'C' = \angle ABC$ , wenn  $A' = f(A)$  usw. Wenn wir aber *orientierte Winkel* in der Ebene betrachten, dann gilt  $\vec{\angle} A'B'C' = \pm \vec{\angle} ABC$ . Wir nehmen es ohne Beweis an, dass jede Isometrie entweder alle orientierten Winkel erhält oder sie alle umkehrt.

**Definition 2.9.** *Eine Isometrie von  $\mathbb{E}^2$  heißt orientierungserhaltend, wenn sie die orientierten Winkel erhält, und orientierungsumkehrend, wenn sie sie umkehrt.*

Definition der Orientierung in  $\mathbb{E}^3$  benutzt die Begriffe der “Rechtsschraube” und “Linksschraube”.

Anstelle von “orientierungserhaltend” und “orientierungsumkehrend” sagt man auch “eigentlich” und “uneigentlich”.

**Proposition 2.10.** *Komposition zweier eigentlichen oder zweier uneigentlichen Isometrien ist eigentlich. Komposition einer eigentlichen und einer uneigentlichen Isometrie (in beliebiger Reihenfolge) ist uneigentlich.*

*Beweis.* Im Fall von  $\mathbb{E}^2$  folgt es direkt aus der Definition. □

**Korollar 2.11.** *Die Menge  $\text{Isom}^+(\mathbb{E}^n)$  aller eigentlichen Isometrien bildet eine Gruppe.*

**Proposition 2.12.** *Eine Isometrie ist eigentlich (bzw. uneigentlich) genau dann, wenn sie als Komposition von gerade vielen (bzw. ungerade vielen) Spiegelungen dargestellt werden kann.*

*Beweis.* Jede Spiegelung (an einer Geraden in  $\mathbb{E}^2$  oder an einer Ebene in  $\mathbb{E}^3$ ) ist orientierungsumkehrend. Aus Proposition 2.10 folgt nun, dass Komposition von gerade (bzw. ungerade) vielen Spiegelungen eigentlich (bzw. uneigentlich) ist. Daraus folgt die Behauptung. □

Vergleiche das mit der Parität von Permutationen.

### 1.4 Klassifikation der Isometrien der Ebene und des Raumes

**Satz 2.13.** *Jede Isometrie der euklidischen Ebene hat eine der folgenden Formen:*

1. Translation  $T_v$  um einen Vektor  $v$ ;
2. Drehung  $D_P^\varphi$  mit Drehzentrum  $P$  und Drehwinkel  $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ;

3. Gleitspiegelung  $ST_{\ell,v}$ .

**Definition 2.14.** Eine Gleitspiegelung der euklidischen Ebene ist Komposition der Spiegelung an einer Geraden und der Translation um einen zu dieser Geraden parallelen Vektor:

$$ST_{\ell,v} := S_{\ell} \circ T_v = T_v \circ S_{\ell}$$

wobei  $v \parallel \ell$ .

**Lemma 2.15.** Seien  $\ell_1$  und  $\ell_2$  zwei Geraden in der Ebene, und seien  $S_1$  und  $S_2$  die zugehörigen Spiegelungen.

1. Wenn  $\ell_1 \parallel \ell_2$ , dann

$$S_2 \circ S_1 = T_{2v},$$

wobei der Vektor  $v$  senkrecht zu  $\ell_1$  und  $\ell_2$  ist, in Richtung von  $\ell_1$  zu  $\ell_2$  zeigt, und den Betrag gleich dem Abstand zwischen  $\ell_1$  und  $\ell_2$  hat.

2. Wenn  $\ell_1$  und  $\ell_2$  sich im Punkt  $P$  schneiden, dann

$$S_2 \circ S_1 = D_P^{2\varphi},$$

wobei  $\varphi$  der Winkel von  $\ell_1$  zu  $\ell_2$  ist.

Beachte, dass  $\varphi$  nur bis auf ein Vielfaches von  $\pi$  definiert ist. Dafür aber hat  $2\varphi$  einen wohldefinierten Wert in  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ .

*Beweis.* In beiden Situationen braucht man entweder eine Fallunterscheidung zu machen oder Koordinaten zu benutzen (kartesische für  $\ell_1 \parallel \ell_2$  und Polarkoordinaten mit Zentrum  $P$  für  $\ell_1 \cap \ell_2 = \{P\}$ ). □

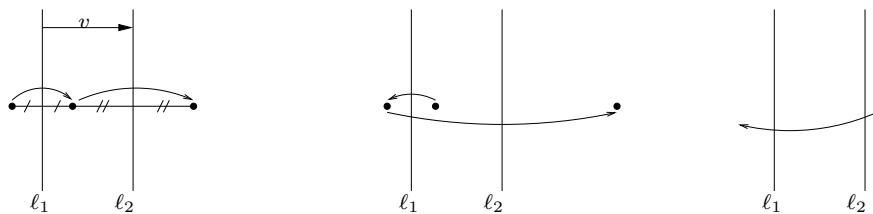


Abbildung 2.1: Komposition der Spiegelungen an zwei parallelen Geraden. Bestimme das Bild des Punktes im dritten Fall selbst.

*Beweis des Satzes 2.13.* Sei  $f \in \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ . Nach Satz 2.7 ist  $f$  als Komposition von  $m \leq 3$  Spiegelungen darstellbar.

Wenn  $m = 0$ , dann kann man  $f$  als Translation um den Nullvektor deuten.

Wenn  $m = 1$ , dann ist  $f$  eine Geradenspiegelung.

Wenn  $m = 2$ , dann ist  $f$  nach Lemma 2.15 eine Translation oder Drehung.

Sei  $m = 3$  und  $f = S_3 \circ S_2 \circ S_1$ . Nehmen wir an, dass die Geraden  $\ell_2$  und  $\ell_3$  nicht parallel sind; sei  $P$  ihr Schnittpunkt. Beim Ersetzen von  $\ell_2$  und  $\ell_3$  durch  $\ell'_2$  und  $\ell'_3$ , die sich in demselben Punkt  $P$  schneiden und denselben orientierten Winkel bilden, bleibt die Komposition der Spiegelungen wegen Lemma 2.15 dieselbe:

$$S'_3 \circ S'_2 = S_3 \circ S_2 \Rightarrow S'_3 \circ S'_2 \circ S_1 = S_3 \circ S_2 \circ S_1$$

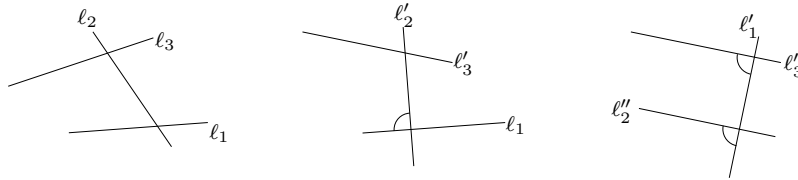
Wenn die Gerade  $\ell_1$  ebenfalls durch  $P$  geht, dann können wir  $\ell_2$  und  $\ell_3$  so drehen, dass  $\ell'_2 = \ell_1$ . Dann ist

$$S'_3 \circ S'_2 \circ S_1 = S'_3$$

eine Spiegelung. Wenn  $\ell_1$  nicht durch  $P$  geht, dann drehen wir  $\ell_2$  und  $\ell_3$  so, dass  $\ell'_2$  senkrecht zu  $\ell_1$  ist. Danach drehen wir  $\ell_1$  und  $\ell'_2$  um ihren Schnittpunkt so, dass  $\ell''_2$  parallel zu  $\ell'_3$  ist. Es folgt

$$S'_3 \circ S''_2 \circ S'_1 = T_{2v} \circ S'_1,$$

wobei  $v$  der Vektor von  $\ell''_2$  zu  $\ell'_3$  ist. Da  $v$  parallel zu  $\ell'_1$  ist, ist  $T_{2v} \circ S'_1$  eine Gleitspiegelung.



**Aufgabe 2.16.** *Behandle den Fall, wo  $\ell_2$  und  $\ell_3$  parallel zueinander sind.*

□

**Satz 2.17.** *Jede eigentliche Isometrie des Raumes ist eine Schraubung (einschließlich Translationen und Achsendrehungen).*

*Jede uneigentliche Isometrie des Raumes ist entweder eine Gleitspiegelung oder eine Drehspiegelung.*

## 1.5 Komposition von Drehungen und der Satz von Napoleon

**Proposition 2.18.** *Komposition zweier Drehungen der euklidischen Ebene ist eine Drehung oder Translation:*

$$D_P^\varphi \circ D_Q^\psi = \begin{cases} D_R^{\varphi+\psi}, & \text{wenn } \varphi + \psi \not\equiv 0 \pmod{2\pi} \\ T_v, & \text{wenn } \varphi + \psi \equiv 0 \pmod{2\pi} \end{cases}$$

*Dabei ist  $R$  der Schnittpunkt der Bilder der Geraden  $PQ$  unter  $D_P^{\varphi/2}$  und unter  $D_Q^{-\psi/2}$ .*

*Komposition einer Drehung und einer Translation in einer beliebigen Reihenfolge ist eine Drehung mit demselben Drehwinkel:*

$$D_P^\varphi \circ T_v = D_Q^\varphi, \quad T_v \circ D_P^\varphi = D_R^\varphi$$



*Beweis.* Sei  $\ell_1$  die Gerade  $PQ$  und seien

$$\ell_2 := D_P^{\varphi/2}(\ell_1), \quad \ell_3 := D_Q^{-\psi/2}(\ell_1)$$

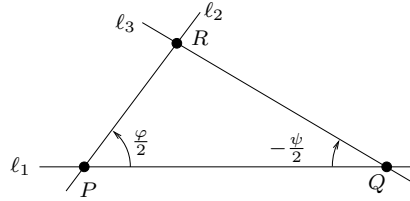


Abbildung 2.2: Komposition zweier Drehungen mit Winkelsumme ungleich Null. Beachte, dass der Punkt  $R$  auf der anderen Seite der Geraden  $PQ$  liegen kann.

Bezeichne mit  $S_i$  die Spiegelung an  $\ell_i$ . Dann gilt nach Lemma 2.15

$$D_P^\varphi = S_2 \circ S_1, \quad D_Q^\psi = S_1 \circ S_3$$

Folglich

$$D_P^\varphi \circ D_Q^\psi = (S_2 \circ S_1) \circ (S_1 \circ S_3) = S_2 \circ (S_1 \circ S_1) \circ S_3 = S_2 \circ S_3$$

Wenn  $\varphi + \psi \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ , dann schneiden sich die Geraden  $\ell_2$  und  $\ell_3$  im Punkt  $R$  und es gilt  $S_2 \circ S_3 = D_R^{2\theta}$ . Hier ist  $\theta \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  der Winkel von  $\ell_3$  zu  $\ell_2$ . Man sieht, dass  $\theta = \frac{\varphi + \psi}{2}$ , z.B. wie folgt: nach dem Drehen von  $\ell_3$  um  $\psi/2$  wird sie zu  $\ell_1$  parallel, nach dem anschliessenden Drehen um  $\varphi/2$  wird sie zu  $\ell_2$  parallel.

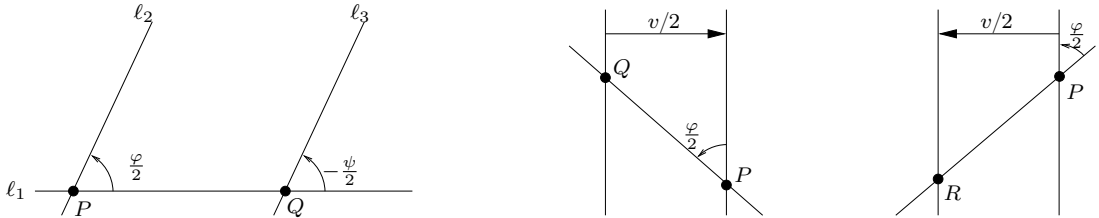
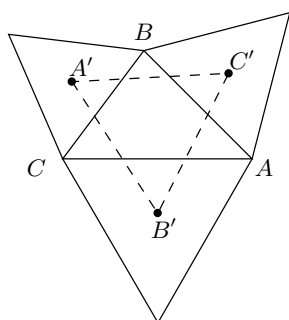


Abbildung 2.3: Die übrigen Fälle der Proposition 2.18.

Für den Fall  $\varphi + \psi \equiv 0 \pmod{2\pi}$ , sowie für die Komposition von Drehung mit Translation siehe Abb. 2.3. □

**Proposition 2.19** (Satz von Napoleon). *Seien auf den Seiten eines beliebigen Dreiecks nach außen reguläre Dreiecke konstruiert. Dann bilden die Zentren dieser Dreiecke selbst ein reguläres Dreieck.*

*Beweis.* Bezeichne die Punkte wie abgebildet und betrachte die Komposition von Drehungen  $D_{A'}^{120^\circ} \circ D_{B'}^{120^\circ}$ .



Nach Proposition 2.18 gilt  $D_{A'}^{120^\circ} \circ D_{B'}^{120^\circ} = D_{C''}^{240^\circ}$ , wobei die Punkte  $A'$ ,  $B'$ ,  $C''$  ein reguläres Dreieck bilden. Wir wollen zeigen, dass  $C'' = C'$ . Betrachten wir hierfür das Bild des Punktes  $A$  unter  $D_{C''}^{240^\circ}$ :

$$D_{C''}^{240^\circ}(A) = D_{A'}^{120^\circ} \circ D_{B'}^{120^\circ}(A) = D_{A'}^{120^\circ}(C) = B$$

Der Drehzentrum einer  $240^\circ$ -Drehung, die  $A$  auf  $B$  abbildet, ist aber  $C'$ . Deswegen  $C' = C''$  und der Satz ist bewiesen.  $\square$

---

Literatur: [Yag62].

## 2 Ähnlichkeitstransformationen

### 2.1 Definition

**Definition 2.20.** Eine bijektive Abbildung  $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  heißt Ähnlichkeitstransformation, wenn es eine Zahl  $k > 0$  gibt, sodass

$$\text{dist}(f(x), f(y)) = k \cdot \text{dist}(x, y)$$

für alle  $x, y \in \mathbb{E}^n$  gilt. Die Zahl  $k$  heißt der Streckungsfaktor oder Koeffizient der Streckung.

Bezeichnen wir die Menge aller Ähnlichkeitstransformationen von  $\mathbb{E}^n$  mit  $\text{Sim}(\mathbb{E}^n)$ .

**Proposition 2.21.** Ähnlichkeitstransformationen bilden eine Gruppe. Außerdem werden die Streckungsfaktoren bei der Komposition multipliziert.

*Beweis.* Seien  $f, g \in \text{Sim}(\mathbb{E}^n)$  Transformationen mit Streckungsfaktoren  $k$ , bzw.  $l$ . Dann gilt

$$\text{dist}((f \circ g)(x), (f \circ g)(y)) = k \cdot \text{dist}(g(x), g(y)) = kl \cdot \text{dist}(x, y)$$

Komposition zweier Ähnlichkeitstransformationen ist also wieder eine Ähnlichkeitstransformation, deren Streckungsfaktor gleich dem Produkt der Streckungsfaktoren der Komponenten ist.

Es bleibt zu zeigen, dass  $\text{id}$  eine Ähnlichkeitstransformation ist, und mit jedem  $f \in \text{Sim}(\mathbb{E}^n)$  auch  $f^{-1} \in \text{Sim}(\mathbb{E}^n)$ .  $\square$

**Beispiel 2.22.** 1. Die zentrische Streckung  $Z_P^k$  mit Zentrum  $P$  und Koeffizienten  $k$ .  
Bei  $k = -1$  kann man  $Z_P^{-1}$  als die Punktspiegelung bezüglich  $P$  definieren.

2. Die Drehstreckung in der euklidischen Ebene

$$ZD_P^{k,\varphi} := Z_P^k \circ D_P^\varphi$$

Beachte, dass

$$ZD_P^{-k,\varphi} = ZD_P^{k,\varphi+\pi}$$

Deswegen sind die zentrischen Streckungen mit negativen Faktoren überflüssig.

**Definition 2.23.** Sei  $f \in \text{Sim}(\mathbb{E}^n)$  mit dem Streckungsfaktor  $k$ . Definiere den signierten Streckungsfaktor von  $f$  als

$$\kappa(f) := \begin{cases} k, & \text{wenn } f \text{ orientierungserhaltend ist} \\ -k, & \text{wenn } f \text{ orientierungsumkehrend ist} \end{cases}$$

Den Streckungsfaktor im Sinne der Definition 2.20 bezeichnen wir mit  $|\kappa|(f) = |\kappa(f)|$ .  
Propositionen 2.10 und 2.21 haben nun zur Folge

**Korollar 2.24.** Bei der Komposition zweier Ähnlichkeitstransformationen werden ihre signierten Streckungsfaktoren multipliziert:

$$\kappa(f \circ g) = \kappa(f) \cdot \kappa(g)$$

Mit anderen Worten ist die Abbildung

$$\kappa: \text{Sim}(\mathbb{E}^n) \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ein Homomorphismus (wobei die  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  als Gruppe bezüglich Multiplikation betrachtet wird).

Beachte, dass eine Punktspiegelung der Ebene orientierungserhaltend ist (sie ist Drehung um  $180^\circ$ ), während eine Punktspiegelung des Raumes orientierungsumkehrend ist (sie ist Drehspiegelung mit Drehung um  $180^\circ$ ).

$$\kappa(Z_P^{-1}) = \begin{cases} 1, & \text{für } n = 2 \\ -1, & \text{für } n = 3 \end{cases}$$

Diese Diskrepanz ist noch ein Grund, zentrische Streckungen mit negativen Faktoren nicht als solche zu bezeichnen.

## 2.2 Klassifikation der Ähnlichkeitstransformationen

**Satz 2.25.** *Jede Ähnlichkeitstransformation der euklidischen Ebene ist entweder eine Isometrie oder Drehstreckung oder Streckspiegelung.*

Eine Streckspiegelung ist Komposition einer zentrischen Streckung mit Spiegelung an einer Geraden durch das Streckungszentrum.

**Lemma 2.26.** *Sei  $f$  eine Ähnlichkeitstransformation mit dem Streckungsfaktor  $|\kappa|(f) \neq 1$ . Dann hat  $f$  einen Fixpunkt: es existiert  $x \in \mathbb{E}^n$  mit  $f(x) = x$ .*

*Beweis.* Wenn  $|\kappa|(f) < 1$ , dann ist  $f$  kontrahierend:

$$\text{dist}(f(x), f(y)) \leq k \cdot \text{dist}(x, y) \text{ mit } k < 1$$

Da der metrische Raum  $\mathbb{E}^n$  vollständig ist, hat  $f$  einen Fixpunkt (der Fixpunktsatz für kontrahierende Abbildungen).

Wenn  $|\kappa|(f) > 1$ , dann ist  $f^{-1}$  kontrahierend. Ein Fixpunkt von  $f^{-1}$  ist auch Fixpunkt von  $f$ .  $\square$

**Lemma 2.27.** *Sei  $f \in \text{Sim}(\mathbb{E}^n)$ , und sei  $P \in \mathbb{E}^n$ . Dann kann  $f$  als Komposition (in beliebiger Reihenfolge) von einer Streckung mit Zentrum  $P$  und einer Isometrie dargestellt werden:*

$$\exists k \in \mathbb{R}_{>0}, g, h \in \text{Isom}(\mathbb{E}^n) : f = Z_P^k \circ g = h \circ Z_P^k$$

*Beweis.* Man setze  $k$  gleich dem Streckungsfaktor von  $f$  und betrachte die Kompositionen  $Z_P^{1/k} \circ f$  und  $f \circ Z_P^{1/k}$ . Beide sind Ähnlichkeitstransformationen mit Streckungsfaktor 1, wegen der Proposition 2.21, und das heißt Isometrien.  $\square$

*Beweis des Satzes 2.25.* Wenn  $|\kappa|(f) = 1$ , dann ist  $f$  eine Isometrie. Wenn  $|\kappa|(f) \neq 1$ , dann hat  $f$  nach Lemma 2.26 einen Fixpunkt  $P$ . Nach Lemma 2.27 gilt  $f = Z_P^k \circ g$ , wobei  $g$  eine Isometrie ist. Dann

$$g(P) = Z_P^{1/k}(f(P)) = Z_P^{1/k}(P) = P$$

also ist  $P$  ein Fixpunkt von  $g$ . Die einzigen Isometrien mit Fixpunkten sind Drehungen und Geradenspiegelungen. Wenn  $g$  eine Drehung ist, dann ist das Drehzentrum ihr einziger Fixpunkt. Folglich

$$f = Z_P^k \circ D_P^\varphi$$

d.h.  $f$  ist eine Drehstreckung. Wenn  $g$  die Spiegelung an einer Geraden  $\ell$  ist, dann gilt  $P \in \ell$ , denn alle Fixpunkte von  $g$  liegen auf  $\ell$ . Also

$$f = Z_P^k \circ S_\ell \text{ mit } P \in \ell$$

d.h.  $f$  ist eine Streckspiegelung.  $\square$

## 2.3 Komposition von Drehstreckungen

**Satz 2.28.** *Komposition zweier Drehstreckungen ist entweder eine Drehstreckung oder Translation. Die Drehwinkel addieren sich, und die Streckungsfaktoren multiplizieren sich bei der Komposition.*

$$ZD_P^{k,\varphi} \circ ZD_Q^{l,\psi} = \begin{cases} ZD_R^{kl,\varphi+\psi}, & \text{wenn } \varphi + \psi \not\equiv 0 \pmod{2\pi} \text{ oder } kl \neq 1 \\ T_v, & \text{wenn } \varphi + \psi \equiv 0 \pmod{2\pi} \text{ und } kl = 1 \end{cases}$$

Spaeter wird ein kurzer analytischer Beweis gegeben. Im Spezialfall der “reinen” Drehungen ist uns dieser Satz bekannt (Proposition 2.18).

Geben wir jetzt einen neuen Beweis des Satzes von Napoleon.

*Beweis der Proposition 2.19.* Betrachten wir die folgende Komposition zweier Drehstreckungen

$$f := ZD_A^{\frac{1}{\sqrt{3}}, 30^\circ} \circ ZD_B^{\sqrt{3}, 30^\circ}$$

Nach dem Satz 2.28 ist  $f$  eine Drehung um  $60^\circ$ . Zeigen wir, dass der Drehzentrum von  $f$  der Punkt  $C'$  ist. In der Tat,

$$f(C') = ZD_A^{\frac{1}{\sqrt{3}}, 30^\circ}(C'') = C'$$

wobei  $C''$  die dritte Ecke des regulären Dreiecks auf der Seite  $AB$  ist. Da das Drehzentrum der einzige Fixpunkt einer nichttrivialen Drehung ist, ist  $C'$  das Zentrum der Drehung  $f$ . Nun bemerken wir

$$f(A') = ZD_A^{\frac{1}{\sqrt{3}}, 30^\circ}(C) = B'$$

Das heißt,  $A'C' = B'C'$  und  $\angle A'C'B' = 60^\circ$ . Also ist  $A'B'C'$  ein reguläres Dreieck.  $\square$

## 2.4 Dilatationsgruppe

**Definition 2.29.** *Eine Ähnlichkeitstransformation von  $\mathbb{E}^n$  heißt Dilatation, wenn sie als Komposition von zentrischen Streckungen und Translationen dargestellt werden kann.*

Bezeichnung für die Menge aller Dilatationen:  $\text{Dil}(\mathbb{E}^n)$ .

**Proposition 2.30.** *Die Menge aller Dilatationen ist eine Gruppe.*

*Beweis.* Nach der Definition sind die Dilatation alle möglichen Kompositionen

$$f = a_1 \circ \dots \circ a_m$$

wobei jede Abbildung  $a_i$  entweder zentrische Streckung oder Translation ist. Daraus folgt unmittelbar, dass Komposition zweier Dilatationen auch eine Dilatation ist.

Das Inverse einer Dilatation ist

$$f^{-1} = a_m^{-1} \circ \dots \circ a_1^{-1}$$

Weil das Inverse jeder zentrischen Streckung eine zentrische Streckung und das Inverse einer Translation eine Translation ist, ist  $f^{-1}$  eine Dilatation.

Schließlich ist die Identität Komposition von Null Translationen; oder, wenn man will  $\text{id} = T_v \circ T_{-v}$ .  $\square$

Überhaupt, wenn man für eine Teilmenge  $A \subset G$  alle möglichen Produkte von Elementen aus  $A$  und von ihren Inversen nimmt, dann erhält man eine Untergruppe von  $G$ . Diese Untergruppe heißt von der Menge  $A$  erzeugt.

**Beispiel 2.31.** 1. Spiegelungen an Geraden (bzw. and Ebenen) erzeugen die Isometrie-Gruppe von  $\mathbb{E}^2$  (bzw. von  $\mathbb{E}^3$ ).

2. Drehungen und Translationen erzeugen die Gruppe der eigentlichen Isometrien von  $\mathbb{E}^n$ ,  $n = 2, 3$ . Man kann zeigen, dass auch Drehungen allein dafür ausreichen.

3. Transpositionen erzeugen die endliche Permutationgruppe. Die 3-Zykel erzeugen die Gruppe der "geraden" Permutationen.

4. Zentrische Streckungen mit einem festen Zentrum  $P_0$  und die Isometrien erzeugen die Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen (siehe Lemma 2.27).

**Satz 2.32.** Jede Bijektion von  $\mathbb{E}^n$  ( $n = 2, 3$ ), die Kollinearität der Punkte erhält und jede Gerade auf eine zu ihr parallele Gerade abbildet, ist eine Dilatation.

---

Literatur: [Yag68].

## 3 Affine Räume und Abbildungen

### 3.1 Punkt plus Vektor, Punkt minus Punkt

Erinnerung: Eine Menge  $A$  heißt affiner Raum mit dem zugehörigen Vektorraum  $V$ , wenn die additive Gruppe  $V$  auf  $A$  transitiv und frei wirkt. Mit anderen Worten, man hat eine Abbildung

$$A \times V \rightarrow A, \quad (p, v) \mapsto p + v$$

(genannt "Abtragen des Vektors  $v$  vom Punkt  $p$ "), die die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. für alle  $p \in A$ ,  $v, w \in V$  gilt

$$(p + v) + w = p + (v + w)$$

2. die Abbildung

$$I_p: V \rightarrow A, v \mapsto p + v$$

ist bijektiv für alle  $p \in A$ .

**Proposition 2.33.** Sei  $A$  ein affiner Raum mit dem zugehörigen Vektorraum  $V$ . Dann definiert die Regel

$$p + D(p, q) = q$$

eine Abbildung  $D: A \times A \rightarrow V$  mit den folgenden Eigenschaften:

1. für jedes  $p \in A$  ist die Abbildung

$$D(p, \cdot): q \mapsto D(p, q)$$

bijektiv;

2. für alle  $p, q, r \in A$  gilt

$$D(p, q) + D(q, r) = D(p, r)$$

*Beweis.* Wir haben

$$p + D(p, q) = q \Leftrightarrow q = I_p(D(p, q)) \Leftrightarrow D(p, q) = I_p^{-1}(q)$$

Bei der zweiten Äquivalenz wird benutzt, dass die Abbildung  $I_p$  bijektiv ist. Also ist  $D(p, q)$  eindeutig und wohl definiert. Dasselbe Argument zeigt, dass  $D(p, \cdot) = I_p^{-1}$ . Folglich ist  $D(p, \cdot)$  eine Bijektion. Schliesslich, folgt aus der Definition von  $D$  und der ersten Eigenschaft des Abtragens

$$p + (D(p, q) + D(q, r)) = (p + D(p, q)) + D(q, r) = q + D(q, r) = r$$

Aus  $p + v = r$  folgt  $v = D(p, r)$ , deswegen gilt  $D(p, q) + D(q, r) = D(p, r)$ . □

Abbildung  $D$  mit zwei Eigenschaften wie in Proposition 2.5 kann als alternative Definition einer affinen Struktur benutzt werden.

Die geometrische Bedeutung von  $D(p, q)$  ist unmittelbar: es ist "der Vektor von  $p$  zu  $q$ ". Das motiviert die folgenden Bezeichnungen.

$$D(p, q) =: \vec{pq} =: q - p \tag{2.2}$$

Man kann zeigen, dass die Gruppenwirkungseigenschaft  $(p + v) + w = p + (v + w)$  die Rechenregel

$$(q + w) - (p + v) = (q - p) + (w - v) \quad \text{usw.}$$

impliziert.

### 3.2 Linearkombination von Punkten?

Vektoren eines Vektorraumes können mit Skalaren multipliziert und miteinander addiert werden:

$$\lambda v, \quad v + w$$

Das erlaubt uns, beliebige Linearkombinationen  $\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i$  zu bilden. Für die Punkte eines affinen Raumes sind weder Skalarmultiplikation  $\lambda p$  noch die Summe  $p + q$  definiert. In zwei Spezialfällen können wir allerdings einer Linearkombination von Punkten eine Bedeutung geben.

**Definition 2.34.** Seien  $p_1, \dots, p_m \in A$  Punkte eines affinen Raumes, und seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  reelle Zahlen mit  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 0$ . Man definiere

$$\lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_m p_m := \lambda_1 D(p, p_1) + \dots + \lambda_m D(p, p_m) \in V$$

für einen beliebigen Punkt  $p \in A$ .

**Aufgabe 2.35.** Zeige, dass bei  $\sum_i \lambda_i = 0$  der Vektor

$$\lambda_1 D(p, p_1) + \dots + \lambda_m D(p, p_m)$$

von der Wahl des Punktes  $p \in A$  unabhängig ist, und daher  $\sum_i \lambda_i p_i$  wohldefiniert.

Zeige außerdem, dass bei  $\sum_i \lambda_i = 0$  und  $\sum_i \mu_i = 0$  gilt

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i p_i + \sum_{i=1}^m \mu_i p_i = \sum_{i=1}^m (\lambda_i + \mu_i) p_i$$

Insbesondere gilt

$$\lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_m p_m = \lambda_2 D(p_1, p_2) + \dots + \lambda_m D(p_1, p_m)$$

Ein Spezialfall davon ist  $p_2 - p_1 = D(p_1, p_2)$ , deswegen ist Definition 2.34 mit der Bezeichnung (2.2) verträglich.

**Definition 2.36.** Seien  $p_1, \dots, p_m \in A$  Punkte eines affinen Raumes, und seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  reelle Zahlen mit  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ . Man definiere

$$\lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_m p_m := p + \lambda_1 D(p, p_1) + \dots + \lambda_m D(p, p_m) \in A$$

für einen beliebigen Punkt  $p \in A$ . Der resultierende Punkt heißt affine Kombination von Punkten  $p_1, \dots, p_m$  mit Koeffizienten  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ .

**Aufgabe 2.37.** Zeige, dass die affine Kombination von Punkten wohldefiniert ist.

### 3.3 Affine Abbildungen: Definition

**Definition 2.38.** Eine Abbildung  $f: A \rightarrow B$  zwischen zwei affinen Räumen heißt affin, wenn

$$f(\lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_m p_m) = \lambda_1 f(p_1) + \dots + \lambda_m f(p_m) \quad (2.3)$$

für alle affinen Kombinationen gilt.

**Beispiel 2.39.** Die folgenden Abbildungen sind affin:

1. Translation  $T_v: p \mapsto p + v$ ;
2. Konstante Abbildung  $p \mapsto p_0$  für ein festes  $p_0$ ;
3. Zentrische Streckung  $Z_{p_0}^k: p \mapsto p_0 + k(p - p_0)$



**Proposition 2.40.** *Eine Abbildung  $f$  ist genau dann affin, wenn*

$$f(\lambda p + (1 - \lambda)q) = \lambda f(p) + (1 - \lambda)f(q) \quad (2.4)$$

für alle Punkte  $p, q$  und alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

*Beweis.* Gleichung (2.4) ist ein Spezialfall von (2.3) für  $m = 2$ , also (2.3)  $\Rightarrow$  (2.4).

Aus (2.4) folgt (2.3) mit Induktion. Bei  $m = 1$  ist (2.3) trivial, bei  $m = 2$  ist sie äquivalent zu (2.4). Für den Induktionsschritt wähle ein  $\lambda_i \neq 1$  (alle  $\lambda_i$  können nicht gleich 1 sein); oBdA sei  $\lambda_1 \neq 1$ . Dann verwende

$$f(\lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_m p_m) = f\left(\lambda_1 p_1 + (1 - \lambda_1) \left(\frac{\lambda_2}{1 - \lambda_1} p_2 + \dots + \frac{\lambda_m}{1 - \lambda_1} p_m\right)\right)$$

□

**Definition 2.41.** *Eine bijektive affine Abbildung eines affinen Raumes auf sich selbst heißt Affinität oder affine Transformation.*

Bezeichnung für die Menge aller Affinitäten:

$$\text{Affin}(A) := \{f: A \rightarrow A \mid f \text{ affin und bijektiv}\}$$

**Proposition 2.42.** *Affinitäten bilden eine Gruppe.*

*Beweis.* Klar. □

### 3.4 Affine Hülle und affine Abhängigkeit

**Definition 2.43.** *Die affine Hülle einer endlichen Menge der Punkte im affinen Raum ist die Menge all ihrer affinen Kombinationen:*

$$\text{aff}\{p_1, \dots, p_m\} := \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i p_i \mid \sum_i \lambda_i = 1 \right\}$$

**Beispiel 2.44.** Die affine Hülle zweier verschiedenen Punkte  $p$  und  $q$

$$\text{aff}\{p, q\} = \{\lambda p + (1 - \lambda)q \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{q + \lambda(p - q) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

heißt die Gerade durch  $p$  und  $q$ .

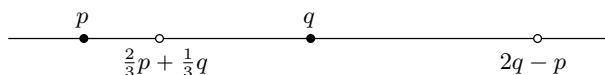


Abbildung 2.4: Affine Kombinationen  $\lambda p + (1 - \lambda)q$ .

Der Punkt  $\lambda p + (1 - \lambda)q$  teilt die Strecke  $[p, q]$  im Verhältnis  $(1 - \lambda) : \lambda$ . Bei  $\lambda \notin [0, 1]$  liegt dieser Punkt außerhalb der Strecke, siehe Abb. 2.4. Für  $r = \lambda p + (1 - \lambda)q$  können wir aus

$$\begin{aligned}\overrightarrow{pr} &= \lambda p + (1 - \lambda)q - p = (1 - \lambda)(q - p) \\ \overrightarrow{rq} &= q - \lambda p + (1 - \lambda)q = \lambda(q - p)\end{aligned}$$

das Teilungsverhältnis berechnen:

$$\frac{\overrightarrow{pr}}{\overrightarrow{rq}} = \frac{1 - \lambda}{\lambda}$$

Proposition 2.40 kann jetzt wie folgt umformuliert werden:

Eine Abbildung  $A \rightarrow B$  zwischen zwei affinen Räumen ist genau dann affin, wenn sie Geraden auf Geraden abbildet und die Teilungsverhältnisse erhält.

**Definition 2.45.** Die Punkte  $\{p_1, \dots, p_m\}$  heißen affin abhängig, wenn eine nichttriviale affine Kombination von ihnen gleich Null ist:

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R} : \sum_i \lambda_i = 0, \sum_i \lambda_i p_i = 0 \in V \text{ und nicht alle } \lambda_i = 0$$

**Proposition 2.46.** Die drei folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. Punkte  $\{p_1, \dots, p_m\}$  sind affin abhängig;
2. Einer der Punkte  $\{p_1, \dots, p_m\}$  kann als affine Kombination von den anderen dargestellt werden;
3. Vektoren  $p_2 - p_1, \dots, p_m - p_1$  sind linear abhängig.

*Beweis.* Aufgabe. □

### 3.5 Baryzentrische Koordinaten

**Definition 2.47.** Die Punkte  $p_1, \dots, p_m$  bilden eine Basis von  $A$ , wenn sie affin unabhängig sind und  $A$  aufspannen:  $\text{aff}\{p_1, \dots, p_m\} = A$ .

**Satz 2.48.** Wenn der zugehörige Vektorraum  $V$  eines affinen Raums  $A$  endlichdimensional ist, dann hat  $A$  eine Basis. Wenn  $\dim V = n$ , dann besteht jede affine Basis von  $A$  aus  $n + 1$  Punkten.

*Beweis.*  $e_1, \dots, e_n$  eine Basis von  $V$ , dann  $p, p + e_1, \dots, p + e_n$  Basis von  $A$   
 $p_0, \dots, p_m$  affine Basis, dann  $p_1 - p_0, \dots, p_m - p_0$  Basis von  $V$  □

Unter Dimension eines affinen Raums verstehen wir die Dimension des zugehörigen Vektorraums. Eine affine Basis von  $A$  besteht demzufolge aus  $\dim A + 1$  Punkten.

Die Darstellung jedes Punktes als affine Kombination der Basispunkte ist eindeutig. In der Tat, aus

$$\lambda_0 p_0 + \dots + \lambda_n p_n = \mu_0 p_0 + \dots + \mu_n p_n$$

würde folgen  $(\lambda_0 - \mu_0)p_0 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)p_n = 0$ , d.h.  $p_0, \dots, p_n$  wären affin abhängig.

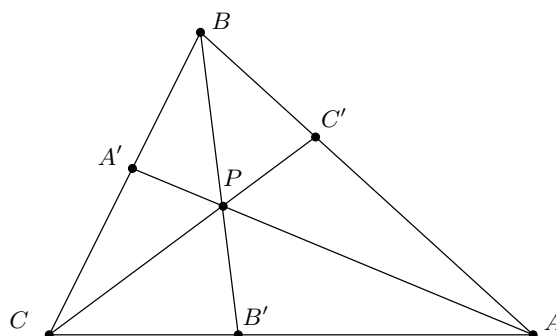
**Definition 2.49.** Sei  $p_0, \dots, p_n$  eine affine Basis. Die Koeffizienten einer affinen Kombination

$$p = \sum_i \lambda_i p_i$$

heißen die baryzentrischen Koordinaten von  $p$  bezüglich der Basis  $(p_0, p_1, \dots, p_n)$ .

Baryzentrische Koordinaten werden so genannt, weil der Punkt  $\sum_i \lambda_i p_i$  das Baryzentrum der Punkte  $p_i$  mit Massen  $\lambda_i$  ist. Vgl. den Punkt  $\frac{2}{3}p + \frac{1}{3}q$  auf Abb. 2.4. Der Punkt  $p_i$  hat Koordinaten  $(0, \dots, 1, \dots, 0)$  mit der 1 auf der  $i$ -ten Stelle (gezählt wird ab Null).

**Satz 2.50** (Satz von Ceva). Seien  $A', B', C'$  Punkte auf den Seiten  $BC, CA, AB$  eines Dreiecks.



Dann schneiden sich die Geraden  $AA', BB', CC'$  in einem Punkt genau dann, wenn

$$\frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{B'A}} = 1 \quad (2.5)$$

Allgemeiner, Punkte  $A', B', C'$  dürfen auf den Geraden  $BC, CA, AB$  außerhalb der Seiten des Dreiecks liegen.

*Beweis.* Seien  $P = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  die baryzentrischen Koordinaten von  $P$  bezüglich der Basis  $(A, B, C)$ . Die Gerade  $AP$  besteht aus den Punkten

$$\text{aff}\{A, P\} = \{(1-t)(1, 0, 0) + t(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Punkte auf der Geraden  $\text{aff}\{B, C\}$  haben die erste Koordinate gleich 0. Daraus berechnen wir

$$A' = \left(0, \frac{\lambda_2}{1-\lambda_1}, \frac{\lambda_3}{1-\lambda_1}\right) = \left(0, \frac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_3}, \frac{\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3}\right)$$

D.h.  $A' = \frac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_3}B + \frac{\lambda_3}{\lambda_2+\lambda_3}C$  und folglich

$$\frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}} = \frac{\lambda_3}{\lambda_2}, \text{ und analog } \frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{B'A}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_3}$$

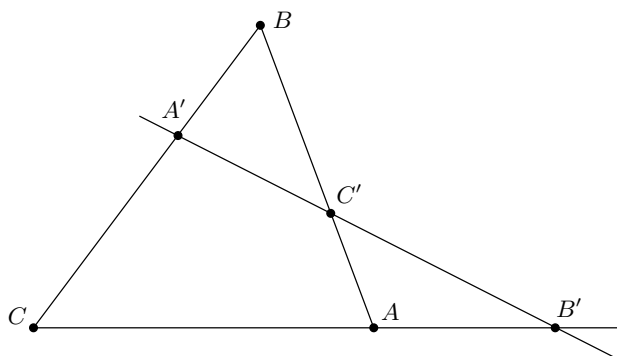
Daraus folgt die Gleichung (2.5).

Umgekehrt, wenn (2.5) gilt, dann sei  $P$  der Schnittpunkt der Geraden  $AA'$  und  $BB'$ . Aus dem bereits Bewiesenen folgt, dass für den Schnittpunkt  $C''$  der Geraden  $CP$  und  $AB$  ebenfalls die Gleichung (2.5) gilt (mit  $C''$  anstelle von  $C'$ ). Daraus folgt

$$\frac{\overrightarrow{AC''}}{\overrightarrow{C''B}} = \frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}}$$

und deswegen  $C'' = C'$ . Also geht die Gerade  $CC'$  ebenfalls durch den Punkt  $P$ .  $\square$

**Satz 2.51** (Satz von Menelaus). *Punkte  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  auf den Geraden  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  sind kollinear genau dann, wenn*



$$\frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{B'A}} = -1 \quad (2.6)$$

*Beweis.* Aufgabe.  $\square$

### 3.6 Der Hauptsatz der affinen Geometrie

**Satz 2.52.** *Seien  $A$  und  $B$  affine Räume. Sei  $(p_0, \dots, p_n)$  eine Basis von  $A$  und seien  $q_0, \dots, q_n$  beliebige Punkte in  $B$ . Dann gibt es genau eine affine Abbildung  $f: A \rightarrow B$  mit  $f(p_i) = q_i$  für alle  $i$ .*

*Beweis.* Für jede affine Abbildung  $f$  mit  $f(p_i) = q_i$  gilt

$$p = \lambda_0 p_0 + \dots + \lambda_n p_n \Rightarrow f(p) = \lambda_0 q_0 + \dots + \lambda_n q_n \quad (2.7)$$

Da jeder Punkt  $p$  sich auf eine einzige Weise als affine Kombination von  $p_0, \dots, p_n$  darstellen lässt, wird  $f(p)$  durch die obige Regel wohldefiniert.  $\square$

**Korollar 2.53.** *Die Gruppe  $\text{Affin}(A)$  wirkt frei und transitiv auf der Menge der affinen Basen von  $A$ .*

*Beweis.* Eine affine Abbildung  $A \rightarrow A$  ist bijektiv genau dann, wenn sie Basen auf Basen abbildet. Deswegen wirkt  $\text{Affin}(A)$  auf der Menge aller affinen Basen. Nach dem Satz 2.52 ist diese Wirkung transitiv und frei.  $\square$

Die folgende Aussage wird auch als ‘‘Hauptsatz der affinen Geometrie’’ bezeichnet:

Eine bijektive Abbildung zwischen zwei reellen affinen Räumen der Dimension  $\geq 2$ , die Geraden auf Geraden abbildet, ist affin.

## 4 Affine Räume vs. Vektorräume

### 4.1 Koordinatensysteme in affinen Räumen

Bijektion

$$I_p: V \rightarrow A, \quad v \mapsto p + v$$

und ihre Inverse

$$I_p^{-1}: A \rightarrow V, \quad q \mapsto D(p, \cdot) = q - p$$

identifizieren den affinen Raum  $A$  mit dem Vektorraum  $V$ . Etwas informell ausgedrückt,

Affiner Raum mit einem ausgezeichneten Punkt ist ein Vektorraum.

(Noch informeller: Affiner Raum ist ein Vektorraum, wo man die Position des Nullvektors vergessen hat.)

Ist  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  eine Basis von  $V$ , so können wir jeden Vektor  $v \in V$  bezüglich dieser Basis zerlegen:

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

Die Abbildung

$$K_{\mathcal{B}}: V \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad v \mapsto (x_1, \dots, x_n)$$

ist ein Vektorraumisomorphismus, das heißt

Endlichdimensionaler Vektorraum mit einer ausgezeichneten Basis ist  $\mathbb{R}^n$ .

Um einen endlichdimensionalen affinen Raum  $A$  mit  $\mathbb{R}^n$  zu identifizieren, muss man also einen Koordinatenursprung  $p \in A$  und eine Basis  $\mathcal{B}$  in  $V$  wählen. Die resultierende Bijektion bezeichnen wir

$$K_{p, \mathcal{B}} := K_{\mathcal{B}} \circ I_p^{-1}: A \rightarrow \mathbb{R}^n \tag{2.8}$$

Sie bildet jeden Punkt  $q$  auf die Koordinaten des Vektors  $q - p$  in der Basis  $\mathcal{B}$ .

### 4.2 Koordinatendarstellung affiner Transformationen

Die Bijektion 2.8 assoziiert mit jeder Abbildung  $f: A \rightarrow A$  eine Abbildung

$$K_{p, \mathcal{B}} \circ f \circ K_{p, \mathcal{B}}^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Nennen wir diese Abbildung *Darstellung von  $f$  im Koordinatensystem  $(p, \mathcal{B})$* .

**Satz 2.54.** Jede affine Abbildung  $f: A \rightarrow A$  hat in jeder Koordinatensystem die Darstellung der Form

$$x \mapsto Mx + b, \quad M \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^n$$

Die Abbildung  $f$  ist bijektiv genau dann, wenn  $\det M \neq 0$ .

**Lemma 2.55.** Sei  $f: A \rightarrow A$  affin mit  $f(p) = p$ . Dann ist die Abbildung

$$I_p^{-1} \circ f \circ I_p: V \rightarrow V$$

linear.

*Beweis.* Es gilt

$$I_p^{-1} \circ f \circ I_p(v) = I_p^{-1} \circ f(p + v) = f(p + v) - p$$

und wir müssen zeigen

$$f(p + v + w) - p = (f(p + v) - p) + (f(p + w) - p) \quad (2.9)$$

$$f(p + \lambda v) - p = \lambda(f(p + v) - p) \quad (2.10)$$

Beweis von (2.9):

$$f(p + v) + f(p + w) - f(p + v + w) = f((p + v) + (p + w) - (p + v + w)) = f(p) = p$$

(die erste Gleichung gilt, weil  $f$  affin ist). Beweis von (2.10):

$$\begin{aligned} f(p + \lambda v) - \lambda f(p + v) + \lambda p &= f(p + \lambda v) - \lambda f(p + v) + \lambda f(p) \\ &= f((p + \lambda v) - \lambda(p + v) + \lambda p) = f(p) = p \end{aligned}$$

□

**Lemma 2.56.** Sei  $f: A \rightarrow A$  affin,  $p \in A$  beliebig. Dann existiert  $v \in V$ , sodass

$$f = T_v \circ g \text{ und } g(p) = p$$

*Beweis.* Setze  $v = f(p) - p$  und  $g = T_{-v} \circ f$ . Dann

$$g(p) = (T_{-v} \circ f)(p) = T_{p-f(p)}(f(p)) = p$$

und  $f = T_v^{-1} \circ g = T_v \circ g$ . □

*Beweis des Satzes 2.54.* Nach Lemma 2.56 gilt  $f = T_v \circ g$  mit  $g(p) = p$ . Nach Lemma 2.55 entspricht  $g$  einer linearen Abbildung  $V \rightarrow V$ . Jede lineare Abbildung hat in Koordinaten bezüglich einer beliebigen Basis die Form  $x \mapsto Mx$  mit einer  $(n \times n)$ -Matrix  $M$ . Schließlich hat die Abbildung  $T_v$  in Koordinaten die Form  $x \mapsto x + b$ , wobei  $(b_1, \dots, b_n)$  die Koordinaten des Vektors  $v$  sind.

Mit mehr Formalität sieht das Argument wie folgt aus. Die Darstellung von  $f$  im Koordinatensystem  $(p, \mathcal{B})$  erfolgt in zwei Schritten:

- zuerst “Vektorisierung”  $f' := I_p^{-1} \circ f \circ I_p: V \rightarrow V$ ;
- dann “Koordinatisierung”  $f'' := K_B \circ f' \circ K_B^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Im ersten Schritt haben wir

$$f' = I_p^{-1} \circ f \circ I_p = (I_p^{-1} \circ T_v \circ I_p) \circ (I_p^{-1} \circ g \circ I_p)$$

Die Abbildung  $I_p^{-1} \circ g \circ I_p: V \rightarrow V$  ist linear nach Lemma 2.55, und die Abbildung  $I_p^{-1} \circ T_v \circ I_p$  ist die Translation  $w \mapsto w + v$  im Vektorraum  $V$ . Insgesamt gilt

$$f'(w) = L(w) + v$$

mit einer linearen Abbildung  $L: V \rightarrow V$ . Die Koordinatisierung von  $f'$  ergibt die Formel  $x \mapsto Mx + b$ .

Zum Kriterium der Bijektivität von  $f$ :

$$f \text{ bijektiv} \Leftrightarrow g \text{ bijektiv} \Leftrightarrow L \text{ bijektiv} \Leftrightarrow \det M \neq 0$$

□

Eine affine Abbildung  $f: A \rightarrow B$  kann ebenfalls nach einer Wahl von Koordinatensystemen in  $A$  und  $B$  in der Form

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto Mx + b$$

dargestellt werden (mit einer  $m \times n$ -Matrix  $M$  und  $b \in \mathbb{R}^m$ ). Wählt man das Bild  $f(p) \in B$  des Koordinatenursprungs  $p \in A$  zum Koordinatenursprung von  $B$ , so entfällt der konstante Term, und die Abbildung hat die Form  $x \mapsto Mx$ .

### 4.3 Allgemeine affine Gruppe und allgemeine lineare Gruppen

Sei  $A$  ein  $n$ -dimensionaler reeller affiner Raum. In den vorigen Abschnitten haben wir gezeigt, wie man  $A$  mit  $\mathbb{R}^n$  identifiziert, und wie das zu Identifikation der Gruppe  $\text{Affin}(A)$  mit der Menge  $\text{GL}(n) \times \mathbb{R}^n$  führt. Was für Gruppenstruktur entsteht aber auf der Menge  $\text{GL}(n) \times \mathbb{R}^n$ ?

Seien  $f_1(x) = M_1x + b_1$  und  $f_2(x) = M_2x + b_2$  zwei affine Abbildungen. Dann

$$f_1 \circ f_2(x) = M_1(M_2x + b_2) + b_1 = (M_1M_2)x + (b_1 + M_1b_2)$$

Das führt zu der folgenden Definition.

**Definition 2.57.** Die  $n$ -dimensionale allgemeine affine Gruppe ist

$$\text{GA}(n) := \text{GL}(n) \times \mathbb{R}^n$$

mit der Gruppenmultiplikation

$$(M_1, b_1) * (M_2, b_2) := (M_1M_2, b_1 + M_1b_2) \tag{2.11}$$

Man braucht nicht zu prüfen, dass die Regel (2.11) die Eigenschaften der Gruppenmultiplikation hat. In der Tat, wir wissen, dass diese Regel der Komposition der affinen Transformationen entspricht.

**Proposition 2.58.** *Die Abbildung*

$$\mathrm{GA}(n) \rightarrow \mathrm{GL}(n+1), \quad (M, b) \mapsto \begin{pmatrix} M & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*bildet  $\mathrm{GA}(n)$  isomorph auf eine Untergruppe von  $\mathrm{GL}(n+1)$ .*

*Beweis.* Die Abbildung ist offenbar injektiv. Sie ist ein Homomorphismus weil die Multiplikation solcher Blockmatrizen

$$\begin{pmatrix} M_1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_2 & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 M_2 & M_1 b_2 + b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

der Regel (2.11) folgt. □

Die Gruppenmultiplikation (2.11) ist ein Spezialfall der folgenden allgemeinen Konstruktion.

**Definition 2.59.** *Seien  $G$  und  $H$  Gruppen, und sei  $\varphi: G \rightarrow \mathrm{Aut}(H)$  eine  $G$ -Wirkung auf  $H$  durch Automorphismen. Das semidirekte Produkt  $G \ltimes_{\varphi} H$  wird durch die Gruppenoperation*

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) := (g_1 g_2, h_1 \cdot \varphi(g_1)(h_2)) \quad (2.12)$$

*auf der Menge  $G \times H$  definiert.*

Beachte, dass sogar die Assoziativität der Operation (2.12) nicht offensichtlich ist. Semidirektes Produkt mit  $\varphi = \mathrm{id}$  ist das übliche direkte Produkt der Gruppen.

Der Vergleich der Formeln (2.12) und (2.11) zeigt, dass  $\mathrm{GA}(n) = \mathrm{GL}(n) \ltimes_{\varphi} \mathbb{R}^n$  mit der Wirkung von  $\mathrm{GL}(n)$  auf der additiven Gruppe  $\mathbb{R}^n$  durch Matrix-Vektor Multiplikation.

#### 4.4 Affine Unterräume von Vektorräumen

Man kann auf natürliche Weise einen affinen Unterraum in einem affinen Raum definieren, als eine bezüglich der affinen Kombinationen abgeschlossene Teilmenge.

Man kann aber auch affine Kombinationen von Vektoren in einem Vektorraum definieren als Linearkombinationen mit der Koeffizientensumme 1.

**Definition 2.60.** *Eine Teilmenge  $L \subset V$  heißt affiner Unterraum von  $V$ , wenn mit allen  $v_1, \dots, v_m \in L$  auch jede affine Kombination*

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m, \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$$

*in  $L$  liegt.*



Insbesondere ist jeder Untervektorraum auch ein affiner Unterraum. Aber auch jede Gerade oder Ebene in  $\mathbb{R}^3$ , die nicht durch den Ursprung geht, ist ein affiner Unterraum von  $\mathbb{R}^3$ .

**Proposition 2.61.** *Sei  $L \subset V$  ein affiner Unterraum eines Vektorraums. Dann gibt es ein  $p \in V$  und ein Untervektorraum  $U \subset V$ , sodass*

$$L = p + U := \{p + v \mid v \in U\}$$

*Beweis.* Sei

$$U := \left\{ \sum_i \lambda_i p_i \mid p_i \in L, \sum_i \lambda_i = 0 \right\}$$

Dann ist es leicht zu zeigen, dass  $U$  ein Untervektorraum von  $V$  ist. Sei  $p \in L$  beliebig. Ebenso leicht ist es, beide Inklusionen  $p + U \subset L$  und  $p + U \supset L$  zu beweisen.  $\square$

**Proposition 2.62.** *Affine Unterräume von  $\mathbb{R}^n$  sind genau die Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen.*

*Beweis.* Sei  $M$  eine  $m \times n$ -Matrix und sei  $b \in \mathbb{R}^m$ . Dann ist die Lösungsmenge von  $Mx + b = 0$  bezüglich affiner Kombinationen abgeschlossen, weil für beliebige Lösungen  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$M \sum_i \lambda_i x_i = \sum_i \lambda_i Mx_i = \sum_i \lambda_i b = b$$

sobald  $\sum_i \lambda_i = 1$ .

Umgekehrt, sei  $L \subset \mathbb{R}^n$  ein affiner Unterraum. Nach der Proposition 2.61 ist  $L = p + U$ . Wie wir wissen, ist jeder Untervektorraum von  $\mathbb{R}^n$  die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems. Sei also  $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Mx = 0\}$ . Dann gilt

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Mx + b = 0\}$$

mit  $b = -Mp$ .  $\square$

## 4.5 Jeder affine Raum ist ein affiner Unterraum

Jeder affine Raum  $A$  kann als affiner Unterraum eines Vektorraums dargestellt werden. Wir beschreiben zwei Konstruktionen.

*Konstruktion 1.* Wähle eine affine Basis  $p_0, \dots, p_n$  von  $A$  und betrachte formale Linearkombinationen  $\lambda_0 p_0 + \dots + \lambda_n p_n$ . Solche Kombinationen können addiert und mit Skalaren multipliziert werden, dabei erfüllen diese Operationen alle Vektorraumaxiome. Das gibt uns einen Vektorraum  $\hat{V}$ . Die Elemente  $p_0, \dots, p_n$  bilden eine Basis von  $\hat{V}$ , und  $A \subset \hat{V}$  ist die affine Hyperebene  $\{\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1\}$ .

Ein Nachteil dieser Konstruktion ist, dass sie "nicht invariant" ist, da sie von der Wahl einer Basis von  $A$  abhängt.

*Konstruktion 2.* Sei  $V$  der dem  $A$  zugehörige Vektorraum. Setze

$$\hat{V} := (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times A \cup V$$

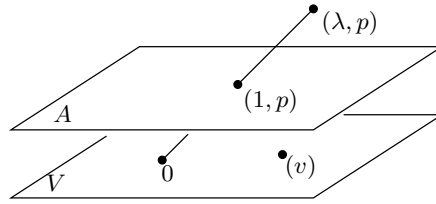


Abbildung 2.5: Darstellung jedes affinen Raums als affiner Unterraum.

Es gibt also zwei Sorten von Elementen in  $\hat{V}$ : Paare  $(\lambda, p)$  mit  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und Elemente  $v$  von  $V$ . (Wir schreiben im Folgenden  $(v) \in \hat{V}$  um sie von  $v \in V$  zu unterscheiden.) Wir definieren die Multiplikation mit Skalaren als

$$\lambda(\mu, p) := \begin{cases} (\lambda\mu, p) & \text{wenn } \lambda \neq 0 \\ 0 \in V & \text{wenn } \lambda = 0 \end{cases}, \quad \lambda(v) := (\lambda v)$$

Die Addition zweier Elemente von  $\hat{V}$  ist definiert als

$$(\lambda, p) + (\mu, q) := \begin{cases} (\lambda + \mu, \frac{\lambda}{\lambda + \mu}p + \frac{\mu}{\lambda + \mu}q) & \text{wenn } \lambda + \mu \neq 0 \\ (\lambda(p - q)) & \text{wenn } \lambda + \mu = 0 \end{cases}$$

und

$$(\lambda, p) + (v) := (\lambda, p + \lambda^{-1}v), \quad (v) + (w) := (v + w)$$

Diese Konstruktion ist invariant, die Überprüfung der Vektorraumaxiome ist aber aufwändig. Siehe Abb. 2.5 zur Illustration.

Wir können nun immer, wenn wir über einen  $n$ -dimensionalen affinen Raum sprechen, sich eine Hyperebene  $L$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$  vorstellen, die nicht durch den Nullpunkt geht. Diese Hyperebene hat keinen ausgezeichneten Punkt. Der auf ihr frei und transitiv wirkender Vektorraum ist die zu ihr parallele Hyperebene  $V$  durch  $0$ .

Es gibt zwei bequeme Wahlmöglichkeiten für die Hyperebene  $L$ . Die erste ist

$$L := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 + \dots + x_n = 1\}$$

Dann ist  $e_0, \dots, e_n$  eine affine Basis für  $L$ , und die gewöhnlichen Koordinaten in  $\mathbb{R}^{n+1}$  sind die baryzentrischen Koordinaten auf  $L$ . Die zweite Möglichkeit:

$$L := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 = 1\}$$

führt zu der folgenden Interpretation der Proposition 2.58.

Affine Transformationen der Hyperebene  $L = \{x_0 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  sind die Einschränkungen von denjenigen der linearen Automorphismen  $f \in \text{GL}(n+1)$ , welche  $L$  auf sich selbst abbilden.

Dafür schreiben wir die Koordinate  $x_0$  nach den Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$ . Dann besteht  $L$  aus den Vektoren der Form  $(x, 1)^\top$  und wir haben

$$\begin{pmatrix} M & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Mx + b \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ausserdem hat jede Matrix, die  $\{x_0 = 1\}$  in sich selbst abbildet, diese Form.

#### 4.6 Parallelprojektion zwischen affinen Unterräumen

Sei  $L \subset V$  ein affiner Unterraum eines Vektorraums. Ein Untervektorraum  $W \subset V$  heißt *komplementär* zu  $L$ , falls  $V = U \oplus W$  gilt, wobei  $U$  der zu  $L$  parallele Untervektorraum ist:  $L = p + U$ . Beachte: zu jedem nichttrivialen (nicht  $\{0\}$  und nicht ganz  $V$ ) Untervektorraum gibt es viele unterschiedliche komplementären Untervektorräume.

**Definition 2.63.** Die Parallelprojektion auf  $L$  entlang  $W$  bildet jeden Punkt  $x \in V$  auf den einzigen Schnittpunkt von  $x + W$  mit  $L$ :

$$\pi_L^W : V \rightarrow L, \quad \{\pi_L^W(x)\} = (x + W) \cap L$$

**Aufgabe 2.64.** Zeige, dass die Parallelprojektion wohldefiniert und eine affine Abbildung ist.

**Aufgabe 2.65.** Seien  $L, L' \subset V$  zwei affine Unterräume der gleichen Dimension, und sei  $W \subset V$  ein Untervektorraum, der komplementär zu den beiden ist. Zeige, dass die Einschränkung

$$\pi_L^W : L' \rightarrow L$$

bijektiv ist.

Ein wichtiger Spezialfall ist die Parallelprojektion zwischen zwei Hyperebenen. D. h. wir setzen  $\dim L = \dim L' = \dim V - 1$  voraus und projizieren entlang eines 1-dimensionalen Untervektorraums  $W$ .

**Satz 2.66.** Jede Affinität kann als Komposition von Parallelprojektionen dargestellt werden. Nämlich, wenn  $L \subset V$  eine Hyperebene ist, dann existieren für jede Affinität  $f$  Hyperebenen  $L_1, \dots, L_n$  und Geraden  $W_0, W_1, \dots, W_n$ , sodass die Komposition

$$L \xrightarrow{\pi_{L_1}^{W_0}} L_1 \xrightarrow{\pi_{L_2}^{W_1}} L_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow L_{n-1} \xrightarrow{\pi_{L_n}^{W_{n-1}}} L_n \xrightarrow{\pi_L^{W_n}} L$$

gleich der Abbildung  $f$  ist.

## 5 Orthogonalgruppe und Gruppe der euklidischen Isometrien

### 5.1 Skalarprodukt und Standardskalarprodukt

**Definition 2.67.** Eine symmetrische Bilinearform auf einem Vektorraum  $V$  ist eine Abbildung

$$B: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

mit den Eigenschaften

1.  $B(v, w) = B(w, v)$  (Symmetrie)
2.  $B(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 B(v_1, w) + \lambda_2 B(v_2, w)$

(Beachte, dass aus der Linearität im ersten Argument auch Linearität im zweiten Argument folgt.)

Die Form  $B$  heißt positiv definit, wenn

$$B(v, v) > 0 \text{ für alle } v \neq 0$$

Eine positiv definite Bilinearform wird auch *Skalarprodukt* genannt. Auf einem Vektorraum gibt es viele unterschiedliche Skalarprodukte!

Ein mit einem Skalarprodukt ausgestatteter Vektorraum heißt *euklidischer Vektorraum*.

Im Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  gibt es den *Standardskalarprodukt*

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \tag{2.13}$$

Die folgende Aussage zeigt, dass jeder euklidischer Vektorraum zum  $\mathbb{R}^n$  mit Standardskalarprodukt isomorph ist.

**Satz 2.68.** In jedem euklidischen Vektorraum gibt es eine orthonormale Basis, d.h. eine Basis  $(e_1, \dots, e_n)$  mit

$$B(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } i = j \\ 0, & \text{wenn } i \neq j \end{cases}$$

*Beweis.* Man nimmt eine beliebige Basis und wendet den Gram-Schmidt Orthogonalisierungsverfahren an. □

Aus der Bilinearität von  $B$  folgt, dass  $B(x, y)$  die Form (2.13) hat, wenn  $x$  und  $y$  die Koordinaten bezüglich einer orthonormalen Basis sind.

## 5.2 Die Orthogonalgruppe

**Definition 2.69.** Eine lineare Abbildung  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt orthogonal, wenn sie die Skalarprodukte erhält:

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^n$$

**Satz 2.70.** Eine lineare Abbildung  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist genau dann orthogonal, wenn eine der folgenden äquivalenten Aussagen gilt:

1.  $f$  bildet jede Orthonormalbasis auf Orthonormalbasis;
2.  $f$  bildet die Standardbasis auf eine Orthonormalbasis;
3. die Spalten der die Abbildung  $f$  darstellenden Matrix  $M$  bilden eine Orthonormalbasis;
4.  $M^\top M = E_n$
5. die Zeilen von  $M$  bilden eine Orthonormalbasis.

Es folgt, dass jede orthogonale Abbildung invertierbar ist:  $M^{-1} = M^\top$ . Die Orthogonaltransformationen bilden eine Gruppe (das folgt direkt aus der Definition, oder aus der Beschreibung  $M^\top M = E_n$ ). Diese Gruppe wird die *Orthogonalgruppe* genannt und wie folgt bezeichnet:

$$O(n) := \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid M^\top M = E_n\}$$

Aus  $M^\top M = E_n$  folgt  $\det M = \pm 1$ . Die Orthogonalmatrizen mit Determinante 1 bilden die *spezielle Orthogonalgruppe* und werden bezeichnet mit

$$SO(n) := \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid M^\top M = E_n, \det M = 1\}$$

**Beispiel 2.71.** 1. Die Matrix

$$D_\varphi := \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

gehört zu  $SO(2)$ . Die Abbildung  $x \mapsto Mx$  ist die Drehung um Winkel  $\varphi$ .

2. Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gehört zu  $O(2)$  aber nicht zu  $SO(2)$ . Das ist die Matrix der Spiegelung an der  $x$ -Achse.

### 5.3 Euklidische affine Räume und Isometrien

Ein affiner Raum, dessen zugehöriger Vektorraum mit einem Skalarprodukt ausgestattet ist, heißt *euklidischer affiner Raum*. Einen  $n$ -dimensionalen euklidischen affinen Raum bezeichnen wir mit  $\mathbb{E}^n$ .

Ein Skalarprodukt erzeugt die *Norm* durch

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

**Definition 2.72.** Der Abstand zwischen zwei Punkten in einem euklidischen affinen Raum wird definiert als

$$\text{dist}(p, q) := \|p - q\|$$

Eine Abbildung  $f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  heißt Isometrie, wenn sie die Abstände erhält:

$$\|f(p) - f(q)\| = \|p - q\| \text{ für alle } p, q$$

Erinnerung aus Abschnitt 1.1: die Menge aller Isometrien bildet eine Gruppe. Diese Gruppe wird mit  $\text{Isom}(\mathbb{E}^n)$  bezeichnet.

**Beispiel 2.73.** Die Translation  $T_v$  ist eine Isometrie, denn  $T_v(p) - T_v(q) = p - q$ .

### 5.4 Isometrien und Orthogonaltransformationen

**Satz 2.74.** Jede Isometrie eines euklidischen affinen Raums ist eine Affinität. Außerdem ist  $f \in \text{Affin}(\mathbb{E}^n)$  eine Isometrie genau dann, wenn ihre darstellende Matrix bezüglich einer (und dann jeder) Orthonormalbasis eine Orthogonalmatrix ist.

Mit anderen Worten, wird  $\mathbb{E}^n$  mittels eines orthonormalen Koordinatensystems koordinatisiert, so gilt

$$\text{Isom}(\mathbb{E}^n) = \text{O}(n) \times \mathbb{R}^n \subset \text{GL}(n) \times \mathbb{R}^n = \text{Affin}(\mathbb{E}^n)$$

*Beweis.* Wählen wir in  $\mathbb{E}^n$  einen Basispunkt  $p_0$ . Dann kann jede Isometrie als Komposition einer Isometrie mit Fixpunkt  $p_0$  und einer Translation dargestellt werden:

$$f = T_{f(p_0)-p_0} \circ g, \quad g(p_0) = p_0$$

Identifizieren wir  $\mathbb{E}^n$  mit einem euklidischen Vektorraum  $V$  durch die Wahl von  $p_0$  zum Koordinatenursprung. Dann erhalten wir eine Abbildung

$$g': V \rightarrow V, \quad g'(v) := g(p_0 + v) - p_0,$$

die die Norm der Vektoren erhält:

$$\|g'(v)\| = \|g(p_0 + v) - p_0\| = \|g(p_0 + v) - g(p_0)\| = \|(p_0 + v) - p_0\| = \|v\|$$

Nach Lemma 2.75 und Lemma 2.76 ist  $g'$  linear und erhält Skalarprodukte, also eine orthogonale Abbildung. Nach Satz 2.70 wird  $g'$  in jeder Orthonormalbasis mittels einer Matrix  $M \in \text{O}(n)$  dargestellt. Aus  $f = T_v \circ g$  folgt nun

$$f(x) = Mx + b$$

mit  $b \in \mathbb{R}^n$  die Koordinatendarstellung von  $v$ . □

**Lemma 2.75.** *Jede Abbildung  $g': V \rightarrow V$ , die die Norm erhält, erhält auch das Skalarprodukt.*

*Beweis.* Ja, weil das Skalarprodukt durch die Norm ausgedrückt werden kann:

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

□

**Lemma 2.76.** *Jede Abbildung  $g': V \rightarrow V$ , die die Skalarprodukte erhält, ist linear.*

*Beweis.* Sei  $e_1, \dots, e_n$  eine Orthonormalbasis von  $V$ . Die Zerlegung eines beliebigen Vektors  $v \in V$  bezüglich dieser Basis sieht wie folgt aus:

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle e_i$$

Da  $g'$  die Skalarprodukte erhält, ist  $(g'(e_1), \dots, g'(e_n))$  auch eine Orthonormalbasis. Deswegen gilt

$$g'(v) = \sum_{i=1}^n \langle g'(v), g'(e_i) \rangle g'(e_i) = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle g'(e_i)$$

Folglich gilt

$$g' \left( \sum_i x_i e_i \right) = \sum_i x_i g'(e_i),$$

und daraus folgt, dass  $g'$  linear ist. □

## 5.5 Die Gruppen $O(2)$ und $SO(2)$

**Satz 2.77.** *Jede Orthogonaltransformation  $f \in SO(2)$  ist eine Drehung um den Nullpunkt. Jede Orthogonaltransformation  $f \in O(2) \setminus SO(2)$  ist die Spiegelung an einer Geraden durch den Nullpunkt.*

*Beweis.* Sei  $f \in O(2)$  und sei  $M$  die Matrix von  $f$  bezüglich einer Orthonormalbasis. Dann gilt

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \text{mit } a^2 + b^2 = 1 = c^2 + d^2, ac + bd = 0$$

und jede Matrix mit diesen Eigenschaften repräsentiert eine Orthogonaltransformation. Aus  $ac + bd = 0$  folgt

$$c = kb, d = -ka$$

und aus  $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$  folgt  $k = \pm 1$ . Beachte auch  $\det M = -k(a^2 + b^2) = -k$ . Außerdem impliziert  $a^2 + b^2 = 1$  dass

$$\exists! \varphi \in [0, 2\pi) \quad \text{so dass } a = \cos \varphi, b = \sin \varphi$$

Betrachten wir zwei Fälle.

1. Fall  $k = -1$  Dann ist  $M = D_\varphi$  die Drehmatrix (2.14).

2. Fall  $k = 1$  Dann

$$M = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$$

Das ist die Matrix der Spiegelung an der durch den Vektor  $(\cos \frac{\varphi}{2}, \sin \frac{\varphi}{2})$  aufgespannten Geraden. (Beweisen Sie das!)  $\square$

Die Matrix der Spiegelung nimmt in einer geeigneten Orthonormalbasis (erster Basisvektor entlang der Geraden, zweiter senkrecht darauf) die Form

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

## 5.6 Die “fast-Diagonalisierbarkeit” orthogonaler Matrizen

**Satz 2.78.** Sei  $f: V \rightarrow V$  eine Orthogonaltransformation eines euklidischen Vektorraums. Dann existiert in  $V$  eine Orthonormalbasis, bezüglich welcher die Matrix von  $f$  die folgende Form hat:

$$\begin{pmatrix} E_p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -E_q & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & D_{\varphi_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D_{\varphi_m} \end{pmatrix}$$

Hier sind  $E_p, E_q$  die Einheitsmatrizen, und  $D_\varphi$  die  $2 \times 2$ -Drehmatrix (2.14).

Jeder Block  $D_{\varphi_i}$  repräsentiert eine Drehung. Die “Drehachse” ist dabei ein Untervektorraum der Dimension  $n - 2$  (Punkt in  $\mathbb{R}^2$ , Gerade in  $\mathbb{R}^3$ ). Alle zu der Drehachse orthogonale Ebenen drehen sich in derselben Richtung um denselben Winkel.

Beachte, dass  $-E_2 = D_\pi$ . Folglich können wir eine andere Darstellung geben:

$$M = \begin{pmatrix} E_p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{\varphi_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_{\varphi_m} \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} E_p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & D_{\varphi_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D_{\varphi_m} \end{pmatrix}$$

Im ersten Fall ist  $\det M = 1$ , also  $M \in O(n)$ . Im zweiten Fall  $\det M = -1$ , und  $-1$  auf der Diagonale entspricht der Spiegelung an der zu diesem Basisvektor orthogonalen Untervektorraum.

**Korollar 2.79.** Jede eigentliche Orthogonaltransformation ist Komposition von Drehungen in zueinander orthogonalen Ebenen. Jede uneigentliche Orthogonaltransformation ist Komposition von solcher Drehungen und einer Spiegelung.



Eine weitere (koordinatenfreie) Beschreibung des Satzes 2.78: Der Raum  $V$  besitzt eine direkte Summenzerlegung

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_{p+q} \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$$

wobei  $\dim U_i = 1$ ,  $\dim W_j = 2$  und  $f(U_i) \subset U_i$ ,  $f(W_j) \subset W_j$ . Diese Interpretation werden wir beim Beweis benutzen.

**Definition 2.80.** Ein Untervektorraum  $U \subset V$  heißt invariant bezüglich einer Abbildung  $f: V \rightarrow V$ , falls  $f(U) \subset U$  gilt.

Beachte, dass wenn  $f: V \rightarrow V$  ein Vektorraumisomorphismus ist, dann folgt aus  $f(U) \subset U$  sogar  $f(U) = U$ .

**Beispiel 2.81.** Ist  $v$  ein Eigenvektor von  $f$ , d. h.  $f(v) = \lambda v$ , so ist die lineare Hülle von  $v$  ein invarianter Untervektorraum. Umgekehrt, jeder invarianter 1-dimensionaler Untervektorraum ist von einem Eigenvektor aufgespannt.

Ist  $U \subset V$  invariant, so hat die Abbildung  $f$  bezüglich jeder direkten Summenzerlegung  $V = U \oplus W$  die Blockform

$$f = \begin{pmatrix} g & h \\ 0 & k \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

**Lemma 2.82.** Jede lineare Abbildung  $f: V \rightarrow V$  hat einen invarianten Untervektorraum der Dimension 1 oder 2.

*Beweis.* Wähle eine Basis und betrachte die Matrix  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  von  $f$  bezüglich dieser Basis. Wenn das charakteristische Polynom  $P(\lambda) = \det(M - \lambda E_n)$  eine reelle Nullstelle hat, dann spannt jeder diesem Eigenwert zugehörige Eigenvektor einen 1-dimensionalen invarianten Untervektorraum auf.

Nehmen wir an,  $P(\lambda)$  hat keine reellen Nullstellen. Dann hat er eine komplexe Nullstelle  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Da  $\det(M - \lambda E_n) = 0$ , hat das Gleichungssystem

$$(M - \lambda E_n)v = 0$$

eine nichttriviale Lösung  $v \in \mathbb{C}^n$ . Von diesem Vektor mit komplexen Koordinaten ausgehend, konstruieren wir einen 2-dimensionalen invarianten Unterraum.

Sei  $\bar{v} \in \mathbb{C}^n$  das komponentenweise Konjugierte zu  $v$ . Es gilt

$$Mv = \lambda v, \quad M\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} M(v + \bar{v}) &= \lambda v + \bar{\lambda}\bar{v} \\ M\left(\frac{v - \bar{v}}{i}\right) &= \frac{\lambda}{i}v - \frac{\bar{\lambda}}{i}\bar{v} \end{aligned}$$

Beide Vektoren  $v + \bar{v}$  und  $\frac{v-\bar{v}}{i}$  haben reelle Koordinaten. Ihre Bilder liegen in der  $\mathbb{R}$ -linearen Hülle der beiden, wie z.B.

$$\lambda v + \bar{\lambda} \bar{v} = \frac{\lambda + \bar{\lambda}}{2}(v + \bar{v}) - \frac{\lambda - \bar{\lambda}}{2i} \left( \frac{v - \bar{v}}{i} \right)$$

Folglich ist die Hülle von  $v + \bar{v}$  und  $\frac{v-\bar{v}}{i}$  ein invarianter Untervektorraum.  $\square$

Das ist noch nicht alles, denn wir haben ein  $1 \times 1$  oder  $2 \times 2$ -Block  $g$  wie in (2.15) abgespaltet, aber nicht sichergestellt dass der Block  $k$  eine Nullmatrix ist. Dafür werden wir die Orthogonalität der Abbildung  $f$  ausnutzen.

**Definition 2.83.** Sei  $U \subset V$  ein Untervektorraum eines euklidischen Vektorraums  $V$ . Dann heißt die Menge

$$U^\perp := \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in U\}$$

das Orthogonalkomplement von  $U$ .

**Proposition 2.84.** Das Orthogonalkomplement ist ein Untervektorraum, und es gilt

$$V = U \oplus U^\perp$$

Insbesondere  $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$ .

Es gilt auch  $(U^\perp)^\perp = U$ . In der Tat, unmittelbar aus der Definition folgt  $U \subset (U^\perp)^\perp$ ; zusammen mit  $\dim U = \dim(U^\perp)^\perp$  impliziert das  $U = (U^\perp)^\perp$ .

**Lemma 2.85.** Sei  $f: V \rightarrow V$  eine Orthogonaltransformation. Dann ist das Orthogonalkomplement eines invarianten Untervektorraumes selbst invariant.

*Beweis.* Sei  $U$  invariant:  $f(U) \subset U$ . Da  $\det f \neq 0$ , gilt  $\dim f(U) = \dim U$ , und deswegen  $f(U) = U$ .

Für jedes  $v \in U^\perp$  und jedes  $u \in U$  gilt

$$\langle f(v), f(u) \rangle = \langle v, u \rangle = 0$$

Da nun die Einschränkung  $f: U \rightarrow U$  bijektiv ist, kann jedes Element  $w \in U$  als  $f(u)$  mit  $u \in U$  dargestellt werden. Folglich gilt

$$\langle f(v), w \rangle = 0 \text{ für alle } w \in U$$

Das heißt,  $f(v) \in U^\perp$  für jedes  $v \in U^\perp$ .  $\square$

*Beweis des Satzes 2.78.* Induktion nach  $n = \dim V$ . Für  $n = 1$  ist  $M = \pm 1$ . Der Fall  $n = 2$  wurde im Abschnitt 5.5 behandelt.

Sei  $n \geq 3$ . Laut Lemma 2.82 hat  $V$  einen invarianten Untervektorraum  $U$  bezüglich  $f$  der Dimension 1 oder 2. Laut Lemma 2.85 ist  $U^\perp$  ebenfalls invariant, also hat  $f$  die Blockform

$$f = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$$

mit  $g \in O(U)$ ,  $h \in O(U^\perp)$ . Da  $\dim U = 1$  oder  $2$ , hat die Matrix von  $g$  die uns bekannte Form. Nach der Induktionsvoraussetzung hat auch die Matrix von  $h$  die ‘‘fast diagonale’’ Form in einer geeigneten Basis.  $\square$

**Korollar 2.86.** *Jede Orthogonaltransformation  $f \in O(3)$  hat in einer geeigneten Basis Matrix der Form*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Das heißt, jede Orthogonaltransformation von  $\mathbb{R}^3$  ist entweder Achsendrehung oder Komposition einer Achsendrehung mit der Spiegelung in der zu dieser Achse orthogonalen Ebene.

**Aufgabe 2.87.** 1. Bestimme die Achse und den Winkel der Drehung

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Bestimme die Standardblockform der Orthogonaltransformation mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Die gleiche Frage für eine beliebige Permutationsmatrix

$$M_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } j = \sigma(i) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei  $\sigma \in S_n$  eine Permutation ist.

## 5.7 Komplexe Zahlen

Im Abschnitt 2 haben wir den Satz 2.28 ohne Beweis gelassen: Komposition zweier Drehstreckungen ist eine Drehstreckung oder Translation. Jetzt wird es mit Hilfe der Koordinaten nachgeholt. Wir benutzen allerdings nicht *zwei* reelle Koordinaten in der Ebene, sondern *eine* komplexe.

Wir identifizieren  $\mathbb{C}$  mit  $\mathbb{R}^2$  mittels reellen Vektorraumisomorphismus

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x + iy \mapsto (x, y)$$

Die Standardnorm  $\|(x, y)\|^2 = x^2 + y^2$  in  $\mathbb{R}^2$  entspricht der Norm der komplexen Zahlen  $\|z\|^2 = z\bar{z}$ . Komplexe Zahlen kann man in der Polarform schreiben als

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) =: re^{i\varphi}$$

wobei  $r = \|z\|$  die Norm und  $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  das Argument (Winkel von der positiven reellen Halbachse zur Halbgerade  $0z$ ) ist. Bei Multiplikation werden die Normen multipliziert und Argumente addiert:

$$re^{i\varphi} \cdot se^{i\psi} = rse^{i(\varphi+\psi)}$$

Daraus folgt unmittelbar

**Proposition 2.88.** Sei  $a \in \mathbb{C}$ . Die Abbildung

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto az$$

ist die Drehstreckung  $ZD_0^{r,\varphi}$ , wobei  $r = \|a\|$  und  $\varphi = \arg a$ .

Finden wir die Formel für Drehstreckung mit Zentrum im beliebigen Punkt.

**Proposition 2.89.** Für  $p \in \mathbb{C}$  hat jede Drehstreckung mit Zentrum  $p$  die Form

$$ZD_p^{r,\varphi}(z) = az + p(1 - a)$$

wobei  $a = re^{i\varphi}$ .

*Beweis.* Aus der Definition der Drehstreckung folgt

$$ZD_p^{r,\varphi}(z) - p = a(z - p)$$

(siehe Abbildung 2.6). Das Umstellen liefert das Ergebnis. □

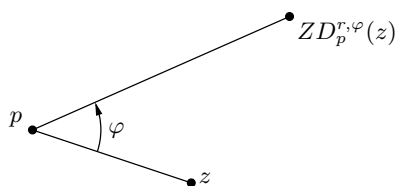


Abbildung 2.6: Drehstreckung mit beliebigem Zentrum.

**Proposition 2.90.** Seien  $a, b \in \mathbb{C}$  mit  $a \neq 0$ . Dann ist die Abbildung

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto az + b$$

1. eine Drehstreckung mit Winkel  $\arg a$  und Streckungsfaktor  $\|a\|$ , falls  $a \neq 1$ ;
2. Translation um  $b$ , falls  $a = 1$ .

*Beweis.* Wenn  $a \neq 1$ , dann haben wir Drehstreckung mit Zentrum  $\frac{b}{1-a}$ . Wenn  $a = 1$ , dann ist  $z \mapsto z + b$  eine Translation.  $\square$

Jetzt sind wir bereit für

*Beweis des Satzes 2.28.* In der komplexen Koordinate schreiben sich die Drehstreckungen als

$$z \mapsto a_1 z + b_1, \quad z \mapsto a_2 z + b_2$$

Ihre Komposition

$$z \mapsto a_1(a_2 z + b_2) + b_1 = (a_1 a_2)z + (a_1 b_2 + b_1)$$

ist nach der Proposition 2.90 eine Drehstreckung mit Winkel  $\arg a_1 + \arg a_2$  und Streckungsfaktor  $\|a_1\| \cdot \|a_2\|$ , falls  $a_1 a_2 \neq 1$ . Sonst ist es eine Translation.  $\square$

Aus Proposition 2.90 folgt auch, dass jede Affinität der komplexen affinen Gerade einer eigentlichen Ähnlichkeitstransformation der euklidischen Ebene entspricht. Die Umkehrung gilt auch, nach dem Satz 2.25. Wir haben also den folgenden Isomorphismus.

**Satz 2.91.** *Die Gruppe der Affinitäten einer komplexen Geraden ist zur Gruppe der eigentlichen Ähnlichkeitstransformationen der euklidischen Ebene isomorph:*

$$\text{Affin}(\mathbb{C}) \cong \text{Sim}^+(\mathbb{E}^2)$$

Man kann dieselben Argumente auch ohne Benutzung der komplexen Zahlen darstellen, indem man statt  $z \mapsto az$  die Abbildung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto r D_\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(mit  $D_\varphi$  die Drehmatrix) betrachtet.

Andersherum, die komplexen Zahlen können als Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

definiert werden. Die Multiplikationsregel solcher Matrizen ist dieselbe wie die der komplexen Zahlen. Ähnliche Matrizen mit komplexen Einträgen

$$M(z, w) := \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix}$$

produzieren “hyperkomplexe Zahlen”, die Quaternionen. Bezeichnet man

$$i := M(i, 0), \quad j := M(0, 1), \quad k := M(0, -i)$$

so kann jedes Quaternion als  $a+bi+cj+dk$  geschrieben werden. Die Multiplikationsregeln der Quaternionen sind

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k = -ji, \quad jk = i = -kj, \quad ki = j = -ik$$

also nicht kommutativ.

Die Quaternionen vom Betrag 1 bilden die *spezielle unitäre Gruppe*

$$\mathrm{SU}(2) := \{M \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \mid \bar{M}^\top M = E\} = \{M(z, w) \mid \|z\|^2 + \|w\|^2 = 1\}$$

Diese Gruppe eignet sich gut, um die Orthogonaltransformationen von  $\mathbb{R}^3$  und  $\mathbb{R}^4$  zu beschreiben. Es existieren nämlich Epimorphismen

$$\mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{SO}(3), \quad \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{SO}(4)$$

mit dem Kern  $\{\pm E\}$ , bzw.  $\{(E, E), (-E, -E)\}$ . Mehr hierzu siehe in [Sti08].

Beachte auch das offensichtliche Isomorphismus

$$\mathrm{SU}(1) \rightarrow \mathrm{SO}(2), \quad e^{i\varphi} \mapsto D_\varphi$$

von welchem in diesem Abschnitt Gebrauch gemacht wurde.

## 5.8 Volumina der Parallelotope und Simplexe

**Definition 2.92.** Seien  $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$  linear unabhängige Vektoren. Dann heißt die Menge

$$P(v_1, \dots, v_m) := \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \mid \lambda_i \in [0, 1]\}$$

das von  $v_1, \dots, v_m$  aufgespannte Parallelotop.

Parallelogramm ist ein 2-dimensionales Parallelotop.

Eine detaillierte Behandlung des Volumenbegriffs ist aufwändig. Deswegen setzen wir einfach per Definition Folgendes.

**Definition 2.93.** Das Volumen eines volldimensionalen Parallelotops ist gegeben durch

$$\mathrm{Vol}_n(P(v_1, \dots, v_n)) = |\det(v_1, \dots, v_n)| \tag{2.16}$$

**Beispiel 2.94.** • Der Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Ecken  $(0, 0)$ ,  $(a, b)$ ,  $(c, d)$ ,  $(a + c, b + d)$  ist  $|ac - bd|$ .

- Sind die Vektoren  $v_i$  Vielfachen der Standardbasisvektoren, so ist  $(v_1, \dots, v_n)$  eine Diagonalmatrix, und die Formel (2.16) wird zum “Das Volumen eines rechtwinkligen Parallelotops ist das Produkt seiner Seitenlängen”.

Die allgemeine Formel kann glaubhaft gemacht werden, indem man die Invarianz der Determinante unter Spaltenaddition ausnutzt: geometrisch entspricht es einer Scherung des Parallelotops, die das Volumen ebenfalls erhalten soll.

Beachte auch, dass der Betrag der Determinante in (2.16) erhalten bleibt, wenn die Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  bezüglich einer anderen orthonormalen Basis zerlegt werden. Und zwar, die neuen Koordinaten errechnen sich durch Multiplikation von  $(v_1, \dots, v_n)$  mit der (Inversen von) Basiswechsellmatrix. Diese Matrix ist orthogonal und hat daher Determinante  $\pm 1$ .

**Definition 2.95.** Seien  $p_0, \dots, p_m$  affin unabhängige Punkte eines affinen Raums. Dann heißt die Menge

$$\Delta(p_0, \dots, p_m) := \{ \lambda_0 p_0 + \dots + \lambda_m p_m \mid \sum_i \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \}$$

das ( $m$ -dimensionale) Simplex mit den Ecken  $p_0, \dots, p_m$ .

**Definition 2.96.** Das Volumen eines volldimensionalen Simplex in einem euklidischen affinen Raum ist gegeben durch

$$\text{Vol}_n(\Delta(p_0, \dots, p_n)) = \frac{1}{n!} |\det(p_1 - p_0, \dots, p_n - p_0)| \quad (2.17)$$

Ein Nachteil der Formel (2.16) ist, dass sie nur für volldimensionale Parallelotope gilt. Andererseits macht  $\text{Vol}_m(P(v_1, \dots, v_m))$  auch für  $m < n$  Sinn: das ist das Volumen eines volldimensionalen Parallelotops im euklidischen Raum  $\text{span}\{v_1, \dots, v_m\}$ . Um dieses Volumen zu berechnen, kann man  $v_1, \dots, v_m$  bezüglich einer orthonormalen Basis von  $\text{span}\{v_1, \dots, v_m\}$  zerlegen. Das ergibt eine  $m \times m$  Matrix, der Betrag deren Determinante das gesuchte Volumen ist.

Es gibt eine andere Formel, die für alle  $m$  gilt.

**Definition 2.97.** Die Gramsche Matrix einer Folge von Vektoren  $(v_1, \dots, v_m)$  besteht aus ihren paarweisen Skalarprodukten:

$$G(v_1, \dots, v_m) := \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \dots & \langle v_1, v_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_m, v_1 \rangle & \dots & \langle v_m, v_m \rangle \end{pmatrix}$$

**Satz 2.98.** Die Vektoren  $v_1, \dots, v_m$  sind linear abhängig genau dann, wenn die Determinante ihrer Gramschen Matrix gleich Null ist.

Sind die Vektoren  $v_1, \dots, v_m$  linear unabhängig, so ist das Volumen des von  $(v_1, \dots, v_m)$  aufgespannten Parallelotops gleich der Quadratwurzel der Gramschen Determinante:

$$\text{Vol}_m(P(v_1, \dots, v_m)) = \sqrt{\det(G(v_1, \dots, v_m))} \quad (2.18)$$

*Beweis.* Beide Behauptungen folgen aus

$$\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_m \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_m, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_m, v_m \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^\top \\ \vdots \\ v_m^\top \end{pmatrix} (v_1 \ \cdots \ v_m)$$

Wenn  $m < n$ , dann soll angenommen werden, dass alle  $v_i$  in der Hülle der ersten  $m$  Standardbasisvektoren liegen.  $\square$

**Korollar 2.99.** Die Punkte  $p_0, \dots, p_m \in \mathbb{R}^n$  sind affin abhängig genau dann, wenn

$$\det(G(p_1 - p_0, \dots, p_m - p_0)) = 0$$

Sind die Punkte  $p_0, \dots, p_m$  affin unabhängig, so gilt

$$\text{Vol}_m(\Delta(p_0, \dots, p_m)) = \frac{1}{m!} \sqrt{\det(G(p_1 - p_0, \dots, p_m - p_0))}$$

**Beispiel 2.100.** Für  $m = 2$  ist die Gramsche Determinante gleich

$$\|v_1\|^2 \|v_2\|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2 = \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 (1 - \cos^2 \gamma_{12}) = \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 \sin^2 \gamma_{12}$$

wobei  $\gamma_{12}$  der Winkel zwischen den Vektoren  $v_1$  und  $v_2$  ist. Das stimmt mit der bekannten Formel für die Fläche eines Dreiecks überein:

$$A = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

Die Determinantenformel benutzt die Koordinaten der Ecken, die Gramsche Formel benutzt die Längen der von einer Ecke ausgehenden Kanten und die Winkel zwischen diesen Kanten. Ein Simplex ist aber auch durch seine Kantenlängen eindeutig bestimmt. Folglich soll es einen Weg geben, das Volumen aus den Kantenlängen zu berechnen.

**Satz 2.101** (Cayley-Menger Determinante). Seien  $p_0, \dots, p_m$  Punkte im euklidischen affinen Raum. Bezeichnen wir mit  $\ell_{ij} := \|p_i - p_j\|$  die paarweisen Abstände zwischen diesen Punkten. Betrachten wir die Matrix

$$CM(\ell) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ell_{01}^2 & \cdots & \ell_{0m}^2 \\ 1 & \ell_{10}^2 & 0 & \cdots & \ell_{1m}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ell_{m0}^2 & \ell_{m1}^2 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Die Punkte  $p_0, \dots, p_m$  sind affin abhängig genau dann, wenn  $\det CM(\ell) = 0$ . Sind sie affin unabhängig, dann gilt

$$\text{Vol}_m(\Delta(p_0, \dots, p_m)) = \frac{\sqrt{(-1)^{m+1} \det CM(\ell)}}{2^{\frac{m}{2}} m!} \quad (2.19)$$



Es genügt, die Behauptung über affine Abhängigkeit und die Volumen-Formel für volldimensionale Simplexe zu beweisen. Deswegen setzen wir im Weiteren  $m = n$ .

**Lemma 2.102.** Für affin unabhängige Punkte  $p_0, \dots, p_n \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$\text{Vol}_n(\Delta(p_0, \dots, p_n)) = \frac{1}{n!} \sqrt{\det(1 + \langle p_i, p_j \rangle)}$$

Hier steht  $(a_{ij})$  für eine Matrix mit Einträgen  $a_{ij}$ .

*Beweis.* Sei  $\tilde{p}_i = (1, p_i) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Dann gilt

$$\text{Vol}_{n+1}(\Delta(0, \tilde{p}_0, \dots, \tilde{p}_n)) = \frac{1}{(n+1)!} \sqrt{\det(G(\tilde{p}_0, \dots, \tilde{p}_n))} = \frac{1}{(n+1)!} \sqrt{\det(1 + \langle p_i, p_j \rangle)}$$

Andererseits,

$$\text{Vol}_{n+1}(\Delta(0, \tilde{p}_0, \dots, \tilde{p}_n)) = \frac{1}{n+1} \text{Vol}_n(\Delta(p_0, \dots, p_n))$$

(Volumen einer Pyramide). □

*Beweis des Satzes 2.101.* Durch Zeilen- und Spaltenumformungen erhalten wir

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1^\top \\ 1 & \ell_{ij}^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1^\top \\ 1 & \ell_{ij}^2 - \|p_i\|^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1^\top \\ 1 & \ell_{ij}^2 - \|p_i\|^2 - \|p_j\|^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1^\top \\ 1 & -2\langle p_i, p_j \rangle \end{pmatrix}$$

Hier steht 1 für einen Spaltenvektor mit allen Komponenten gleich 1. Durch weitere Zeilen- und Spaltenumformungen folgt

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1^\top \\ 1 & -2\langle p_i, p_j \rangle \end{pmatrix} = (-2)^{n+1} \det \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}1^\top \\ 1 & \langle p_i, p_j \rangle \end{pmatrix} = (-2)^n \det \begin{pmatrix} 0 & 1^\top \\ 1 & \langle p_i, p_j \rangle \end{pmatrix}$$

Jetzt beachten wir

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1^\top \\ 1 & \langle p_i, p_j \rangle \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & 1^\top \\ 1 & \langle p_i, p_j \rangle \end{pmatrix}$$

wegen  $\det(\langle p_i, p_j \rangle) = 0$ , weil die  $n+1$  Vektoren  $p_0, \dots, p_n$  linear abhängig sind (Satz 2.98). Folglich,

$$\begin{aligned} (-2)^n \det \begin{pmatrix} 0 & 1^\top \\ 1 & \langle p_i, p_j \rangle \end{pmatrix} &= (-2)^n \det \begin{pmatrix} -1 & 1^\top \\ 1 & \langle p_i, p_j \rangle \end{pmatrix} \\ &= (-2)^n \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 + \langle p_i, p_j \rangle \end{pmatrix} = (-1)^{n+1} 2^n \det(1 + \langle p_i, p_j \rangle) \end{aligned}$$

Der Satz folgt jetzt aus Lemma 2.102. □

**Beispiel 2.103.** Für  $n = 2$  haben wir

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{pmatrix} = a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2$$

$$= -(a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)$$

Daraus folgt die Heron-Formel für die Fläche des Dreiecks mit Seitenlängen  $a, b, c$ :

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

wobei  $s = \frac{a+b+c}{2}$ .

## 5.9 Affine und euklidische Begriffe

Der Satz über Seitenhalbierende. Aufgaben aus [Yag68].

Volumina unter affinen Transformationen.

## 6 Ausblick

### 6.1 Diskrete Untergruppen und Spiegelungsgruppen

Euklidische Dreiecksgruppen.

### 6.2 Billarde

Das Reflexionsgesetz “Einfallswinkel = Ausfallswinkel” folgt in der klassischen Mechanik aus der Erhaltung des Impulses (die Kraft beim Abprall wirkt senkrecht zur Fläche, deswegen bleibt die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit erhalten) und aus der Erhaltung der kinetischen Energie (die Normalkomponente der Geschwindigkeit soll ihren Betrag erhalten, damit die kinetische Energie dieselbe bleibt).

Auf die elektromagnetischen Wellen, wie Licht, darf man die klassische Mechanik nur mit Vorsicht anwenden. Hier kann man das Reflexionsgesetz mit dem Fermatschen Prinzip erklären: das Licht folgt dem schnellsten Weg (dieses Prinzip erklärt auch das Brechungsgesetz). Solche *Variationsprinzipien*, die das Verhalten eines physikalischen Systems durch Minimierung einer bestimmten Größe beschreiben, sind in der modernen Physik sehr verbreitet.

Die folgende Proposition zeigt, dass der kürzeste Weg die Eigenschaft “Einfallswinkel = Ausfallswinkel” besitzt.

**Proposition 2.104.** *Seien  $A$  und  $B$  zwei Punkte auf einer Seite von der Geraden  $\ell$ . Dann gibt es genau einen Punkt  $P \in \ell$ , sodass  $\angle APC = \angle BPD$ , wobei  $C$  und  $D$  die Lotfußpunkte von  $A$  und  $B$  auf  $\ell$  sind.*

Derselbe Punkt  $P$  minimiert die Summe der Abstände von  $A$  und  $B$  zu einem Punkt auf  $\ell$ :

$$AP + PB = \min\{AX + XB \mid X \in \ell\}$$

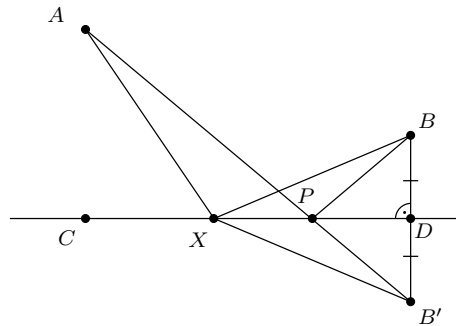


Abbildung 2.7: Der kürzeste Weg hat die gleichen Ein- und Ausfallswinkel

*Beweis.* Sei  $B'$  das Bild des Punktes  $B$  unter der Spiegelung an der Geraden  $\ell$ , siehe Abb. 2.7. Dann gilt  $\angle BXD = \angle B'XD$  für jeden Punkt  $X$  auf  $\ell$ . Folglich

$$\angle AXC = \angle BXD \Leftrightarrow \angle AXC = \angle B'XD \Leftrightarrow X \text{ ist der Schnittpunkt von } AB' \text{ mit } \ell$$

Das beweist die erste Behauptung: ein Punkt mit gleichen Ein- und Ausfallswinkel existiert und ist eindeutig.

Die zweite Behauptung folgt aus der Dreiecksungleichung

$$AX + XB' \geq AB',$$

die genau dann zur Gleichung wird, wenn  $X$  auf dem Intervall  $AB$  liegt. □

Billard im Rechteck. Periodische Bahn im spitzwinkligen Dreieck. Siehe [Tab13]. (Im Netz der FU als freie Online-Ressource verfügbar.)

### 6.3 Euklidische Metriken auf dem Torus

### 6.4 Lie-Gruppen

Siehe [Sti08].

### 6.5 Normale Untergruppen, einfache Gruppen

$$SO(n) \triangleleft \text{Isom}^+(\mathbb{E}^n)$$

$SO(3)$  ist einfach

# Kapitel 3

## Kegelschnitte und Quadriken

### 1 Kegelschnitte

#### 1.1 Ellipse, Parabel, Hyperbel

Seien  $A, E$  zwei sich nicht orthogonal schneidende Geraden in  $\mathbb{R}^3$ . Die Fläche, die bei der Drehung der Geraden  $E$  um die Achse  $A$  entsteht, heißt *Doppelkegel*. Die Gerade  $E$ , sowie alle ihre Bilder, heißt *Erzeugende*.

**Definition 3.1.** Die Schnittmenge  $K \cap H$  eines Doppelkegels mit einer Ebene heißt Kegelschnitt. Wenn die Ebene  $H$  nicht durch die Spitze des Doppelkegels geht, dann heißt der Kegelschnitt eigentlich.

Man kann drei Typen der eigentlichen Kegelschnitte unterscheiden (siehe Abb. 3.1):

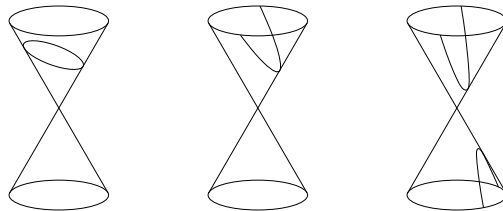


Abbildung 3.1: Ellipse, Parabel, Hyperbel

- Ellipse: der Schnitt ist eine geschlossene Kurve; im Spezialfall wo  $H$  senkrecht zur Achse des Kegels ist, ist die Ellipse eine Kreislinie.
- Parabel: die Ebene  $H$  ist parallel zu einer Erzeugenden, die Schnittkurve ist unbeschränkt;
- Hyperbel: die Ebene schneidet beide Kegel des Doppelkegels, der Schnitt besteht aus zwei unbeschränkten Komponenten.

## 1.2 Fokale und bifokale Eigenschaften

**Satz 3.2** (Bifokale Eigenschaften). *Für jede Ellipse  $C = K \cap H$  existieren zwei Punkte  $F_1, F_2 \in H$ , sodass*

$$C = \{X \in H \mid XF_1 + XF_2 = \text{const}\} \quad (3.1)$$

*Für jede Hyperbel  $C = K \cap H$  existieren zwei Punkte  $F_1, F_2 \in H$ , sodass*

$$C = \{X \in H \mid |XF_1 - XF_2| = \text{const}\} \quad (3.2)$$

Die Punkte  $F_1, F_2$  heißen die *Brennpunkte* der Ellipse bzw. der Hyperbel.

*Beweis.* Betrachten wir zwei in den Kegel eingeschriebene Sphären, die zur Ebene  $H$  tangential sind (die sogenannten Dandelinsche Kugeln). Seien  $F_1, F_2 \in H$  die Tangentialpunkte. Durch einen beliebigen Punkt  $X \in C$  ziehen wir eine Erzeugende des Kegels. Die Erzeugende ist zu den beiden Sphären tangential; bezeichnen wir mit  $P_1, P_2$  die Tangentialpunkte. Es gilt

$$XF_1 = XP_1, \quad XF_2 = XP_2$$

da alle Tangenten von einem Punkt zu Sphäre gleich lang sind.

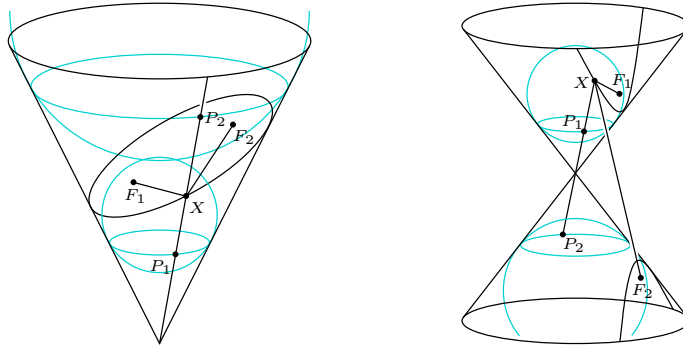


Abbildung 3.2: Dandelinsche Kugeln.

Wenn  $C$  eine Ellipse ist, dann liegt  $X$  zwischen  $P_1$  und  $P_2$ , sodass

$$XF_1 + XF_2 = XP_1 + XP_2 = P_1P_2$$

Die Strecke  $P_1P_2$  ist für alle Erzeugenden gleich lang.

Wenn  $C$  eine Hyperbel ist, dann liegt entweder  $P_1$  zwischen  $P_2$  und  $X$  oder  $P_2$  zwischen  $P_1$  und  $X$ . Folglich gilt

$$|XF_1 - XF_2| = P_1P_2$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass für jeden Punkt  $X \in H$ , der nicht auf der Ellipse (bzw. Hyperbel)  $K \cap H$  liegt, ist die Summe (bzw. Betrag der Differenz) der Abstände

anders als für die Punkte auf  $K \cap H$ . Im Fall einer Ellipse betrachten wir hierfür den Schnittpunkt  $P$  der Halbgeraden  $F_1X$  mit dem Kegel. Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$XF_1 + XF_2 \begin{cases} < PF_1 + PF_2 & \text{wenn } X \text{ innerhalb von } C \text{ liegt} \\ > PF_1 + PF_2 & \text{wenn } X \text{ außerhalb von } C \text{ liegt} \end{cases}$$

Siehe Abb. 3.3. Der Fall der Hyperbel wird dem Leser überlassen.

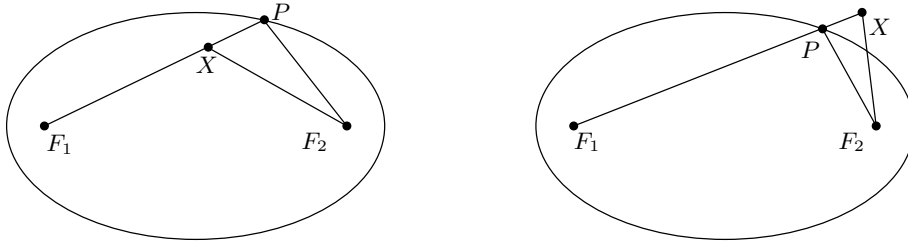


Abbildung 3.3:  $XF_1 + XF_2 \neq PF_1 + PF_2$

□

Für die Parabel gibt es nur eine Dandelinsche Kugel. Der folgende Satz beschreibt die metrische (monofokale) Eigenschaft der Parabel, die aus Betrachtung dieser Kugel entsteht. Es stellt sich dabei heraus, dass Ellipse und Hyperbel auch eine ähnliche Eigenschaft besitzen.

**Satz 3.3** (Fokale Eigenschaft). *Für jede Parabel  $C = K \cap H$  existiert ein Punkt  $F \in H$  und eine Gerade  $\ell \in H$ , sodass*

$$C = \{X \in H \mid XF = \text{dist}(X, \ell)\} \quad (3.3)$$

*Sei  $C = K \cap H$  eine Ellipse, die kein Kreis ist. Dann existiert für jeden Brennpunkt  $F$  von  $C$  eine Gerade  $\ell \in H$  und eine reelle Zahl  $0 < e < 1$ , sodass*

$$C = \{X \in H \mid XF = e \cdot \text{dist}(X, \ell)\} \quad (3.4)$$

*Sei  $C = K \cap H$  eine Hyperbel. Dann existiert für jeden Brennpunkt  $F$  von  $C$  eine Gerade  $\ell \in H$  und eine reelle Zahl  $e > 1$ , sodass*

$$C = \{X \in H \mid XF = e \cdot \text{dist}(X, \ell)\} \quad (3.5)$$

Die Gerade  $\ell$  heißt die *Direktrix* (Ellipse und Hyperbel haben zwei Direktrices). Die Konstante  $e$  heißt die *Exzentrizität* der Ellipse, bzw. Hyperbel. Je näher  $e$  an 0 ist, desto weiter entfernt ist die Direktrix und desto “runder” die Ellipse. Das heißt, man kann informell den Kreis als Ellipse mit Exzentrizität 0 und Direktrix “im Unendlichen” interpretieren.

*Beweis.* Sei  $C = K \cap H$  eine Parabel. Dann existiert eine in  $K$  eingeschriebene Sphäre  $S$ , die tangential zur Ebene  $H$  ist. Der Tangentialpunkt  $F$  wird der Brennpunkt sein. Die Gerade  $\ell$  definieren wir als die Schnittgerade von  $H$  mit der Ebene  $L$  durch die Kreislinie  $K \cap S$ .

Sei  $X \in C$  ein beliebiger Punkt. Dann gilt  $XF = XP$ , wobei  $P$ , wie im Beweis des Satzes 3.2, der Tangentialpunkt der Erzeugenden durch  $X$  an der Sphäre  $S$  ist. Es soll nun gezeigt werden, dass  $XP = XQ$ , wobei  $XQ$  das Lot auf die Gerade  $\ell$  ist. Das gilt in der Tat, denn  $XP$  liegt auf einer Erzeugenden des Kegels, und  $XQ$  ist zu einer Erzeugenden parallel. Da alle Erzeugenden diegleiche Neigung auf die Ebene  $L$  haben, sind die Abstände ihnen entlang von  $X$  zu  $L$  gleich.

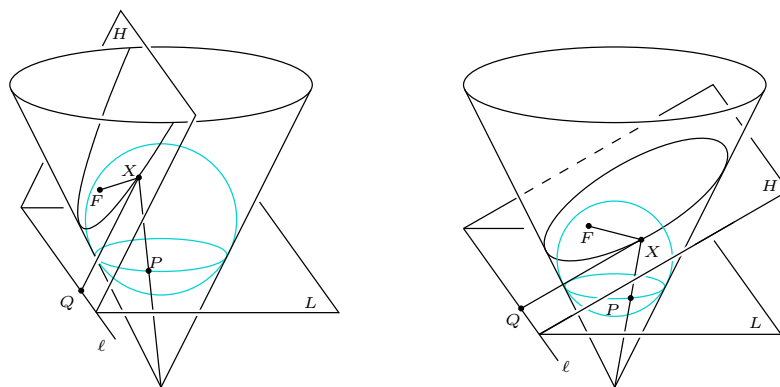


Abbildung 3.4: Monofokale Eigenschaften.

Wenn  $C$  eine Ellipse oder eine Hyperbel ist, dann haben wir ebenfalls  $XF = XP$ . Das Lot  $XQ$  auf  $\ell$  hat wieder eine konstante, von  $X$  unabhängige, Neigung auf die Ebene  $L$ , die diesmal nicht gleich der Neigung der Kegelerzeugenden ist. Bei Ellipsen ist sie kleiner, und bei Hyperbeln größer. Daher haben wir

$$XP = e \cdot XQ$$

mit  $e < 1$  für Ellipsen und  $e > 1$  für Hyperbeln.

Damit ist es bewiesen, dass jeder Punkt  $X \in C$  die Bedingung  $XF = e \cdot \text{dist}(X, \ell)$  erfüllt. Um zu zeigen, dass diese Bedingung auch hinreichend für  $X \in C$  ist, zieht man durch  $X$  eine zu  $\ell$  parallele Gerade in  $H$  und betrachtet ihre Schnittpunkte mit  $C$  (falls sie existieren).  $\square$

### 1.3 Gleichungen der Kegelschnitte

Jetzt können wir den 3-dimensionalen Raum verlassen, und Ellipse, Parabel und Hyperbel durch ihre (Bi)fokaleigenschaften als Teilmengen der euklidischen Ebene definieren.

**Satz 3.4.** *Jede Ellipse, die kein Kreis ist, hat im geeigneten Koordinatensystem die*

Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0$$

Jede Hyperbel hat im geeigneten Koordinatensystem die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0$$

Die Exzentrizität und der Abstand vom Zentrum zur Direktrix sind in beiden Fällen gleich

$$e = \frac{c}{a}, \quad d = \frac{a^2}{c}$$

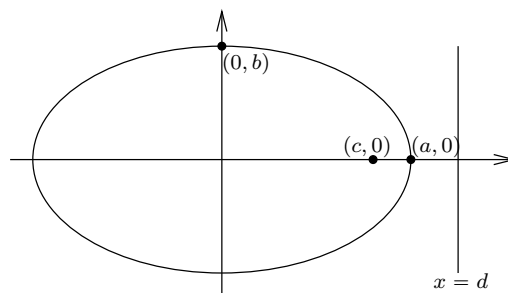
wobei

$$c = \begin{cases} \sqrt{a^2 - b^2} & , \text{ für die Ellipse} \\ \sqrt{a^2 + b^2} & , \text{ für die Hyperbel} \end{cases}$$

Jede Parabel hat im geeigneten Koordinatensystem die Gleichung

$$y^2 = 2hx,$$

wobei  $h$  der Abstand zwischen dem Brennpunkt und der Direktrix ist.



*Beweis.* Wählen wir zuerst den Brennpunkt  $F$  als Koordinatenursprung und richten die  $x$ -Achse senkrecht zur Direktrix. Ist  $h$  der Abstand von  $F$  zur Direktrix, so hat die Direktrix die Gleichung  $\{x = h\}$  und die Ellipse die Gleichung

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e|x - h|$$

Nach Umformung erhalten wir

$$(1 - e^2)x^2 + 2he^2x + y^2 = h^2e^2$$

Wenn  $e \neq 1$  (der Kegelschnitt ist Ellipse oder Hyperbel), dann ergibt die quadratische Ergänzung

$$(1 - e^2) \left( x + \frac{he^2}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 = \frac{h^2e^2}{1 - e^2}$$



Sei  $e < 1$ . Bezeichnen wir  $c := \frac{he^2}{1-e^2} > 0$ , so wird die Gleichung zu

$$(1 - e^2)(x + c)^2 + y^2 = c^2 \frac{1 - e^2}{e^2}$$

Wählen wir den Punkt  $(-c, 0)$  zum neuen Koordinatenursprung und behalten die Richtungen der Koordinatenachsen, so hat die Kurve die Gleichung

$$\frac{x^2}{c^2/e^2} + \frac{y^2}{c^2(1 - e^2)/e^2} = 1$$

Es bleibt  $a = \frac{c}{e}$  und  $b = c \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}$  zu setzen. Dann ist  $c^2 = a^2 - b^2$  und der Abstand vom Zentrum zur Direktrix

$$c + h = \frac{h}{1 - e^2} = \frac{c}{e^2} = \frac{a^2}{c}$$

Im Fall der Hyperbel  $e > 1$  setzt man  $c := \frac{he^2}{e^2-1} > 0$  und wählt den neuen Ursprung in  $(c, 0)$ . Man setzt  $a = \frac{c}{e}$  und  $b = c \frac{\sqrt{e^2-1}}{e}$ , sodass  $a^2 + b^2 = c^2$  ist. Der Abstand vom Zentrum zur Direktrix ist

$$c - h = \frac{h}{1 - e^2} = \frac{c}{e^2} = \frac{a^2}{c}$$

□

#### 1.4 Konfokale Kegelschnitte und die Billardeigenschaften

**Definition 3.5.** *Zwei Ellipsen oder Hyperbeln heißen konfokal, wenn sie dieselben Brennpunkte haben. Zwei Parabeln heißen konfokal, wenn sie denselben Brennpunkt und parallele Directrices haben.*

Eine Ellipse und eine Hyperbel mit denselben Brennpunkten werden auch konfokal genannt.

Legen wir zwei Punkte  $F_1, F_2$  fest, so überdecken die Ellipsen mit Brennpunkten  $F_1, F_2$  die Ebene minus das Intervall  $[F_1, F_2]$  ohne Überlappung. Analog sind die Hyperbeln mit Brennpunkten  $F_1, F_2$  disjunkt und überdecken die Ebene ohne die Mittelsenkrechte zu  $F_1F_2$  und ohne zwei Halbgeraden, die aus der Geraden  $F_1F_2$  durch das Entfernen des offenen Intervalls  $F_1F_2$  entstehen.

Die konfokalen Parabel überdecken Ebene ohne die zur Richtung der Directrices orthogonalen Geraden. Dabei gehen durch jeden Punkt zwei konfokale Parabeln.

**Satz 3.6** (Billardeigenschaften). *Sei  $X$  ein beliebiger Punkt auf einer Ellipse, bzw. Hyperbel, und  $t$  die Tangente durch diesen Punkt. Dann bilden die Geraden  $XF_1$  und  $XF_2$  denselben Winkel mit  $t$ . Im Fall der Hyperbel ist  $t$  der Bisektor des Winkels  $F_1XF_2$ ; im Fall der Ellipse ist  $t$  orthogonal zum Bisektor.*

*Für jeden Punkt  $X$  auf einer Parabel bildet die Tangente  $t$  durch  $X$  den Bisektor des Winkels  $FXP$ , wobei  $XP$  das Lot auf die Direktrix ist.*

*Beweis.* Sei  $\{X \mid XF_1 + XF_2 = 2a\}$  eine Ellipse. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass ein Punkt  $Y$  außerhalb der Ellipse genau dann liegt, wenn  $YF_1 + YF_2 > 2a$ . Da alle Punkte der Tangente  $t$  außerhalb der Ellipse liegen, mit Ausnahme von  $X$ , der auf der Ellipse liegt, ist  $X$  derjenige Punkt auf  $t$ , der die Summe der Abstände zu den Punkten  $F_1$  und  $F_2$  minimiert. Nach Proposition 2.104 ist der Einfallswinkel gleich dem Ausfallwinkel, und der Satz ist im Fall der Ellipse bewiesen.

Im Fall der Hyperbel ist der Beweis analog, wenn man die Behauptung der Aufgabe 3.7 beweist.  $\square$

**Aufgabe 3.7.** Seien  $A$  und  $B$  Punkte auf unterschiedlichen Seiten der Geraden  $\ell$ , sodass  $\text{dist}(A, \ell) > \text{dist}(B, \ell)$ . Dann gibt es genau einen Punkt  $P \in \ell$ , sodass  $\ell$  der Bisektor des Winkels  $APB$  ist.

Derselbe Punkt  $P$  maximiert die Differenz der Abstände von  $A$  und  $B$  zu einem Punkt auf  $\ell$ :

$$AP - PB = \max\{AX - XB \mid X \in \ell\}$$

**Korollar 3.8.** Die konfokalen Kegelschnitte bilden ein orthogonales Netz. Das heißt, jedes konfokale Paar aus Ellipse und Hyperbel oder aus zwei Parabeln schneidet sich orthogonal.

## 1.5 Billard in einer Ellipse

Mehr über Geometrie der Kegelschnitte in [Ber87].

## 2 Quadriken

### 2.1 Definition und Basiseigenschaften

**Definition 3.9.** Eine Quadrik (oder Hyperfläche zweiten Grades) in einem  $n$ -dimensionalen reellen affinen Raum ist die Lösungsmenge  $Q \subset \mathbb{R}^n$  einer Polynomgleichung vom Grad 2 in  $n$  Variablen, die den Koordinaten in  $\mathbb{R}^n$  entsprechen:

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid P(x_1, \dots, x_n) = 0\}, \quad \deg P = 2 \quad (3.6)$$

**Beispiel 3.10.** • Ellipse, Parabel und Hyperbel sind Quadriken in  $\mathbb{R}^2$ .

- Der Doppelkegel in  $\mathbb{R}^3$  mit Achse  $Oz$  und Erzeugenden  $\{x = az, y = 0\}$  hat die Gleichung  $\pm\sqrt{x^2 + y^2} = az$ , oder äquivalent

$$x^2 + y^2 - a^2z^2 = 0$$

ist also eine Quadrik in  $\mathbb{R}^3$ .

- Der Punkt  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$  ist eine Quadrik: er ist die einzige Lösung der Gleichung

$$x^2 + y^2 = 0$$

- Die leere Menge ist eine Quadrik: sie ist die Lösungsmenge von

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

Die Definition 3.9 benutzt ein Koordinatensystem im affinen Raum und ist daher nicht ganz korrekt.

**Lemma 3.11.** *Sei  $\mathbb{A}^n$  ein  $n$ -dimensionaler reeller affiner Raum. Wenn  $Q \subset \mathbb{A}^n$  die Nullstellenmenge eines Polynoms vom Grad  $m$  bezüglich eines Koordinatensystems ist, dann kann sie in jedem Koordinatensystem als die Lösungsmenge eines Polynoms vom selben Grad dargestellt werden.*

*Beweis.* Ein Koordinatenwechsel ist eine lineare Substitution  $x_i = \sum_j a_{ij}x'_j + b_i$  mit  $\det(a_{ij}) \neq 0$ . Das führt zur Darstellung von  $Q$  als die Nullstellenmenge eines Polynoms  $P'(x')$ . Offensichtlich ist  $\deg(P') \leq \deg(P)$ . Wegen Invertierbarkeit der Koordinatenwechsel gilt auch  $\deg(P) \leq \deg(P')$ , also  $\deg(P) = \deg(P')$ .  $\square$

**Satz 3.12.** *Der Schnitt einer Quadrik mit einem affinen Unterraum  $L \subset \mathbb{R}^n$  ist entweder eine Quadrik in  $L$  oder ein affiner Unterraum von  $L$ .*

*Beweis.* Sei  $Q \subset \mathbb{R}^n$  die Quadrik. Nach Lemma 3.11 können wir oBdA annehmen, dass

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}$$

Wenn  $Q$  die Nullstellenmenge des Polynoms  $P$  ist, dann gilt

$$Q \cap L = \{(x_1, \dots, x_k) \mid P(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) = 0\}$$

Das Polynom  $P'(x_1, \dots, x_k) := P(x_1, \dots, x_k, \dots, 0)$  hat den Grad höchstens 2. Deswegen ist  $Q \cap L$  eine Quadrik oder affiner Unterraum von  $L$  (möglicherweise das ganze  $L$ ).  $\square$

**Korollar 3.13.** *Jede Gerade entweder schneidet eine Quadrik in höchstens zwei Punkten oder ist in der Quadrik vollständig enthalten.*

*Beweis.* Der Schnitt einer Quadrik mit einer Geraden  $\ell$  ist nach Satz 3.12 entweder Quadrik in  $\ell$ , d. h. Nullstellenmenge einer quadratischen Gleichung, oder ein affiner Unterraum von  $\ell$ .  $\square$

**Korollar 3.14.** *Eigentliche Kegelschnitte sind Quadriken.*

*Beweis.* In der Tat, der Doppelkegel ist eine Quadrik und eigentliche Kegelschnitte keine affinen Räume.  $\square$

**Bemerkung 3.15.** Die Ebene  $y = z$  schneidet den Kegel  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  entlang der Geraden  $\{x = 0, y = z\}$ . Jede Gerade in der Ebene kann allerdings als Quadrik gesehen werden, mit der Gleichung der Form  $(ax + by + c)^2 = 0$ . (Und die Substitution  $y = z$  in  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  liefert die Gleichung  $x^2 = 0$ .)

Man muss zwischen den Mengen und den sie definierenden Polynomen unterscheiden: unterschiedliche Polynome können dieselbe Nullstellenmenge haben:

- $P_1(x, y) = x^2 + y^2 + 1$  und  $P_2(x, y) = 1$  haben  $\emptyset$  als die Nullstellenmenge;
- $P_1(x, y) = x$  und  $P_1(x, y) = x^2$  haben die  $y$ -Achse als die Nullstellenmenge;
- $P_2 = \lambda P_1$  hat bei  $\lambda \neq 0$  dieselbe Nullstellenmenge als  $P_1$ .

Es gibt zwei mögliche Lösungen:

- das Polynom minimalen Grades zu betrachten, das  $Q$  als die Nullstellenmenge hat (z. B.  $x$  statt  $x^2$ );
- alle auf  $Q$  verschwindende Polynome zu betrachten.

Mehr über Nullstellenmengen von Polynomen siehe in [Ful89] und [Rei88].

## 2.2 Bild einer Quadrik unter affiner Transformation

Sei  $Q = \{x \in \mathbb{A}^n \mid P(x) = 0\}$  eine Quadrik, und sei  $f: \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$  eine Transformation des affinen Raums  $\mathbb{A}^n$ . Durch welche Gleichung wird das Bild  $f(Q)$  beschrieben? Unter Benutzung der Bijektivität von  $f$  erhalten wir

$$f(Q) = \{f(x) \mid P(x) = 0\} = \{y \mid P(f^{-1}(y)) = 0\}$$

Das Bild unter  $f$  der Nullstellenmenge von  $P$  ist die Nullstellenmenge von  $P \circ f^{-1}$ .

(Hier kann  $f$  eine beliebige, nicht unbedingt affine, Transformation sein, sowie  $P$  eine beliebige Funktion, nicht unbedingt ein Polynom.)

Ist  $P$  ein Polynom zweiten Grades, und  $f$  eine affine Transformation, so ist  $P \circ f^{-1}$  das Ergebnis der linearen Substitution  $x = f^{-1}(y)$  in  $P(x)$ . Folglich,

Klassifikation der quadratischen Polynome bis auf lineare (bzw. orthogonale) Substitutionen führt zu Klassifikation der Quadriken bis auf affine (bzw. orthogonale) Transformationen.

(Unter einer orthogonalen Substitution verstehen wir eine lineare Substitution  $y = Ax + b$  mit  $A \in O(n)$ .)

Für bessere Handhabung führen wir jetzt die Matrixschreibweise für Quadriken und ihre Transformationen ein. Jedes Polynom vom Grad 2 hat die Form

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_i b_i x_i + c = x^\top A x + 2b^\top x + c$$

ObdA  $a_{ij} = a_{ji}$  (wenn  $a_{ij} \neq a_{ji}$ , dann können beide dieser Koeffizienten durch  $\frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$  ersetzt werden, ohne dass  $P$  sich ändert). Deswegen werden wir die Matrix  $A$  symmetrisch voraussetzen (sodass  $(x, y) \mapsto x^\top A y$  eine symmetrische Bilinearform ist).

Äquivalent:

$$P(x) = \begin{pmatrix} 1 & x^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & b^\top \\ b & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Diese Schreibweise ist besonders gut für lineare Substitutionen geeignet. Und zwar, die Substitution  $x = Sy + u$  mit  $S \in \text{GL}(n)$ ,  $u \in \mathbb{R}^n$  schreibt sich als

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$$

und die Komposition  $P'(y) := P(Sy + u)$  als

$$P'(y) = \begin{pmatrix} 1 & y^\top \\ 0 & S^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & b^\top \\ b & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Hiermit haben wir Folgendes bewiesen.

**Proposition 3.16.** *Sei  $Q = \{P(x) = 0\}$  die Quadrik mit  $P$  wie in (3.7), und sei  $f \in \text{GA}(n)$  eine affine Transformation. Dann gilt  $f(Q) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid P'(y) = 0\}$  mit  $P'$  wie in (3.8), wobei  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & S \end{pmatrix}$  die Matrix von  $f^{-1}$  ist.*

### 2.3 Euklidische Klassifikation der Quadriken

**Satz 3.17** (Euklidische Hauptachsentransformation). *Für jede Quadrik  $Q \subset \mathbb{R}^n$  gibt es eine Isometrie  $f \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ , sodass das Bild  $f(Q)$  eine Gleichung in einer der folgenden Normalformen hat.*

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_k^2}{a_k^2} - \frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}^2} - \dots - \frac{x_{k+l}^2}{a_{k+l}^2} = 1 \quad (3.9)$$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_k^2}{a_k^2} - \frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}^2} - \dots - \frac{x_{k+l}^2}{a_{k+l}^2} = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_k^2}{a_k^2} - \frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}^2} - \dots - \frac{x_{k+l}^2}{a_{k+l}^2} = 2x_{k+l+1} \quad (3.11)$$

Hier ist  $a_1 \geq \dots \geq a_k > 0 < a_{k+1} \leq \dots \leq a_{k+l}$ .

*Beweis.* Die Reduktion des Polynoms  $P$  zu einer Normalform wird in zwei Schritten erfolgen:

$$y = Sx, \text{ dann } z = y + u = Sx + u$$

mit  $S \in \text{O}(n)$ . In einem Fall wird ein zusätzlicher Schritt benötigt.

1. *Schritt* (Diagonalisierung) Die Substitution  $y = Sx$  verändert die Matrix des Polynoms  $P$  wie folgt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & b^\top \\ b & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & b^\top S \\ S^\top b & S^\top A S \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} c & b'^\top \\ b' & A' \end{pmatrix}$$

Das heißt, die Matrix der 2-homogenen Terme verändert sich als

$$A' = S^\top A S \quad (3.12)$$

Da  $S \in O(n)$ , gilt  $S^\top = S^{-1}$ , und die Transformationsregel (3.12) ist dieselbe wie die Transformationsregel für Matrizen der linearen Abbildungen. Die Symmetrie  $A^\top = A$  der Matrix  $A$  (man sagt, die entsprechende Abbildung ist selbstadjungiert) führt zu

- $A$  hat nur reelle Eigenwerte;
- das Orthogonalkomplement eines invarianten Unterraums ist selbst invariant.

(Für Beweis der letzteren Aussage bringe die Matrix in die Blockform (2.15) und beachte, dass  $h = 0$  wegen der Symmetrie der Matrix.) Das beweist den folgenden

**Satz 3.18** (Spektralsatz). *Jeder selbstadjungierte Endomorphismus eines endlichdimensionalen euklidischen Raums hat eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.*

Für uns bedeutet das: Es existiert eine orthogonale Matrix  $S$ , sodass

$$S^\top AS = S^{-1}AS = \Lambda$$

eine Diagonalmatrix ist:  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Die neue Quadrik ist

$$\{y \in \mathbb{R}^n \mid \sum_i \lambda_i y_i^2 + 2 \sum_i b'_i y_i + c = 0\}$$

Wir dürfen annehmen (eine Umordnung der Koordinaten entspricht auch einer orthogonalen Transformation der Quadrik):

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k > 0 > \lambda_{k+1} \geq \dots \geq \lambda_{k+l}, \quad \lambda_{k+l+1} = \dots = \lambda_n = 0$$

2. Schritt (Quadratische Ergänzung) Die Substitution  $z = y + u$  resultiert in

$$\begin{pmatrix} 1 & u^\top \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & b'^\top \\ b' & \Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c' & b''^\top \\ b'' & \Lambda \end{pmatrix}$$

mit  $b'' = b' + \Lambda u$ , d. h.  $b''_i = b'_i + \lambda_i u_i$ . Wenn  $\lambda_i \neq 0$  für alle  $i$ , dann wählen wir  $u = -\Lambda^{-1}b'$ , sodass  $b'' = 0$ . Wenn  $c' \neq 0$ , dann dividieren wir die Gleichung durch  $c'$  und erhalten die Form (3.9). Wenn  $c' = 0$ , dann haben wir eine Gleichung der Form (3.10).

Wenn es  $\lambda_i = 0$  gibt, dann können wir  $b''_i = 0$  für  $i \leq k + l$  erreichen, sodass die Gleichung die folgende Form annimmt.

$$\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_{k+l} z_{k+l}^2 + 2b''_{k+l+1} z_{k+l+1} + \dots + 2b''_n z_n + c' = 0$$

In diesem Fall brauchen wir noch den dritten Schritt.

3. Schritt Nach einer Skalierung der Gleichung können wir

$$4(b''_{k+l+1}^2 + \dots + b''_n^2) + c'^2 = 1$$

annehmen und eine Orthogonalsubstitution in den letzten Koordinaten durchführen mit

$$t_{k+l+1} = 2b''_{k+l+1} z_{k+l+1} + \dots + 2b''_n z_n + c'$$

Wie die weiteren  $t_i$  mit  $i > k + l + 1$  aussehen, ist unwichtig. Die Gleichung bekommt die Form (3.11).  $\square$

## 2.4 Affine Klassifikation der Quadriken

**Satz 3.19** (Affine Hauptachsentransformation). *Für jede Quadrik  $Q \subset \mathbb{R}^n$  gibt es eine affine Transformation  $f \in \text{Affin}(\mathbb{R}^n)$ , sodass das Bild  $f(Q)$  eine Gleichung in einer der folgenden Normalformen hat.*

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+l}^2 = 1 \quad (3.13)$$

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+l}^2 = 0 \quad (3.14)$$

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+l}^2 = 2x_{k+l+1} \quad (3.15)$$

*Beweis.* Das folgt aus der euklidischen Klassifikation durch die Substitution  $x_i = a_i y_i$ . □

Gram-Matrix.

Signatur  $(k, l)$  ist dieselbe wie die von  $A$ .

## 2.5 Quadriken in $\mathbb{R}^2$

## 2.6 Quadriken in $\mathbb{R}^3$

# 3 Geometrie der Quadriken

## 3.1 Die Einheitshyperbel und hyperbolische Trigonometrie

Die Hyperbel

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$$

wird die *Einheitshyperbel* genannt, in der Analogie mit dem Einheitskreis  $x^2 + y^2 = 1$ . Sie ist mit der anderen häufig vorkommenden Hyperbel  $xy = 1$  verwandt.

**Aufgabe 3.20.** *Zeige, dass das Bild der Kurve  $\{xy = 1\}$  unter Drehung um  $-\frac{\pi}{4}$  mit Zentrum in  $(0, 0)$  die Gleichung  $x^2 - y^2 = 2$  hat, und hiermit die mit dem Streckungsfaktor  $\sqrt{2}$  skalierte Einheitshyperbel ist.*

Der Einheitskreis besitzt die Parametrisierung  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ . Analog, der rechte Zweig der Einheitshyperbel wird parametrisiert durch

$$x = \cosh t, \quad y = \sinh t \quad (3.16)$$

wobei

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

In der Parametrisierung des Kreises ist  $t$  der Winkel zur positiven  $x$ -Halbachse. Was ist die Bedeutung des Parameters  $t$  in (3.16)?

**Proposition 3.21.** *Der auf Abb. 3.5, links, schraffierte Sektor hat Fläche  $\frac{t}{2}$ .*

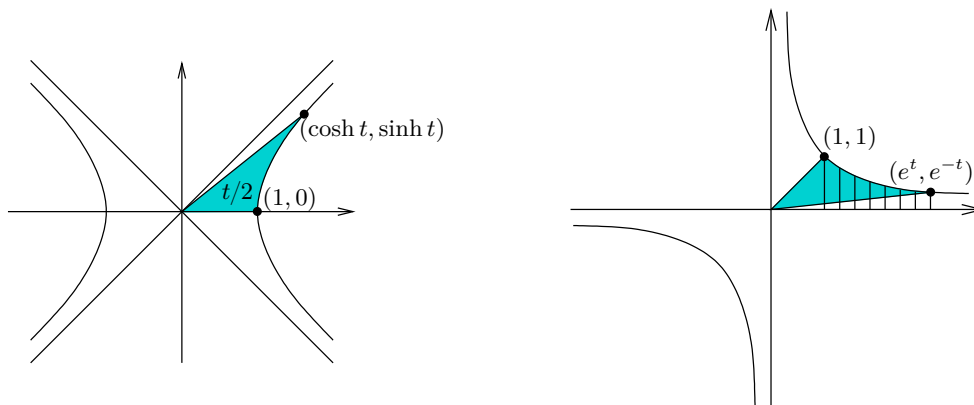


Abbildung 3.5: Parametrisierung der Hyperbel.

*Beweis.* Nach einer Drehstreckung und Spiegelung wird dieser Sektor zu dem Sektor auf Abb. 3.5, rechts (und verdoppelt dabei seine Fläche). Der letztere hat dieselbe Fläche wie die schraffierte Trapez, deren Fläche leicht mit Integral berechnet werden kann.  $\square$

**Bemerkung 3.22.** Für die  $(\cos t, \sin t)$ -Parametrisierung des Einheitskreises ist  $t$  ebenfalls doppelt so groß wie die Sektorfläche. Gleichzeitig ist  $t$  gleich der Bogenlänge. Aber nicht im hyperbolischen Fall, wo die Bogenlänge von  $(1, 0)$  zu  $(\cosh t, \sinh t)$  keine elementare Funktion ist.

### 3.2 Hyperbolische Drehungen

Die Drehmatrix  $D_\varphi \in \text{SO}(2)$  bildet den Einheitskreis auf sich selbst. Dabei wird  $\varphi$  zum Parameter  $t$  addiert:

$$D_\varphi \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t + \varphi) \\ \sin(t + \varphi) \end{pmatrix}$$

**Definition 3.23.** Die hyperbolische Drehmatrix ist definiert als

$$H_s := \begin{pmatrix} \cosh s & \sinh s \\ \sinh s & \cosh s \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$H_s \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(t + s) \\ \sinh(t + s) \end{pmatrix}$$

Daraus folgt die folgende

**Proposition 3.24.** Für je zwei Punkte  $P_1, P_2$  auf dem rechten Zweig der Hyperbel gibt es genau eine hyperbolische Drehung, die  $P_1$  auf  $P_2$  abbildet.



Für die Hyperbel  $xy = 1$  hat jede Drehmatrix die Form  $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$ . Demensprechend streckt eine der Einheitshyperbel entsprechende hyperbolische Drehung die Ebene entlang einer der Geraden  $x = y$ ,  $x = -y$  und staucht entlang der anderen.

### 3.3 Parabolische Drehungen

**Definition 3.25.** *Die lineare Abbildung mit der Matrix*

$$S_a := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

heißt Scherung entlang der  $y$ -Achse.

Die Abbildung  $S_a$  bildet die Gerade  $x = 1$  auf sich selbst; die Einschränkung von  $S_a$  auf diese Gerade ist die Translation um  $a$ . In diesem Sinne ist  $S_a$  zu den Drehungen  $D_\varphi$  und  $H_s$  analog: die Stelle des Einheitskreises und der Einheitshyperbel wird vom Geradenpaar  $x^2 = 1$  eingenommen, die "Winkelmaß" ist die  $y$ -Koordinate.

Die Scherungen können zu Abbildungen modifiziert werden, die eine Parabel auf sich selbst abbilden. Betrachten wir zunächst das Bild der "Einheitsparabel"  $y = x^2$  unter  $S_a$ .

$$S_a\{y = x^2\} = \{y - ax = x^2\} = \left\{ y = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} \right\}$$

Das ist die um den Vektor  $(-\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4})$  verschobene Einheitsparabel. Folglich bildet die affine Transformation  $T_{(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4})} \circ S_a$  die Einheitsparabel auf sich selbst.

**Definition 3.26.** *Die affine Transformation*

$$P_a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \frac{a}{2} \\ ax + y + \frac{a^2}{4} \end{pmatrix}$$

wird die parabolische Drehung genannt.

### 3.4 Euklidische vs. affine Invarianten

Jede Isometrie eines euklidischen Raums erhält die Abstände (das ist die Definition der Isometrien). Daraus folgt (siehe Abschnitt 5), dass die Isometrien auch Folgendes erhalten:

- Kollinearität der Punkte (d. h. Geraden werden auf Geraden abgebildet);
- Winkel;
- Volumina.

Die Affinitäten erhalten

- Kollinearität der Punkte;
- Teilungsverhältnisse, sowie Längenverhältnisse auf parallelen Geraden;
- Verhältnisse der Volumina.

(Dabei können die letzten zwei Invarianten als Spezialfälle der Erhaltung der Volumenverhältnissen in parallelen affinen Unterräumen betrachtet werden.)

Affinitäten verzerren im Allgemeinen die Winkel und die Längenverhältnisse auf nichtparallelen Geraden.

Benutzt die Formulierung eines geometrischen Satzes nur affine Begriffe, so kann man die Ausgangsdaten durch eine beliebige affine Transformation in eine spezielle, z. B. symmetrische Lage bringen, und nur für diese Lage beweisen. Daraus folgt die Gültigkeit des Satzes für alle Ausgangsdaten.

Zum Beispiel, wenn ein *affiner* Satz für reguläre Dreiecke gilt, dann gilt er für alle Dreiecke.

**Beispiel 3.27.** Beweisen wir, dass die Seitenhalbierenden eines jedes Dreiecks sich in einem Punkt schneiden.

Da sowohl die Voraussetzung (Seitenhalbierenden) als auch die Aussage (sich in einem Punkt schneiden) affin invariant sind, genügt es, den Satz für reguläre Dreiecke zu beweisen. Für reguläre Dreiecke gilt der Satz wegen der Symmetrie.

Hier ist ein weniger triviales Beispiel.

**Proposition 3.28.** *Verbindet man die Ecken eines Dreiecks mit den Punkten, die die jeweils gegenüberliegenden Seiten in drei gleichlange Strecken teilen, so entsteht ein Sechseck, dessen Diagonalen sich in einem Punkt schneiden (siehe Abb. 3.6).*

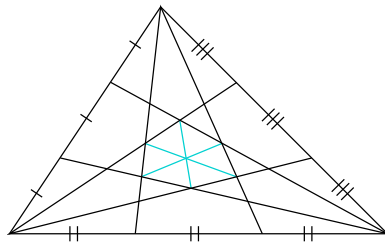


Abbildung 3.6: Beispiel eines affinen Satzes: Sechseck mit sich in einem Punkt schneidenden Diagonalen.

Im Gegenteil, die folgenden zwei Sätze sind nicht affin.

**Proposition 3.29.** *Teilt man jeden Winkel eines Dreiecks in drei gleiche Teile, so*

- *entsteht ein Sechseck, dessen Diagonalen sich in einem Punkt schneiden;*
- *(Satz von Morley) ist das Dreieck KLM auf Abb. 3.7, rechts, regulär.*

Abbildung 3.7: Noch ein Sechseck und der Satz von Morley.

### 3.5 Konjugierte Durchmesser

**Satz 3.30.** *Sei  $Q$  ein Kegelschnitt, und sei  $\ell$  eine Gerade. Dann liegen die Mittelpunkte aller zu  $\ell$  parallelen Sehnen von  $Q$  auf einer Geraden.*

*Wenn  $Q$  eine Ellipse oder eine Hyperbel ist, dann geht diese Gerade durch das Zentrum von  $Q$ ; wenn  $Q$  eine Parabel ist, dann ist diese Gerade zur Symmetrieachse der Parabel parallel.*

Abbildung 3.8: Mittelpunkte der parallelen Sehnen liegen auf einer Geraden.

*Beweis.* Wenn  $Q$  eine Ellipse ist, dann gibt es eine Affinität  $f$ , die  $Q$  auf ein Kreis  $f(Q)$  abbildet. Parallele Geraden gehen auf parallele Geraden, Mittelpunkte der Strecken auf Mittelpunkte dessen Bilder. Die Mittelpunkte der parallelen Kreissehnen liegen auf einer Geraden, die durch das Zentrum geht. Die Anwendung der inversen Affinität  $f^{-1}$  bildet diese Gerade auf eine Gerade ab, die ebenfalls durch das Symmetriezentrum von  $Q$  geht.

Ist  $Q$  eine Hyperbel  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , so wenden wir eine hyperbolische Drehung  $f$  an, sodass  $f(\ell)$  zu einer der Koordinatenachsen parallel ist. (Zeige, dass so ein  $f$  existiert!)

Ist  $Q$  eine Parabel  $x^2 = 2hy$ , so wenden wir eine parabolische Drehung an, die  $\ell$  auf eine waagerechte Gerade abbildet (zeige, dass es immer möglich ist, wenn  $\ell$  nicht senkrecht ist). Die Mittelpunkte aller waagerechten Sehnen liegen auf der  $y$ -Achse. Da die parabolischen Drehungen Parallelität zur  $y$ -Achse erhalten, lagen die Mittelpunkte der Sehnen vor der Drehung auf einer zur  $y$ -Achse parallelen Geraden.  $\square$

**Korollar 3.31.** *Existiert eine zu  $\ell$  parallele Tangente an  $Q$ , so liegt der Tangentialpunkt auf einer Geraden mit den Mittelpunkten der zu  $\ell$  parallelen Sehnen.*

*Beweis.* Liegt der Tangentialpunkt außerhalb dieser Geraden, so gibt es eine kurze Sehne, die ganz auf einer Seite von dieser Geraden liegt. Das widerspricht der Tatsache, dass die Gerade durch den Mittelpunkt dieser Sehne geht.  $\square$

**Satz 3.32.** *Sei  $Q$  Ellipse oder Hyperbel,  $\ell$  eine Gerade durch das Zentrum von  $Q$  (aber keine Asymptote der Hyperbel). Sei  $\ell^*$  die Gerade durch die Mittelpunkte der zu  $\ell$  parallelen Sehnen. Dann gilt*

$$(\ell^*)^* = \ell,$$

*das heißt, die Gerade  $\ell$  geht ihrerseits durch die Mittelpunkte der zu  $\ell^*$  parallelen Sehnen.*

*Beweis.* Wenden wir eine affine Transformation an, sodass  $\ell$  zu einer der Koordinatenachsen wird. Dann ist  $\ell^*$  die andere Koordinatenachse, und deswegen  $(\ell^*)^* = \ell$ .  $\square$

Abbildung 3.9: Konjugierte Durchmesser.

Die durch  $Q$  auf den Geraden  $\ell$  und  $\ell^*$  ausgeschnittenen Intervalle heißen *konjugierte Durchmesser* von  $Q$ . Im Fall der Hyperbel schneidet eine der Geraden  $\ell, \ell^*$  die Hyperbel nicht, der entsprechende Durchmesser ist rein imaginär.

### 3.6 Steiner-Ellipse und andere eingeschriebene Ellipsen

**Satz 3.33** (Steiner-Ellipse). *Für jedes Dreieck gibt es eine eingeschriebene Ellipse, die an den Seitenmittelpunkten tangential ist.*

*Beweis.* Wende eine affine Transformation  $f$  an, sodass  $f(ABC)$  ein reguläres Dreieck ist. Der Inkreis  $Q$  von  $f(ABC)$  berührt die Seiten in ihren Mittelpunkten. Folglich berührt die Ellipse  $f^{-1}(Q)$  die Seiten von  $ABC$  auch in ihren Mittelpunkten.  $\square$

Abbildung 3.10: Existenz der Steiner-Ellipse.

**Aufgabe 3.34.** *Zeige, dass die Steiner-Ellipse die größte Fläche unter allen in Dreieck eingeschriebenen Ellipsen hat.*

Das volumengrößte Ellipsoid in einer kompakten konvexen Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  heißt das *John-Ellipsoid*,  $\square$ .

Es stellt sich die Frage, wie viele eingeschriebenen Ellipsen hat ein Dreieck. Wir kennen zumindest zwei: der Inkreis und die Steiner-Ellipse.

**Proposition 3.35.** *Seien  $A', B', C'$  Punkte auf den Seiten  $BC, CA, AB$  des Dreiecks  $ABC$ . Eine in  $ABC$  eingeschriebene und in den Punkten  $A', B', C'$  tangentiale Ellipse existiert genau dann, wenn*

$$\frac{AC'}{BC'} \cdot \frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB'}{AB'} = 1 \quad (3.17)$$

*Beweis.* Um die Notwendigkeit der Bedingung (3.17) zu zeigen, wenden wir eine affine Transformation  $f$  an, die die Ellipse auf ein Kreis abbildet. Die Tangentialpunkte des Inkreises besitzen die Eigenschaft

$$f(A)f(C') = f(A)f(B'), \quad f(B)f(C') = f(B)f(A'), \quad f(C)f(A') = f(C)f(B') \quad (3.18)$$

Folglich

$$\frac{f(A)f(C')}{f(B)f(C')} \cdot \frac{f(B)f(A')}{f(C)f(A')} \cdot \frac{f(C)f(B')}{f(A)f(B')} = 1$$

Da die affinen Transformationen die Teilungsverhältnisse erhalten, gilt  $\frac{f(A)f(C')}{f(B)f(C')} = \frac{AC'}{BC'}$  usw. Daraus folgt (3.17).

Sei nun (3.17) erfüllt. Es genügt die Existenz einer Affinität  $f$  zu zeigen, für welche (3.18) gilt. Diese setzen wir als  $f = hg$  zusammen:  $g$  wird so gewählt, dass  $g(A)g(C') = g(A)g(B')$ , und  $h$  ist eine Streckung oder Stauchung in der zu  $f(B')f(C')$  senkrechten Richtung.  $\square$

**Korollar 3.36.** *Sind  $A', B', C'$ , die Tangentialpunkte einer in Dreieck  $ABC$  eingeschriebenen Ellipse, so schneiden sich die Geraden  $AA', BB', CC'$  in einem Punkt.*

*Beweis.* Bedingung (3.17) ist zur Existenz eines gemeinsamen Schnittpunktes von  $AA', BB', CC'$  nach dem Satz 2.50 von Ceva äquivalent.  $\square$

### 3.7 Sätze von Brianchon und Pascal

Das Korollar 3.36 ist ein Spezialfall des folgenden Satzes.

**Satz 3.37** (Satz von Brianchon). *Sei  $ABCDEF$  ein um eine Ellipse umgeschriebenes Sechseck. Dann schneiden sich die Segmenten  $AD, BE, CF$  in einem Punkt.*

*Das Sechseck darf in ein Fünf-, Vier- oder Dreieck ausarten, indem ein oder mehrere Paare von aufeinander folgenden Seiten kollinear werden, und die Ecke dazwischen zum Tangentialpunkt wird.*



Abbildung 3.11: Der Satz von Brianchon.

Der folgende Satz hat eine große Ähnlichkeit mit dem Satz von Brianchon.

**Satz 3.38** (Satz von Pascal). *Sei  $ABCDEF$  ein in eine Ellipse eingeschriebenes Sechseck. Dann liegen die Schnittpunkte der Paaren der gegenüberliegenden Seiten auf einer Geraden.*

*Das Sechseck darf in ein Fünf-, Viel- oder Dreieck ausarten, indem ein oder mehrere Paare von aufeinander folgenden Ecken zusammenfallen, und die sie verbindende Gerade tangential zur Quadrik wird.*

Der Zusammenhang zwischen den zwei Sätzen wird im Abschnitt 4.5 erläutert.

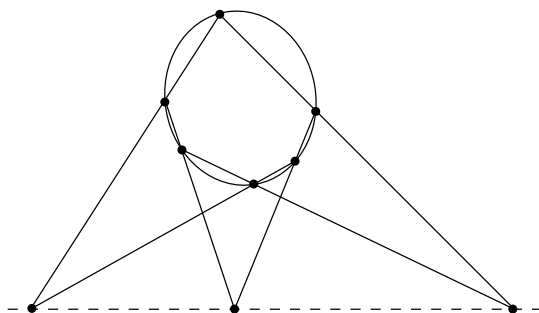


Abbildung 3.12: Der Satz von Pascal.

## 4 Polarität bezüglich einer Quadrik

### 4.1 Symmetrische Bilinearformen und quadratische Formen

Im Folgenden bezeichnet  $\alpha$  eine symmetrische Bilinearform auf  $\mathbb{R}^n$  (siehe Definition 2.67), die nicht unbedingt positiv definit ist. Symmetrische Bilinearformen stehen in einer Bijektion mit symmetrischen  $n \times n$ -Matrizen:

$$\alpha(v, w) = v^\top Aw$$

Wird  $w = v$  eingesetzt, so entsteht die mit  $\alpha$  assoziierte quadratische Form  $\alpha(v, v)$ . Eine symmetrische Bilinearform ist durch ihre assoziierte quadratische Form eindeutig bestimmt:

$$\alpha(v, w) = \frac{1}{2}(\alpha(v + w, v + w) - \alpha(v, v) - \alpha(w, w))$$

**Beispiel 3.39.** Bezeichnen wir  $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $v_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ .

- Die quadratische Form

$$\alpha(v, v) = x^2 - y^2$$

ist mit der symmetrischen Bilinearform

$$\alpha(v_1, v_2) = x_1x_2 - y_1y_2 \tag{3.19}$$

assoziiert. Die Matrix dieser Form ist  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

- Die quadratische Form  $\alpha(v, v) = xy$  ist mit der symmetrischen Bilinearform  $\alpha(v_1, v_2) = \frac{1}{2}(x_1y_2 + y_1x_2)$  assoziiert, mit der Matrix  $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ .

**Definition 3.40.** Eine symmetrische Bilinearform  $\alpha$  heißt nicht-ausgeartet, wenn

$$\forall v \neq 0 \exists w \text{ sodass } \alpha(v, w) \neq 0 \tag{3.20}$$

**Proposition 3.41.** *Eine symmetrische Bilinearform ist genau dann nicht-ausgeartet, wenn ihre Matrix den vollen Rank hat.*

*Beweis.* Bedingung (3.20) ist äquivalent zu  $v \neq 0 \Rightarrow v^\top A \neq 0$ , und die ist äquivalent zu  $\text{rank } A = n$ .  $\square$

Für eine nicht-ausgeartete Form können Vektoren  $v \neq 0$  existieren, für welche  $\alpha(v, v) = 0$ . Das ist z. B. der Fall für  $\alpha$  aus (3.19) und  $v = (1, -1)^\top$ . Solche Vektoren heißen *isotrop*.

## 4.2 Orthogonalkomplement und konjugierte Durchmesser

**Definition 3.42.** *Sei  $\alpha$  eine symmetrische Bilinearform auf  $\mathbb{R}^n$ , und sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  ein Untervektorraum. Das Orthogonalkomplement bezüglich  $\alpha$  wird definiert als*

$$U^\perp := \{w \in \mathbb{R}^n \mid \alpha(v, w) = 0 \ \forall v \in U\}$$

**Proposition 3.43.** *Ist  $\alpha$  nicht-ausgeartet, so gilt*

$$\dim U^\perp = n - \dim U$$

*Beweis.* Sei  $v_1, \dots, v_k$  eine Basis von  $U$ . Dann

$$w \in U^\perp \Leftrightarrow v_i^\top A w = 0 \ \forall i$$

Das ist ein lineares Gleichungssystem vom Rang  $k$  (da  $A$  nicht-ausgeartet und  $v_i$  linear unabhängig sind), deswegen hat der Lösungsraum Dimension  $n - k$ .  $\square$

**Beispiel 3.44.** Für  $\alpha$  aus (3.19) und  $U = \{x = y\}$  ist  $U^\perp = U$ .

Jetzt können wir die konjugierten Durchmesser algebraisch behandeln. Sei  $\alpha$  eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform in  $\mathbb{R}^2$ . Dann ist

$$Q = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha(p, p) = 1\} \tag{3.21}$$

eine Quadrik in  $\mathbb{R}^2$ . Wir nehmen an, dass  $\alpha$  nicht negativ definit ist, sodass  $Q \neq \emptyset$ . Für  $v \neq 0$  bezeichnen wir mit  $v^\perp$  die Gerade  $\text{span}(v)^\perp$ .

**Proposition 3.45.** *Sei  $v \in \mathbb{R}^2$ ,  $v \neq 0$ . Dann liegen die Mittelpunkte aller zum Vektor  $v$  parallelen Sehnen von  $Q$  auf der Geraden  $v^\perp$ .*

*Beweis.* Sind  $p, p + \lambda v \in Q$ , so gilt

$$\alpha(p, p) = 1 = \alpha(p + \lambda v, p + \lambda v) \Rightarrow 2\lambda\alpha(p, v) + \lambda^2\alpha(v, v) = 0$$

und folglich

$$\lambda = -2 \frac{\alpha(p, v)}{\alpha(v, v)}$$

Der Mittelpunkt der Sehne  $[p, p + \lambda v]$  ist  $p + \frac{\lambda}{2}v$  und wir haben

$$\alpha(v, p + \frac{\lambda}{2}v) = \alpha\left(v, p - \frac{\alpha(p, v)}{\alpha(v, v)}v\right) = \alpha(v, p) - \alpha(v, p) = 0$$

Folglich  $p + \frac{\lambda}{2}v \in v^\perp$ .  $\square$

Das liefert uns auch einen neuen Beweis des Satzes 3.32. Und zwar, es gilt  $\ell = \text{span}(v)$  und  $\ell^* = \text{span}(w)$  genau dann wenn  $\alpha(v, w) = 0$ . Folglich  $(\ell^*)^* = \ell$ .

Konjugierte Durchmesser der Quadrik (3.21) werden von den Vektoren aufgespannt, die bezüglich  $\alpha$  zueinander orthogonal sind.

**Bemerkung 3.46.** Eine Basis  $v_1, \dots, v_n$  von  $\mathbb{R}^n$  *diagonalisiert* die symmetrische Bilinearform  $\alpha$ , wenn

$$\alpha(v_i, v_j) = \begin{cases} 0, & \text{für } i \neq j \\ \lambda_i, & \text{für } i = j \end{cases}$$

Die Matrix von  $\alpha$  bezüglich dieser Basis ist  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Jede symmetrische Bilinearform kann diagonalisiert werden. (Für nicht positiv definite Formen ist es nicht so leicht, Vorsicht vor isotropen Vektoren!)

Der Spektralsatz 3.18 ist deswegen zur gleichzeitigen Diagonalisierbarkeit des Skalarproduktes und einer Form  $\alpha$  äquivalent.

### 4.3 Polarität

Sei  $\alpha$  eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform auf  $\mathbb{R}^n$ . Sie definiert eine Quadrik

$$Q := \{p \in \mathbb{R}^n \mid \alpha(p, p) = 1\} = \{p \in \mathbb{R}^n \mid p^\top A p = 1\}, \quad \text{rank } A = n \quad (3.22)$$

Beachte, dass jede Quadrik (3.7) mit

$$\text{rank } A = n, \quad \text{rank} \begin{pmatrix} c & b^\top \\ b & A \end{pmatrix} = n + 1$$

durch eine Translation auf die Form (3.22) gebracht werden kann.

**Definition 3.47.** Sei  $L \subset \mathbb{R}^n$  ein affiner Unterraum mit  $0 \notin L$ . Der zu  $L$  bezüglich der Quadrik (3.22) polar duale Unterraum ist definiert als

$$L^\circ := \{q \in \mathbb{R}^n \mid \alpha(p, q) = 1 \ \forall p \in L\}$$

Für einen nulldimensionalen Unterraum  $L = \{p\}$  schreiben wir auch  $p^\circ := \{p\}^\circ$ .

**Beispiel 3.48.** Sei  $n = 2$  und  $\alpha(p, p) = \langle p, p \rangle$  (das heißt  $A$  ist die Einheitsmatrix und  $Q$  ist der Einheitskreis). Dann ist

$$p^\circ = \{q \mid \langle p, q \rangle = 1\}$$

die zu  $0p$  orthogonale Gerade durch den Punkt  $\frac{p}{\|p\|^2}$ , siehe Abb. 3.13.

**Proposition 3.49.** Das polar duale  $L^\circ$  zu einem affinen Unterraum  $L \neq 0$  ist selbst ein affiner Unterraum  $\neq 0$ . Es gilt außerdem Folgendes:



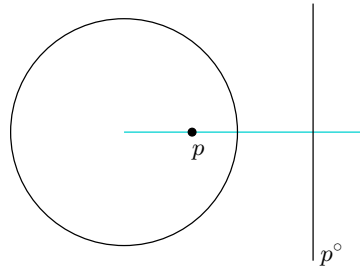


Abbildung 3.13: Polarität bezüglich des Einheitskreises.

1.  $\dim L^\circ = n - \dim L - 1$

2.  $(L^\circ)^\circ = L$

3.  $L_1 \subset L_2 \Rightarrow L_1^\circ \supset L_2^\circ$

*Beweis.* Sei  $\dim L = k$  und  $(p_0, \dots, p_k)$  eine affine Basis von  $L$ . Dann gilt

$$q \in L^\circ \Leftrightarrow \alpha(p_i, q) = 1 \quad \forall i \in \{0, \dots, k\}$$

Das ist ein inhomogenes lineares Gleichungssystem vom Rank  $k + 1$ , deswegen ist seine Lösungsmenge ein affiner Unterraum der Dimension  $n - k - 1$ , der 0 nicht enthält.

Punkt 2. Es gilt  $L \subset (L^\circ)^\circ$ , denn

$$p \in L \Rightarrow \alpha(p, q) = 1 \quad \forall q \in L^\circ \Rightarrow p \in (L^\circ)^\circ$$

Andererseits  $\dim(L^\circ)^\circ = n - (n - k - 1) - 1 = k = \dim L$ . Deswegen  $L = (L^\circ)^\circ$ .

Punkt 3:

$$q \in L_2^\circ \Rightarrow \alpha(p, q) = 1 \quad \forall p \in L_2 \Rightarrow \alpha(p, q) = 1 \quad \forall p \in L_1 \Rightarrow q \in L_1^\circ$$

□

#### 4.4 Geometrische Eigenschaften der Polarität

Die Hyperebene  $L = p^\circ$  nennt man die *Polare* von  $p$ , beziehungsweise  $p = L^\circ$  der *Pol* von  $L$ .

**Proposition 3.50.** *Ein Punkt liegt auf seiner Polare genau dann, wenn er auf der Quadrik liegt:*

$$p \in p^\circ \Leftrightarrow p \in Q$$

*Beweis.* Per Definition gilt

$$p \in p^\circ \Leftrightarrow \alpha(p, p) = 1 \Leftrightarrow p \in Q$$

□

**Proposition 3.51.** *Liegt  $p$  auf  $Q$ , so ist die Polare von  $p$  die Tangentialhyperebene zu  $Q$  an  $p$ :*

$$T_p Q = p^\circ$$

*Beweis.* Aus Analysis ist uns bekannt, dass  $\text{grad}_p F$  ein Normalenvektor zur Hyperfläche  $F(x) = 0$  am Punkt  $p$  ist (falls  $\text{grad}_p F \neq 0$ ). In unserem Fall

$$F(x) = \alpha(x, x) - 1 = x^\top A x - 1$$

und die Differentiation ergibt

$$\text{grad } F = 2Ax$$

also  $\text{grad}_p F = 2Ap$ . Die Tangentialhyperebene  $T_p Q$  besteht aus den Punkten  $q$  mit

$$\langle \text{grad}_p F, q \rangle = \langle \text{grad}_p F, p \rangle$$

Wegen  $\langle Ap, q \rangle = p^\top A q$  ist das äquivalent zu  $\alpha(p, q) = 1$ . □

**Proposition 3.52.** *Schneidet eine Gerade  $\ell \subset \mathbb{R}^2$  die ebene Quadrik  $Q$  in zwei Punkten, so ist der Pol von  $\ell$  der Schnittpunkt der Tangenten an  $Q$  durch diese Punkte.*

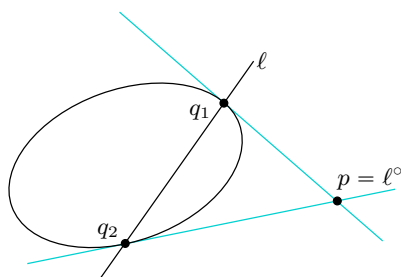


Abbildung 3.14: Pol und Polare.

*Beweis.* Sei  $\ell \cap Q = \{q_1, q_2\}$ . Nach Punkt 3. der Proposition 3.49 gilt

$$q_1, q_2 \in \ell \Rightarrow \ell^\circ \in q_1^\circ, \ell^\circ \in q_2^\circ \Rightarrow \ell^\circ = q_1^\circ \cap q_2^\circ$$

Nach Proposition 3.51 ist  $q_i^\circ$  die Tangente zu  $Q$  an  $q_i$ . Also ist der Pol von  $\ell$  der Schnittpunkt dieser zwei Tangenten. □

Für eine Quadrik in  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 2$ , gilt: alle Tangentialhyperebenen an  $Q$  durch ein Punkt in  $L \cap Q$  enthalten den Unterraum  $L^\circ$ .

Schneidet eine Gerade  $\ell$  die Quadrik nicht, so kann man den Pol mit der folgenden geometrischen Konstruktion finden. Wählen wir zwei Punkte  $q_1, q_2 \in \ell$ . Die Polare von  $q_i$  können wir wie in der Proposition 3.52, als die Gerade durch die Tangentialpunkte von Tangenten durch  $q_i$  konstruieren. Dann ist der Schnittpunkt  $q_1^\circ \cap q_2^\circ$  der Pol von  $\ell$ , siehe Abb. 3.15.

Bewegt sich der Punkt  $q$  entlang der Geraden  $\ell$ , so geht die Verbindungsstrecke der Tangentialpunkte von Tangenten durch  $q$  stets durch denselben Punkt, den Pol von  $\ell$ .

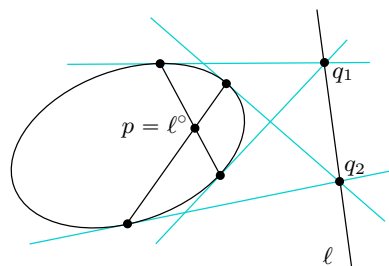


Abbildung 3.15: Konstruktion des Pols von  $\ell$  im Fall  $\ell \cap Q = \emptyset$ .

**Bemerkung 3.53.** Polarität bezüglich einer Parabel und bezüglich nicht-zentrierter Quadriken.

#### 4.5 Duale Sätze

In Dimension 2 besagt Punkt 3. der Proposition 3.49:

$$p \in \ell \Leftrightarrow \ell^\circ \in p^\circ \quad (3.23)$$

**Proposition 3.54.** *Aus dem Satz von Brianchon folgt der Satz von Pascal und umgekehrt.*

*Beweis.* Seien  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$  Punkte auf einer ebenen Quadrik  $Q$ . Der Satz von Pascal besagt, dass die Schnittpunkte

$$p_1p_2 \cap p_4p_5, \quad p_2p_3 \cap p_5p_6, \quad p_3p_4 \cap p_6p_1 \quad (3.24)$$

auf einer Geraden liegen. Um das aus dem Satz von Brianchon herzuleiten, betrachten wir die Polaren der Punkte  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Nach Proposition 3.51 sind sie zu  $Q$  tangential. Das gibt uns ein umgeschriebenes Sechseck mit den Ecken  $p_i^\circ \cap p_{i+1}^\circ = (p_i p_{i+1})^\circ$ , siehe Abb. 3.16.

Nach Brianchon schneiden sich die großen Diagonalen dieses Sechsecks in einem Punkt  $q$ . Andererseits ist der Pol der Diagonale durch  $(p_1 p_2)^\circ$  und  $(p_4 p_5)^\circ$  der Schnittpunkt der Geraden  $p_1 p_2$  und  $p_4 p_5$ :

$$(p_1 p_2)^\circ \in \ell, (p_4 p_5)^\circ \in \ell \Rightarrow \ell^\circ \in p_1 p_2, \ell^\circ \in p_4 p_5$$

Deswegen liegen alle drei Punkte (3.24) auf der Geraden  $q^\circ$ .

Die Implikation Pascal  $\Rightarrow$  Brianchon wird analog bewiesen.  $\square$

Dieser Beweis illustriert einen allgemeinen Prinzip, der zu einem Satz den dualen Satz formulieren lässt.

Folgt aus einer Voraussetzung eine Aussage, so folgt aus der dualen Voraussetzung die duale Aussage.

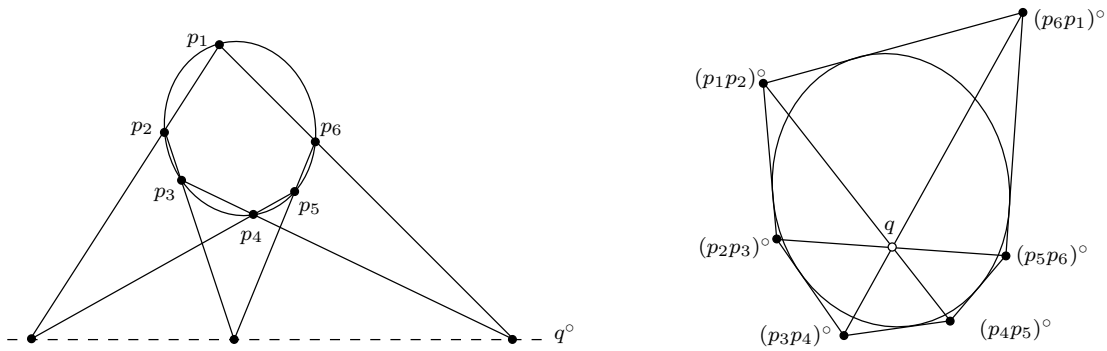


Abbildung 3.16: Äquivalenz zwischen den Sätzen von Pascal und Brianchon.

Zwei Aussagen heißen hier dual, wenn sie bei der Polarität bezüglich einer Quadrik ineinander übergehen. Die Aussagen über Punkte werden zu Aussagen über Hyperebenen (Geraden in  $\mathbb{R}^2$ ) und umgekehrt.

Wir kennen die folgenden Paaren von dualen Voraussetzungen/Aussagen:

- Geraden schneiden sich in einem Punkt  $\leftrightarrow$  Punkte liegen auf einer Geraden.
- Punkt liegt auf der Quadrik  $\leftrightarrow$  Gerade ist tangential zur Quadrik.

#### 4.6 Geraden auf dem hyperbolischen Paraboloid und auf dem einschalen Hyperboloid

Das Einsetzen von  $y = x - c$  oder  $y = -x + c$  in die Gleichung

$$x^2 - y^2 = 2z \quad (3.25)$$

des hyperbolischen Paraboloids liefert  $2cx - c^2 = 2z$ . Das beweist

**Proposition 3.55.** *Für jedes  $c \in \mathbb{R}$  liegen die Geraden*

$$y = x - c, z = cx - \frac{c^2}{2} \quad \text{und} \quad y = -x + c, z = cx$$

*auf der Quadrik (3.25). Durch jeden Punkt geht eine Gerade aus der ersten und eine Gerade aus der zweiten Familie. Jede Gerade aus der ersten Familie schneidet jede Gerade aus der zweiten Familie.*

*Beweis.* Sei  $(x_0, y_0, \frac{x_0^2 - y_0^2}{2})$  ein beliebiger Punkt auf (3.25). Man setze  $c_1 = x_0 - y_0$  und  $c_2 = x_0 + y_0$  und erhalte zwei Geraden durch diesen Punkt.  $\square$

Das Einsetzen  $x = 1$  in die Gleichung

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \quad (3.26)$$

liefert  $y^2 - z^2 = 0$ , d. h.  $z = \pm y$ . Wir haben also zwei Geraden

$$x = 1, y = z \quad \text{und} \quad x = 1, y = -z$$

die vollständig auf der Quadrik (3.26) liegen und durch den Punkt  $(1, 0, 0)$  gehen. Durch Drehung um die  $z$ -Achse finden wir ein Geradenpaar durch jeden Punkt  $(\cos t, \sin t, 0)$ . Wird auch eine hyperbolische Drehung um die  $y$ -Achse ausgenutzt, so erhalten wir zwei Geraden durch jeden Punkt auf (3.26).

**Proposition 3.56.** *Auf dem Hyperboloid (3.26) gibt es zwei Familien von Geraden. Durch jeden Punkt geht eine Gerade aus der ersten und eine Gerade aus der zweiten Familie. Jede Gerade der ersten Familie schneidet jede Gerade der zweiten Familie oder ist ihr parallel.*

#### 4.7 Beweis der Sätze von Brianchon und Pascal

*Beweis des Satzes 3.37.* Da die Voraussetzung und die Aussage affin invariant sind, nehmen wir an, dass die Ellipse der Einheitskreis mit Zentrum im Koordinatenursprung ist. Dieser Kreis ist der Schnitt des Hyperboloids (3.26) mit der Ebene  $z = 0$ . Liften wir die Geraden durch die Seiten des Sechsecks zu Geraden auf dem Hyperboloid, und zwar so, dass die aufeinander folgenden Seiten zu Geraden aus unterschiedlichen Familien geliftet werden. Siehe Abb. 3.17, wo  $\ell_i^+$  zu einer Familie,  $\ell_i^-$  zu der anderen Familie gehören. Die Punkte  $\tilde{A}, \dots, \tilde{F}$  sind die Schnittpunkte der aufeinander folgenden Geraden.

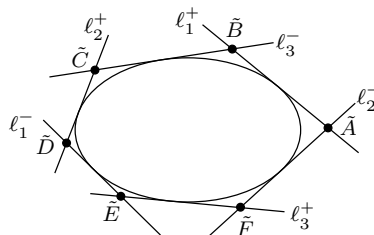


Abbildung 3.17: Beweis des Satzes von Brianchon.

Nach Proposition 3.56 liegt für jedes  $i$  das Geradenpaar  $\ell_i^+, \ell_i^-$  in einer Ebene  $H_i$ . Dabei sind diese Ebenen unterschiedlich. Wegen  $\tilde{A} \in \ell_1^-, \tilde{D} \in \ell_1^+$  liegt die Gerade  $\tilde{A}\tilde{D}$  auf  $H_1$ . Andererseits  $\tilde{A} \in \ell_1^-, \tilde{E} \in \ell_2^-$ , also liegt  $\tilde{A}\tilde{E}$  auch auf  $H_2$ . Folglich

$$\tilde{A}\tilde{D} = H_1 \cap H_2, \quad \tilde{B}\tilde{E} = H_2 \cap H_3, \quad \tilde{C}\tilde{F} = H_3 \cap H_1$$

Wenn die Ebenen  $H_1, H_2, H_3$  sich in einem Punkt schneiden, dann gehen die Geraden  $\tilde{A}\tilde{D}, \tilde{B}\tilde{E}$  und  $\tilde{C}\tilde{F}$  alle durch diesen Punkt, und folglich schneiden sich die Projektionen  $AD, BE, CF$  dieser Geraden in der Projektion dieses Punktes. Wenn die Ebenen sich nicht in einem Punkt schneiden, dann sind ihre drei Schnittgeraden zueinander parallel. Dann wären ihre Projektionen auch zueinander parallel oder fielen zusammen. Allerdings schneiden sich die Geraden  $AD$  und  $BE$ .  $\square$

**Bemerkung 3.57.** 5 Punkte definieren eine Quadrik in der Ebene

Konfokale Flächen zweiter Ordnung (was bedeutet hier konfokal?). Orthogonales Netz aus Ellipsoiden, ein- und zweischaligen Hyperboloiden.

Fadenkonstruktion der Flächen zweiter Ordnung in [HCV73].

# Kapitel 4

## Projektive Geometrie

### 1 Projektive Räume und projektive Abbildungen

#### 1.1 Zentralprojektion zwischen affinen Unterräumen

Sei  $A$  ein 3-dimensionaler affiner Raum, und  $L_1, L_2 \subset A$  zwei nichtparallele Ebenen. Die *Zentralprojektion*  $\pi_a$  von  $L_1$  auf  $L_2$  mit Zentrum  $a \in A \setminus (L_1 \cup L_2)$  soll jeden Punkt  $p \in L_1$  auf den Schnittpunkt der Geraden  $ap$  mit der Geraden  $L_2$  abbilden, siehe Abb. 4.1.

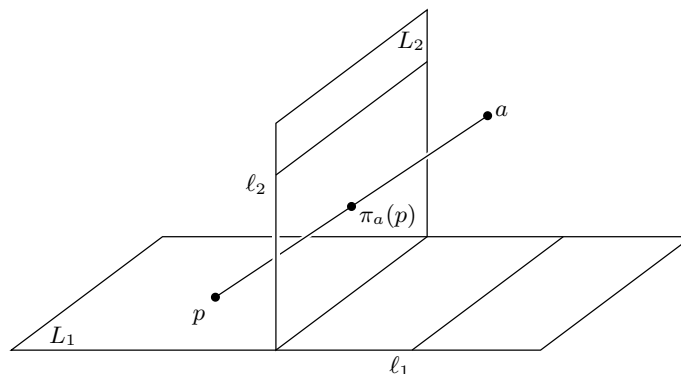


Abbildung 4.1: Zentralprojektion zwischen affinen Unterräumen.

Aber das Bild  $\pi_a(p)$  ist nicht definiert, wenn die Gerade  $ap$  zu  $L_2$  parallel ist, d. h. wenn  $p$  auf der Schnittgeraden  $\ell_1$  von  $L_1$  mit der zu  $L_2$  parallelen Ebene durch  $a$  liegt. Analog haben die Punkte auf  $\ell_2 \subset L_2$  keine Urbilder, wobei  $\ell_2$  in der zu  $L_1$  parallelen Ebene durch  $a$  liegt. Wir erhalten also eine Abbildung

$$\pi_a: L_1 \setminus \ell_1 \rightarrow L_2, \quad \text{Bild } \pi_a = L_2 \setminus \ell_2 \quad (4.1)$$

Die Idee der projektiven Geometrie besteht darin, jede der Ebenen  $L_1$  und  $L_2$  durch eine "Gerade im Unendlichen"  $\infty_1$ , bzw.  $\infty_2$  zu ergänzen. Die Punkte von  $\ell_1$  sollen dann

auf die Punkte von  $\infty_2$ , die Punkte von  $\infty_1$  auf die Punkte von  $\ell_2$  abgebildet werden. Jeder Punkt von  $\infty_1$  entspricht einer zu  $L_1$  parallelen Geraden durch  $a$ .

Es folgt, dass jede Gerade in  $L_1$  genau einen Punkt im Unendlichen hat. Dabei gehen parallele Geraden durch denselben Punkt im Unendlichen.

Eine projektive Ebene ist eine mit der "Geraden im Unendlichen" ergänzte affine Ebene. Jeder Punkt im Unendlichen ist der Schnittpunkt eines Bündels von parallelen Geraden.

Analog, ein 3-dimensionaler projektive Raum ist ein affiner Raum zusammen mit einer Ebene im Unendlichen. Parallele Geraden schneiden sich in einem unendlich entfernten Punkt, parallele Ebenen entlang einer unendlich entfernter Geraden.

Ein Nachteil dieser Beschreibung ist, dass sie die unendlich entfernten Elemente auszeichnet. Sie sollen aber mit den endlichen Elementen gleichberechtigt sein, denn sie können durch eine Zentralprojektion aufeinander abgebildet werden.

## 1.2 Projektivierung eines Vektorraums und projektiver Abschluss eines affinen Raums

**Definition 4.1.** Sei  $V$  ein Vektorraum. Der zugehörige projektive Raum  $P(V)$  (die Projektivierung von  $V$ ) ist der Quotientenraum

$$P(V) := V \setminus \{0\} / \sim, \quad v \sim \lambda v \text{ für } \lambda \neq 0$$

Äquivalent,  $P(V)$  ist die Menge aller Geraden in  $V$  durch 0.

Wir bezeichnen  $\dim P(V) := \dim V - 1$ .

Die Projektivierung von  $\mathbb{R}^{n+1}$  wird mit  $\mathbb{R}P^n$  bezeichnet:  $\mathbb{R}P^2$  ist die projektive Ebene,  $\mathbb{R}P^1$  ist die projektive Gerade.

Ist  $U \subset V$  ein Untervektorraum, so heißt  $P(U) \subset P(V)$  ein *projektiver Unterraum* von  $P(V)$ .

**Proposition 4.2.** Der Schnitt zweier projektiven Unterräume von  $P(V)$  ist wieder ein projektiver Unterraum.

Ist  $V = U_1 + U_2$ , so gilt

$$\dim(P(U_1) \cap P(U_2)) = \dim P(U_1) + \dim P(U_2) - \dim P(V)$$

*Beweis.* Es gilt  $P(U_1) \cap P(U_2) = P(U_1 \cap U_2)$ . Der Rest folgt aus  $\dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim V$ .  $\square$

Insbesondere schneiden sich zwei Geraden in  $\mathbb{R}P^2$  immer in einem Punkt. In  $\mathbb{R}P^3$  schneiden sich jede Gerade und Ebene in einem Punkt, und zwei Ebenen entlang einer Geraden.

**Definition 4.3.** Ist  $A \subset V$  eine affine Hyperebene mit  $0 \notin A$ , so heißt  $P(V)$  ein projektiver Abschluss von  $A$ .



Da jede Gerade durch  $0 \in V$  die affine Hyperebene  $A$  in höchstens einem Punkt schneidet, erzeugt die Inklusion  $A \subset V$  eine injektive Abbildung  $A \rightarrow P(V)$ . Das Bild dieser Abbildung ist  $P(V) \setminus P(U)$ , wobei  $U \subset V$  der zu  $A$  parallele Untervektorraum ist.

Die inverse Abbildung

$$P(V) \setminus P(U) \rightarrow A$$

heißt eine *affine Karte* von  $P(V)$ .

Der projektive Raum  $P(U)$  ist die “unendlich entfernte Hyperebene” von  $A$ . Identifiziert man  $A$  mit einer Teilmenge von  $P(V)$ , so gilt  $P(V) = A \cup P(U)$ , insbesondere  $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^n \cup \mathbb{R}P^{n-1}$ .

### 1.3 Projektive Abbildungen und Zentralprojektionen

Eine mögliche Sichtweise auf die Zentralprojektion ist, sie als Abbildung zwischen zwei affinen Karten eines projektiven Raums zu sehen. Ist in der Situation des Abschnitts 1.1  $A = V$  ein Vektorraum und  $a$  der Nullpunkt, so gilt  $\pi_a(p) = \lambda p$ . Das heißt, die Abbildung  $\pi_a$  entspricht der Identitätsabbildung

$$L_1 \cup P(U_1) = P(V) \rightarrow P(V) = L_2 \cup P(U_2)$$

Eine andere Sichtweise ist, den projektiven Abschluss  $\bar{A}$  von  $A$  (und damit auch von seinen Unterräumen  $L_1$  und  $L_2$ ) zu bilden und die Zentralprojektion  $\pi_a$  als Abbildung zwischen zwei projektiven Unterräumen von  $\bar{A}$  zu betrachten.

Sei  $V \supset A$  ein Vektorraum, in welchem  $A$  eine affine Hyperebene (nicht durch 0) ist. Bezeichnen wir

$$\widetilde{L}_1 := \text{span}L_1, \quad \widetilde{L}_2 := \text{span}L_2, \quad \widetilde{a} := \text{span}a$$

Da  $a \notin L_i$ , sind die Untervektorräume  $\widetilde{L}_1$  und  $\widetilde{a}$ , bzw.  $\widetilde{L}_2$  und  $\widetilde{a}$  komplementär. Deswegen ist die Parallelprojektion

$$\pi_{\widetilde{a}}: \widetilde{L}_1 \rightarrow \widetilde{L}_2$$

definiert (siehe Abschnitt 4.6). Wegen

$$\pi_{\widetilde{a}}(\lambda v) = \lambda \pi_{\widetilde{a}}(v)$$

bildet  $\pi_{\widetilde{a}}$  eine Äquivalenzklasse bezüglich  $v \sim \lambda v$  in eine Äquivalenzklasse. Das definiert eine Abbildung

$$P(\pi_{\widetilde{a}}): P(\widetilde{L}_1) \rightarrow P(\widetilde{L}_2)$$

**Proposition 4.4.** *Wird  $L_i$ ,  $i = 1, 2$  mit einer Teilmenge von  $P(\widetilde{L}_i)$  identifiziert, so ist die Zentralprojektion (4.1) eine Einschränkung der oben definierten Abbildung  $P(\pi_{\widetilde{a}})$ :*

$$\pi_a = P(\pi_{\widetilde{a}})|_{L_1 \setminus \ell_1}$$

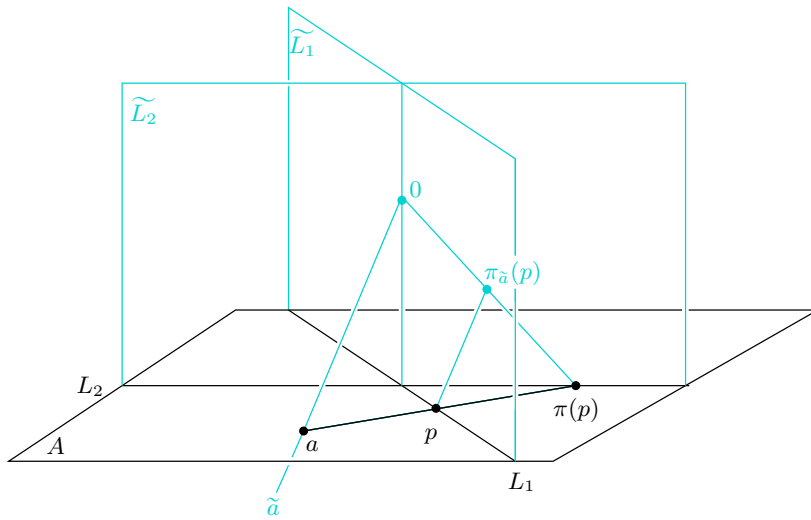


Abbildung 4.2: Zentralprojektion und Parallelprojektion.

*Beweis.* Da die Punkte  $a$ ,  $p$  und  $\pi_a(p)$  auf einer Geraden liegen, gilt

$$\pi_a(p) = \lambda a + (1 - \lambda)p$$

mit  $\lambda \neq 1$ , weil  $a \notin L_2$ . Folglich gilt

$$p + \frac{\lambda}{1 - \lambda}a = \frac{\pi_a(p)}{1 - \lambda} \in L_2$$

Da  $\pi_{\tilde{a}}(p)$  der einzige Schnittpunkt von  $p + \tilde{a}$  mit  $L_2$  ist, folgt daraus

$$\pi_{\tilde{a}}(p) = p + \frac{\lambda}{1 - \lambda}a \sim \pi_a(p)$$

und die Proposition ist bewiesen.  $\square$

**Definition 4.5.** Seien  $V$  und  $W$  zwei Vektorräume und  $P(V)$ ,  $P(W)$  die zugehörigen projektiven Räume. Eine projektive Abbildung  $P(V) \rightarrow P(W)$  ist die Faktorisierung einer injektiven linearen Abbildung  $f: V \rightarrow W$  durch die Äquivalenzrelationen  $v \sim \lambda v$ ,  $w \sim \mu w$ :

$$\begin{array}{ccc} V \setminus \{0\} & \xrightarrow{f} & W \setminus \{0\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ P(V) & \longrightarrow & P(W) \end{array}$$

Wegen  $f(v) \neq 0$  für  $v \neq 0$  und  $f(\lambda v) = \lambda f(v) \sim f(v)$  ist die Abbildung  $P(V) \rightarrow P(W)$  wohldefiniert.

Projektive Abbildungen  $P(V) \rightarrow P(V)$  nennen wir *projektive Transformationen*. Sie entstehen aus linearen Automorphismen  $f \in \text{GL}(V)$ .

**Proposition 4.6.** *Zwei Abbildungen  $f, g \in \text{GL}(V)$  definieren dieselbe projektive Transformation genau dann, wenn  $f = \lambda g$  für ein  $\lambda \neq 0$ .*

*Beweis.* Ist  $f = \lambda g$ , so definieren  $f$  und  $g$  offensichtlich die gleiche projektive Transformation.

Ist  $f(v) \sim g(v)$  für alle  $v \in V$ , so gibt es eine Funktion  $\lambda: V \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass

$$f(v) = \lambda(v)g(v) \text{ für alle } v \in V$$

Wir müssen zeigen  $\lambda(v) = \text{const.}$  Es ist leicht zu sehen, dass  $\lambda(\mu v) = \lambda(v)$  gilt. Seien  $v, w \in V$  linear unabhängig. Dann

$$f(v+w) = \lambda(v+w)g(v+w) = \lambda(v+w)(g(v) + g(w))$$

und andererseits

$$f(v+w) = f(v) + f(w) = \lambda(v)g(v) + \lambda(w)g(w)$$

Da  $f \in \text{GL}(V)$ , sind  $g(v)$  und  $g(w)$  linear unabhängig, und es folgt

$$\lambda(v) = \lambda(v+w) = \lambda(w)$$

□

**Korollar 4.7.** *Die Gruppe der projektiven Transformationen eines projektiven Raums  $P(V)$  ist*

$$\text{PGL}(V) := \text{GL}(V) / \sim$$

wobei  $f \sim g \Leftrightarrow \exists \lambda \neq 0$  mit  $f = \lambda g$ .

**Satz 4.8.** *Sei  $A \subset V$  eine affine Hyperebene in einem Vektorraum,  $0 \notin A$ . Die natürliche Inklusion  $A \subset P(V)$  macht die Gruppe der Affinitäten von  $A$  zu einer Untergruppe von Projektivitäten von  $P(V)$ :*

$$\text{Affin}(A) \subset \text{PGL}(V)$$

*Dabei werden die Affinitäten von  $A$  mit den Projektivitäten identifiziert, die die Hyperebene im Unendlichen von  $A$  auf sich selbst abbilden:*

$$\text{Affin}(A) = \{f \in \text{PGL}(V) \mid f(P(U)) = P(U)\} \tag{4.2}$$

wobei  $U \subset V$  der zu  $A$  parallele Untervektorraum ist.

*Beweis.* Es gilt

$$\text{Affin}(A) = \{f \in \text{GL}(V) \mid f(A) = A\}$$

(siehe Proposition 2.58 sowie das letzte Drittel des Abschnitts 4.5). Das bildet  $\text{Affin}(A)$  in  $\text{GL}(V)$  ab, wobei die Komposition

$$\text{Affin}(A) \rightarrow \text{GL}(V) \rightarrow \text{PGL}(V)$$

ein Monomorphismus ist.

Aus  $f(A) = A$  folgt  $f(U) = U$ , deswegen ist die linke Seite von (4.2) eine Teilmenge der rechten Seite. Umgekehrt, besitzt  $f \in \text{GL}(V)$  die Eigenschaft  $f(U) = U$ , so folgt daraus  $f(A) = \lambda A$  für ein  $\lambda \neq 0$ . Das heißt, die rechte Seite von (4.2) ist Teilmenge der linken Seite. □

## 1.4 Der Hauptsatz der projektiven Geometrie

Der Hauptsatz der affinen Geometrie 2.52 besagt, dass eine affine Abbildung durch die Bilder der Punkten einer affinen Basis eindeutig bestimmt ist. In der projektiven Geometrie gibt es einen ähnlichen Satz, nur hat man mehr Freiheit: statt  $n + 1$  Punkt in einem  $n$ -dimensionalen affinen Raum, können wir die Bilder von  $n + 2$  Punkte in einem  $n$ -dimensionalen projektiven Raum festlegen. Diese  $n + 2$  Punkte sollen auch im gewissen Sinne unabhängig sein.

**Definition 4.9.** Sei  $V$  ein  $(n + 1)$ -dimensionaler Vektorraum und  $P(V)$  der entsprechende  $n$ -dimensionale projektive Raum. Eine projektive Basis von  $P(V)$  ist eine Folge aus  $n + 2$  verschiedenen Punkten

$$[v_0], \dots, [v_{n+1}] \in P(V)$$

mit der Eigenschaft, dass jede  $(n + 1)$ -elementige Teilmenge von  $\{v_0, \dots, v_{n+1}\} \subset V$  linear unabhängig ist.

Eine projektive Basis ist wohldefiniert: werden andere Vertreter

$$\lambda_i v_i, \lambda_i \neq 0, i = 0, \dots, n + 1$$

für die Punkte  $[v_i] \in P(V)$  gewählt, so sind die Vektoren  $\lambda_{i_1} v_{i_1}, \dots, \lambda_{i_{n+1}} v_{i_{n+1}}$  genau dann linear unabhängig, wenn  $v_{i_1}, \dots, v_{i_{n+1}}$  es sind.

**Satz 4.10** (Der Hauptsatz der projektiven Geometrie). *Projektive Transformationen bilden projektive Basen auf projektive Basen ab. Die Gruppenwirkung von  $\text{PGL}(V)$  auf der Menge aller projektiven Basen von  $P(V)$  ist frei und transitiv.*

Mit anderen Worten, für je zwei projektive Basen gibt es genau eine Projektivität, die das  $i$ -te Element der ersten Basis auf das  $i$ -te Element der zweiten Basis abbildet.

Ein Vektor  $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$  wird eine lineare Abhängigkeit von  $v_0, \dots, v_{n+1} \in V$  genannt, wenn

$$\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_{n+1} v_{n+1} = 0$$

Die Menge der linearen Abhängigkeiten ist die Lösungsmenge dieses linearen Gleichungssystems, und damit ein Untervektorraum von  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Spannen die Vektoren  $v_i$  den Raum  $V$  auf, so ist die Dimension der Lösungsmenge gleich 1.

**Lemma 4.11.** *Für jede projektive Basis  $p_0, \dots, p_{n+1}$  von  $P(V)$  können die Vertreter  $v_0, \dots, v_{n+1} \in V$  so gewählt werden, dass*

$$v_0 + \dots + v_{n+1} = 0 \tag{4.3}$$

*Beweis.* Seien  $u_0, \dots, u_{n+1}$  beliebige Vertreter von  $p_0, \dots, p_{n+1}$ . Dann sind sie linear abhängig:  $\lambda_0 u_0 + \dots + \lambda_{n+1} u_{n+1} = 0$ . Wäre ein  $\lambda_i = 0$ , so hätten wir eine lineare Abhängigkeit zwischen den restlichen  $n + 1$  Vektoren  $u_i$ . Also  $\lambda_i \neq 0$  und wir können  $v_i := \lambda_i u_i$  setzen.  $\square$

**Korollar 4.12.** *Jede projektive Basis kann durch Vektoren  $v_0, \dots, v_{n+1}$  repräsentiert werden, für die (4.3) die einzige bis auf Skalierung lineare Abhängigkeit ist.*

*Beweis des Satzes 4.10.* Das Bild einer projektiven Basis ist wieder eine projektive Basis, weil lineare Automorphismen lineare Unabhängigkeit erhalten.

Seien nun  $[v_0], \dots, [v_{n+1}]$  und  $[w_0], \dots, [w_{n+1}]$  zwei projektive Basen. OBdA gilt

$$v_0 + \dots + v_{n+1} = 0, \quad w_0 + \dots + w_{n+1} = 0 \quad (4.4)$$

Gesucht wird eine lineare Abbildung  $f \in \text{GL}(V)$  mit der Eigenschaft  $f(v_i) = \lambda_i w_i$ . Dann hätten wir

$$0 = f(v_0 + \dots + v_{n+1}) = \lambda_0 w_0 + \dots + \lambda_{n+1} w_{n+1}$$

Da aber  $\sum w_i = 0$  die einzige bis auf Skalierung lineare Abhängigkeit von  $w_i$  ist, folgt daraus  $\lambda_i = \lambda$  für alle  $i$ .

Andererseits definiert  $f(v_i) := \lambda w_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  eine lineare Abbildung, und diese Abbildung hat wegen (4.4) die Eigenschaft  $f(v_{n+1}) = \lambda w_{n+1}$ . Dabei ist die Klasse  $[f] \in \text{PGL}(V)$  von der Wahl von  $\lambda$  unabhängig.  $\square$

**Korollar 4.13.** *Ein beliebiges Viereck in der Ebene (keine drei Ecken liegen auf einer Geraden) kann auf jedes andere Viereck (z.B. auf ein Quadrat) abgebildet werden.*

**Korollar 4.14.** *Seien  $A, B, C$  drei nichtkollineare Punkte in der Ebene, und sei  $M$  ein Punkt, der nicht auf den Geraden  $AB, BC, CD$  liegt. Dann gibt es genau eine projektive Transformation, die die Punkte  $A, B, C$  festhält und  $M$  auf das Baryzenter von  $A, B$  und  $C$  abbildet.*

Nicht alle Fünfecke sind projektiv äquivalent. Das folgt ebenfalls aus dem Hauptsatz: wenn wir die Bilder von 4 Ecken festlegen, dann haben wir keine Wahl mehr für das Bild der fünften Ecke.

## 1.5 Topologie der projektiven Räume

Unser Ziel hier ist, eine mehr oder weniger intuitive Vorstellung über Topologie der projektiven Räume zu gewinnen.

Erinnerung:

$$\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / x \sim \lambda x \quad (4.5)$$

Die Quotiententopologie: eine Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}P^n$  heißt offen genau dann, wenn das Urbild  $\pi^{-1}(U)$  (mit  $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$  der natürlichen Projektion) offen ist.

Anschaulich:  $\mathbb{R}P^n$  ist die Menge aller Geraden in  $\mathbb{R}^{n+1}$  durch 0, und wir können uns gut vorstellen, was es heißt, dass eine Folge von Geraden gegen eine gegebene Gerade konvergiert. Mehr noch, es ist möglich, den Abstand zwischen zwei Geraden (den Winkel) zu definieren. Und jede Metrik definiert eine Topologie.

Am Besten wäre es, wenn wir aus jeder Äquivalenzklasse von (4.5) einen Vertreter auf einer *stetigen* Weise wählen könnten. Das würde  $\mathbb{R}P^n$  als Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+1}$  realisieren. Leider (oder glücklicherweise?) ist es nicht möglich.

Wir können allerdings die Äquivalenzklassen von (4.5) verkleinern: auf jeder Geraden  $\{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$  gibt es zwei Punkte im Abstand 1 vom Nullpunkt. Alle Punkte im Abstand 1 vom 0 bilden die Einheitssphäre

$$\mathbb{S}^n : \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

und der projektive Raum ist das Quotient der Sphäre

$$\mathbb{R}P^n = \mathbb{S}^n / x \sim -x \tag{4.6}$$

Der projektive  $n$ -Raum ist die  $n$ -Sphäre mit identifizierten Antipodalpunkten.

Schneiden wir die Sphäre  $\mathbb{S}^n$  entlang des Äquators  $x_0 = 0$  in zwei Hemisphären. Die obere Hemisphäre bezeichnen wir

$$\mathbb{S}_+^n := \{x \in \mathbb{S}^n \mid x_0 \geq 0\}$$

In jedem Paar von Antipoden  $\{x, -x\}$  liegt *mindestens* ein Mitglied in der oberen Hemisphäre. Folglich kann  $\mathbb{S}^n$  in (4.6) durch  $\mathbb{S}_+^n$  ersetzt werden.

Topologisch gesehen ist  $\mathbb{S}_+^n$  eine  $n$ -Kugel (projiziere sie auf die Hyperebene  $x_0 = 0$ ). Das gibt uns die folgende Darstellung des projektiven Raums.

$$\mathbb{R}P^n = B^n / x \sim -x \text{ für } x \in \partial B^n \tag{4.7}$$

wobei  $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$  und  $\partial B^n = \{x \in B^n \mid \|x\| = 1\} = \mathbb{S}^{n-1}$ .

Der projektive  $n$ -Raum ist die  $n$ -Kugel mit identifizierten Antipodalpunkten des Randes.

Der Fall  $n = 1$  ist einfach: die obere Hemisphäre kann als Intervall  $[0, \pi]$  dargestellt werden (die Winkelparametrisierung), und die einzige Identifikation ist  $0 \sim \pi$ . Die projektive Gerade ist also zur Kreislinie homöomorph.

Der Fall  $n = 2$ . Die Verklebung  $B^2 / \sim$  ist im dreidimensionalen Raum nicht möglich. Wir beschreiben mehrere Möglichkeiten, sich einer Visualisierung der projektiven Ebene anzunähern...

Die Kreuzhaube, die "römische Fläche" von Steiner, die Boysche Fläche. Siehe [HCV73].

$\mathbb{R}P^3 \approx \text{SO}(3)$  Aus der Matrixdarstellung von  $\text{SO}(3)$  folgt eine Einbettung  $\mathbb{R}P^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$ .

Die Frage nach dem kleinstdimensionalen Euklidischen Raum  $\mathbb{R}^m$ , wo der projektive Raum  $\mathbb{R}P^n$  eingebettet werden kann, ist ungelöst. Zum Beispiel, für  $n = 6$  ist nur  $9 \leq m \leq 11$  bekannt.

Die Veronese-Einbettung, Einbettungssatz von Whitney.

## 2 Inzidenzsätze und projektive Dualität

### 2.1 Sätze von Pascal und Brianchon für Kegelschnitte

Projektive Transformationen vereinfachen die Klassifikation der Quadriken. (Mehr dazu im Abschnitt 3.4). Zum Beispiel sind alle eigentlichen Kegelschnitte zueinander projektiv äquivalent. In der Tat, die Zentralprojektion von der Kegelspitze aus bildet einen Kegelschnitt auf den anderen.

Sei  $f$  eine projektive Abbildung, sodass  $f(\ell) = \infty$ . Dann bildet  $f$  eine Ellipse  $E$  auf

- eine Ellipse, falls  $E \cap \ell = \emptyset$ ;
- eine Parabel, falls  $\ell$  tangential zu  $E$  ist;
- eine Hyperbel, falls  $\ell$  die Ellipse in zwei Punkten schneidet.

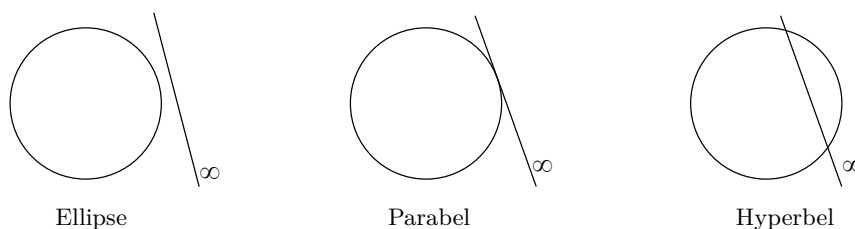


Abbildung 4.3: Ellipse, Parabel und Hyperbel in der projektiven Ebene.

Aus der projektiven Äquivalenz der eigentlichen Kegelschnitten folgt es, dass die Sätze von Pascal und Brianchon nicht nur für Ellipsen, sondern für alle eigentlichen Kegelschnitte gelten.

**Satz 4.15** (Satz von Pascal). *Sei  $Q \subset \mathbb{R}^2$  ein eigentlicher Kegelschnitt, und seien  $p_i \in Q$ ,  $i = 1, \dots, 6$  sechs unterschiedliche Punkte auf  $Q$ . Dann liegen die Schnittpunkte*

$$q_1 := p_1p_2 \cap p_4p_5, \quad q_2 := p_2p_3 \cap p_5p_6, \quad q_3 := p_3p_4 \cap p_6p_1$$

*auf einer Geraden.*

*Dasselbe gilt, wenn ein oder mehrere Paare von aufeinander folgenden Punkten zusammenfallen. Die Gerade  $p_i p_{i+1}$  wird dann zu Tangente.*

Dabei darf ein oder mehrere  $q_i$  unendlich fern sein. Zum Beispiel, ist  $p_1p_2 \parallel p_4p_5$ , so ist  $q_1$  ein unendlich ferner Punkt, und der Satz besagt, dass  $q_2q_3$  zu den beiden Geraden  $p_1p_2$  und  $p_4p_5$  parallel ist. Außerdem, dürfen ein oder mehrere  $p_i$  unendlich fern liegen (dafür soll  $Q$  eine Parabel oder Hyperbel sein).

**Satz 4.16** (Satz von Brianchon). *Sei  $Q \subset \mathbb{R}^2$  ein eigentlicher Kegelschnitt, und seien  $\ell_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$  sechs unterschiedliche Tangenten zu  $Q$ . Dann gehen die Geraden*

$$(\ell_1 \cap \ell_2)(\ell_4 \cap \ell_5), \quad (\ell_2 \cap \ell_3)(\ell_5 \cap \ell_6), \quad (\ell_3 \cap \ell_4)(\ell_6 \cap \ell_1)$$

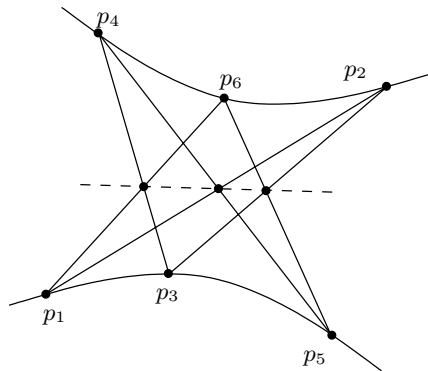


Abbildung 4.4: Der Satz von Pascal auf einer Hyperbel.

durch einen Punkt.

Dasselbe gilt, wenn ein oder mehrere Paare von aufeinander folgenden Tangenten zusammenfallen. Ihr gemeinsamer Tangentialpunkt wird dann anstelle ihres Schnittpunktes betrachtet.

Auch hier dürfen einige der Punkten oder Geraden unendlich fern sein.

In beiden Sätzen ist die Reihenfolge der Ecken (bzw. der Tangentialpunkte) auf dem Kegelschnitt unwesentlich: das war sie bereits in unserem Beweis des Satzes von Brianchon. Siehe Abb. 4.4 für eine Variante des Satzes von Pascal auf der Hyperbel.

**Aufgabe 4.17.** Was wird aus dem Satz von Brianchon, wenn zwei gegenüberliegende Seiten zu Asymptoten einer Hyperbel werden? Benutze das, um einen neuen Beweis des Satzes von Brianchon zu geben.

## 2.2 Sätze von Pappos und Desargues

**Satz 4.18** (Satz von Pappos). Seien  $\ell_1$  und  $\ell_2$  Geraden in der Ebene, und seien  $A, C, E \in \ell_1$  und  $B, D, F \in \ell_2$  sechs Punkte. Dann liegen die drei Schnittpunkte  $AB \cap DE$ ,  $BC \cap EF$  und  $CD \cap AF$  auf einer Geraden.

*Erster Beweis.* Die Segmente der Geraden  $\ell_1$  und  $\ell_2$ , auf welchen alle sechs Punkte liegen, können durch einen eigentlichen Kegelschnitt approximiert werden. Zum Beispiel, wenn die Geraden  $\ell_1$  und  $\ell_2$  sich schneiden, dann können sie durch eine Hyperbel mit Asymptoten  $\ell_1$  und  $\ell_2$  approximiert werden; wenn sie zueinander parallel sind, dann durch eine Ellipse oder Parabel.

Sind  $A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  Punkte auf einem eigentlichen Kegelschnitt, so liegen die drei Schnittpunkte  $A_n B_n \cap D_n E_n$ ,  $B_n C_n \cap E_n F_n$  und  $C_n D_n \cap A_n F_n$  stets auf einer Geraden. Konvergieren die Folgen  $A_n \rightarrow A$  usw., so konvergieren die entsprechenden Schnittpunkte. Und der Grenzwert einer Folge von kollinearen Punkttripeln ist auch ein kollineares Tripel.  $\square$



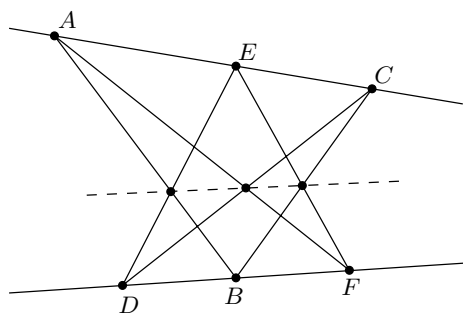


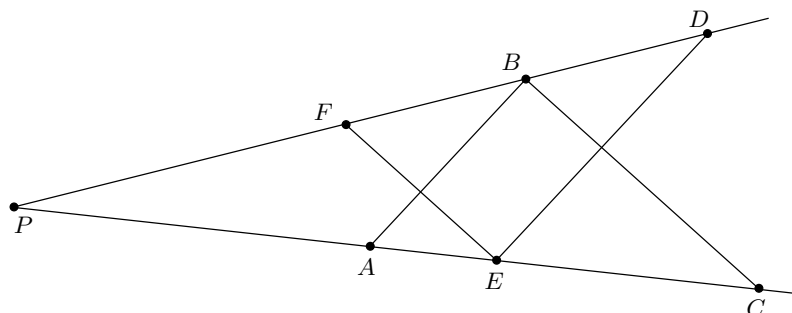
Abbildung 4.5: Der Satz von Pappos.

*Zweiter Beweis.* Wenden wir eine projektive Transformation an, die die Schnittpunkte  $AB \cap DE$  und  $BC \cap EF$  auf die unendlich ferne Gerade abbildet. Das heißt, die Bilder haben die Eigenschaft

$$A'B' \parallel D'E', \quad B'C' \parallel E'F' \quad (4.8)$$

und wir müssen zeigen, dass auch  $A'F' \parallel C'D'$  gilt.

Sind die Bildgeraden  $\ell'_1$  und  $\ell'_2$  parallel, so entstehen zwei gleiche Dreiecke  $ABC$  und  $DEF$ . Folglich ist  $ACDF$  ein Parallelogramm, und  $A'F'$ ,  $C'D'$  sind parallel als seine gegenüberliegenden Seiten.



Schneiden sich  $\ell'_1$  und  $\ell'_2$ , so sei  $P$  der Schnittpunkt. Aus (4.8) folgt, dass die Dreiecke  $PAB$  und  $PED$ , bzw.  $PBC$  und  $PFE$  ähnlich sind. Dann

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PA}{PE} \cdot \frac{PE}{PC} = \frac{PB}{PD} \cdot \frac{PF}{PB} = \frac{PF}{PD}$$

Folglich sind auch Dreiecke  $PAF$  und  $PCD$  ähnlich, und  $A'F' \parallel C'D'$ .  $\square$

**Satz 4.19** (Satz von Desargues). Seien  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$  drei sich in einem Punkt schneidende Geraden, und seien  $A_1A_2A_3, B_1B_2B_3$  zwei Dreiecke sodass  $A_i, B_i \in \ell_i$  für  $i = 1, 2, 3$ . Bezeichne

$$C_1 = A_2B_2 \cap A_3B_3, \quad C_2 = A_3B_3 \cap A_1B_1, \quad C_3 = A_1B_1 \cap A_2B_2$$

Dann liegen die Punkte  $C_1, C_2, C_3$  auf einer Geraden.

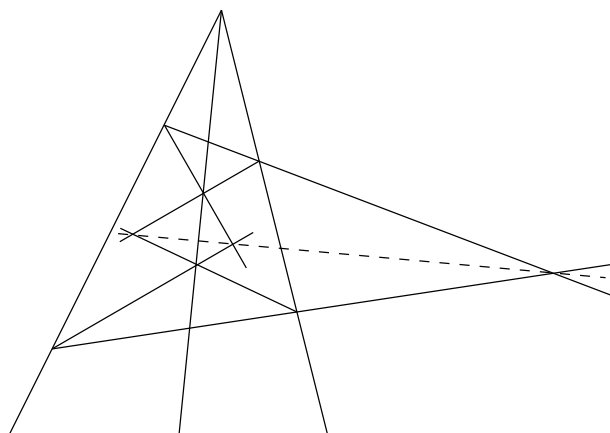


Abbildung 4.6: Satz von Desargues.

*Erster Beweis.* Ähnlich zum Beweis des Satzes von Brianchon im Abschnitt 4.7, betrachten wir die Desargues-Konfiguration als parallele Projektion eines dreidimensionalen Bildes. Seien  $\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3$  nicht-koplanare Geraden, die auf  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$  projizieren, und seien  $A'_i, B'_i$  die entsprechenden Punkte auf  $\ell'_i$ . Sei  $c'$  die Schnittgerade der Ebenen  $A'_1B'_1C'_1$  und  $A'_2B'_2C'_2$ . Dann liegen alle drei Schnittpunkte  $A'_iB'_i \cap A'_jB'_j$  auf der Geraden  $c'$ , und folglich liegen die Punkte  $A_iB_i \cap A_jB_j$  auf der Projektion  $c$  von  $c'$ .  $\square$

*Zweiter Beweis.* Wenden wir eine projektive Transformation an, die die Punkte  $C_1$  und  $C_2$  ins Unendliche schickt. Das heißt, für die Bilder gilt

$$A'_2A'_3 \parallel B'_2B'_3, \quad A'_3A'_1 \parallel B'_3B'_1 \quad (4.9)$$

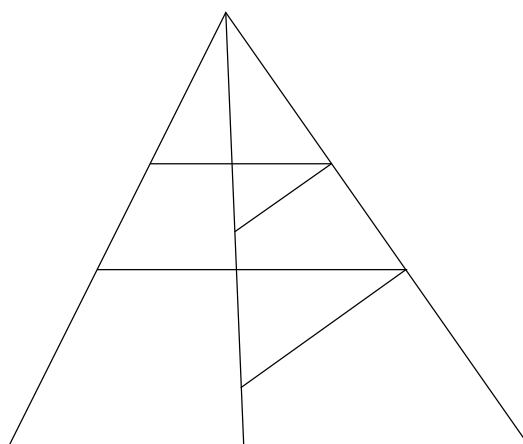
und es soll gezeigt werden, dass  $A'_1A'_2 \parallel B'_1B'_2$ . Sind die Geraden  $\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3$  parallel, so folgt aus (4.9), dass Dreieck  $B'_1B'_2B'_3$  das Bild von  $A'_1A'_2A'_3$  unter einer Translation ist. Also  $A'_1A'_2 \parallel B'_1B'_2$ . Sind die Geraden nicht parallel, so folgt es, dass die Dreiecke homothetisch sind, und dann ebenfalls  $A'_1A'_2 \parallel B'_1B'_2$ .  $\square$

## 2.3 Projektive Dualität

**Definition 4.20.** Der duale projektive Raum zu  $P(V)$  ist  $P(V^*)$ , wobei

$$V^* = \{\omega: V \rightarrow \mathbb{R} \mid \omega \text{ linear}\}$$

der zu  $V$  duale Vektorraum ist.



Erinnerung: der Annihilatorraum eines Untervektorraums  $U \subset V$  ist

$$U^\circ := \{\omega \in V^* \mid \omega(v) = 0 \forall v \in U\}$$

**Definition 4.21.** Für jeden projektiven Unterraum  $L = P(V)$  wird der duale Unterraum  $L^\circ \subset P(V^*)$  definiert als

$$L^\circ := P(U^\circ)$$

wobei  $L = P(U)$  ist.

Die projektive Dualität hat dieselben Eigenschaften, wie die Polarität bezüglich einer Quadrik im affinen Raum, siehe Proposition 3.49. Allerdings gibt es jetzt keine Einschränkung auf den Unterraum (im affinen Fall durfte der affine Unterraum nicht durch 0 gehen), und man braucht keine Quadrik, um die Dualität zu definieren.

Die projektive Dualität ermöglicht es, Inzidenzsätze zu dualisieren.

**Aufgabe 4.22.** Man zeige, dass der Satz von Pappus zu sich selbst, und der Satz von Desargues zu seiner Umkehrung dual ist.

## 3 Koordinaten im projektiven Raum

### 3.1 Homogene Koordinaten

**Definition 4.23.** Mit  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  bezeichnen wir die Äquivalenzklasse des Punktes  $0 \neq (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  bezüglich der Relation  $x \sim \lambda x$ . Das heißt,

$$(x_0 : x_1 : \dots : x_n) = (\lambda x_0 : \lambda x_1 : \dots : \lambda x_n)$$

Die der affinen Hyperebene

$$A = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 = 1\}$$

entsprechende affine Karte auf  $\mathbb{R}P^n$  hat die Form

$$(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \mapsto \left( \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right) \quad (4.10)$$

mit der inversen Abbildung

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n) \quad (4.11)$$

### 3.2 Projektive Transformationen in Koordinaten

Sei  $f \in \text{GL}(n+1)$  ein linearer Automorphismus mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{00} & \dots & a_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Die entsprechende projektive Transformation ist

$$[f](x_0 : x_1 : \dots : x_n) = (a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + \dots + a_{0n}x_n : a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n : \dots : a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n)$$

Durch Komposition mit den Abbildungen (4.11) und (4.10) erhalten wir die Abbildung des affinen Raums  $A$ :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{a_{10} + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n}{a_{00} + a_{01}x_1 + \dots + a_{0n}x_n} \\ \vdots \\ \frac{a_{n0} + a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n}{a_{00} + a_{01}x_1 + \dots + a_{0n}x_n} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Die Abbildung (4.12) ist nur auf  $A \setminus L$  definiert, wobei

$$L = \{x \in A \mid a_{00} + a_{01}x_1 + \dots + a_{0n}x_n = 0\}$$

Das ist die Hyperebene, die "ins Unendliche geschickt" wird. Sind alle  $a_{0i} = 0$  für  $i \geq 1$ , so ist notwendigerweise  $a_{00} \neq 0$  (sonst ist  $f \notin \text{GL}(n+1)$ ). Dann ist  $L = \emptyset$ , und die Abbildung  $[f]|_A$  ist affin. Siehe auch den Satz 4.8.

**Aufgabe 4.24.** Beschreibe das Bild der unendlich fernen Hyperebene unter der Abbildung (4.12).

Ist  $n = 1$ , so wird (4.12) zu

$$x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}, \quad ad - bc \neq 0 \quad (4.13)$$

Projektive Transformationen einer Geraden entsprechen also den gebrochenen linearen Funktionen auf  $\mathbb{R}$ . Der projektive Abschluss  $\mathbb{R}P^1 = \mathbb{R} \cup \infty$  macht die Abbildung (4.13) zu einer Bijektion

$$\mathbb{R} \cup \infty \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty, \quad \infty \mapsto \frac{a}{c}, \quad -\frac{d}{c} \mapsto \infty$$

**Korollar 4.25.** Die gebrochene lineare Funktionen bilden eine Gruppe, die isomorph zu  $\text{PGL}(2)$  ist. Die Komposition der gebrochenen linearen Funktionen entspricht der Matrixmultiplikation in  $\text{GL}(2)$ .

### 3.3 Projektive Unterräume in Koordinaten

Erinnerung: ein projektiver Unterraum von  $P(V)$  ist die Projektivierung eines Untervektorraums von  $V$ .

Da jeder Untervektorraum von  $\mathbb{R}^{n+1}$  die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems ist, wird der entsprechende projektive Unterraum von  $\mathbb{R}P^n$  mit demselben Gleichungssystem beschrieben, wobei die Unbekannten nun als homogene Koordinaten aufgefasst werden sollen. Insbesondere kann jede projektive Hyperebene in  $\mathbb{R}P^n$  beschrieben werden als

$$H = \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{R}P^n \mid a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n\}$$

Der Schnitt von  $H$  mit dem affinen Raum  $A = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 = 1\}$  ist

$$H \cap A = \{(x_1, \dots, x_n) \in A \mid a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n\}$$

Er ist leer genau dann, wenn  $H = P(U)$  die Projektivierung des zu  $A$  parallelen Untervektorraums ist. Anderenfalls ist  $H \cap A$  ein  $(n-1)$ -dimensionaler affiner Unterraum von  $A$ .

Die Umkehrung der obigen Konstruktion ordnet jedem affinen Unterraum  $L$  von  $A$  einen projektiven Unterraum  $\bar{L}$  von  $\mathbb{R}P^n$  zu. Ohne Koordinaten kann  $\bar{L}$  als der projektive Abschluss von  $L$  mittels Vektorraums  $\text{span}L \subset \mathbb{R}^{n+1}$  beschrieben werden. Mittels homogener Koordinaten erhält man  $\bar{L}$  aus  $L$  indem man das Gleichungssystem für  $L$

$$a_{i0} + a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = 0, \quad i = 1, \dots, k$$

durch das Gleichungssystem

$$a_{i0}x_0 + a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = 0$$

ersetzt. Diese Prozedur wird *Homogenisierung* eines linearen Gleichungssystems genannt.

### 3.4 Projektive Quadriken

Wir beginnen mit einer koordinatenfreien Definition der projektiven Quadriken.

**Definition 4.26.** Sei  $\alpha$  eine symmetrische Bilinearform auf einem Vektorraum  $V$ . Dann heißt die Menge

$$N(\alpha) := \{[v] \in P(V) \mid \alpha(v, v) = 0\}$$

die mit  $\alpha$  assoziierte Quadrik im projektiven Raum  $P(V)$ .

Wegen  $\alpha(v, v) = 0 \Leftrightarrow \alpha(\lambda v, \lambda v) = 0$  für  $\lambda \neq 0$  ist die Menge  $N(\alpha)$  wohldefiniert. Beachte, dass die Bilinearform  $\alpha$  keine Funktion auf  $P(V)$  definiert!

Ist  $V = \mathbb{R}^{n+1}$ , so ist jede symmetrische Bilinearform ein homogenes Polynom vom Grad 2 in kartesischen Koordinaten. Dementsprechend kann jede Quadrik als die Lösungsmenge einer homogenen quadratischen Gleichung dargestellt werden:

$$Q = \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{R}P^n \mid \sum_{i,j=0}^n a_{ij}x_ix_j = 0\} \quad (4.14)$$

**Proposition 4.27.** Sei  $A \subset P(V)$  eine affine Karte in einem projektiven Raum, und sei  $Q \subset P(V)$  eine projektive Quadrik. Dann ist der Schnitt  $Q \cap A$  eine affine Quadrik. Jede affine Quadrik in  $A$  ist der Schnitt von  $A$  mit einer projektiven Quadrik.

*Beweis.* Sei  $\dim V = n + 1$ . Durch die Wahl einer Basis von  $V$  identifizieren wir  $V$  mit  $\mathbb{R}^{n+1}$  und schreiben die Quadrik  $Q$  als (4.14). Der Schnitt  $A \cap Q$  ist die Lösungsmenge der Gleichung

$$a_{00} + 2 \sum_{i=1}^n a_{0i}x_i + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j = 0 \quad (4.15)$$

(Hier sind  $x_1, \dots, x_n$  die Koordinaten in  $A$  bezüglich des Koordinatensystems mit Ursprung  $e_0$  und Basis  $e_1, \dots, e_n$ .) Folglich ist  $A \cap Q$  eine affine Quadrik.

Jede affine Quadrik wird durch eine Gleichung der Form (4.15) beschrieben. Folglich ist sie der Schnitt von  $A$  mit der projektiven Quadrik, die durch die homogenisierte Gleichung beschrieben wird.  $\square$

**Beispiel 4.28.** Sei  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}$ . Die projektive Quadrik

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad (4.16)$$

entspricht der affinen Quadrik in  $A$  mit der Gleichung

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Geometrisch entspricht das einem ebenen Schnitt des Kegels (4.16). Wird die affine Ebene  $A$  anders gewählt, so entsteht ein anderer eigentlicher Kegelschnitt.

**Satz 4.29.** Für jede projektive Quadrik  $Q \subset \mathbb{R}P^n$  gibt es eine projektive Transformation  $f \in \text{PGL}(n+1)$ , sodass das Bild  $f(Q)$  eine Gleichung in der folgenden Normalform hat:

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_{k+l}^2 = 0 \quad (4.17)$$

Hier sind  $k, l \geq 0$ ,  $k + l \leq n$ .

*Beweis.* Das folgt aus der Diagonalisierbarkeit der symmetrischen Bilinearformen, siehe Bemerkung 3.46.

Mit einem kleinen Umweg kann das, analog zum Satz 3.19, aus dem Spektralsatz 3.18 hergeleitet werden: zuerst wird eine orthogonale Transformation angewendet, die die Gleichung in die Form

$$\frac{x_0^2}{a_0^2} + \frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_k^2}{a_k^2} - \frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}^2} - \dots - \frac{x_{k+l}^2}{a_{k+l}^2} = 0$$

bringt, und dann die affine Transformation mit der Matrix  $\text{diag}(\frac{1}{a_0}, \dots, \frac{1}{a_{k+l}}, 1, \dots, 1)$ .  $\square$

### 3.5 Polarität bezüglich projektiver Quadriken

Wir haben im Abschnitt 2.3 die Dualität zwischen projektiven Unterräumen von  $P(V)$  und projektiven Unterräumen von  $P(V^*)$  definiert. Ähnlich wie eine nicht-ausgeartete quadratische Form einen Isomorphismus zwischen  $V$  und  $V^*$  definiert, erlaubt sie uns, eine Dualität (Polarität) zwischen den projektiven Unterräumen eines und desselben projektiven Raums zu definieren.

**Definition 4.30.** Sei  $\alpha$  eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform auf  $V$ . Für jeden projektiven Unterraum  $L = P(U) \subset P(V)$  definieren wir den bezüglich  $\alpha$  polar dualen Unterraum als

$$L^\circ := P(U^\perp)$$

wobei  $U^\perp \subset U$  das Orthogonalkomplement zu  $U$  bezüglich  $\alpha$  ist, siehe Definition 3.42.

Es gilt

$$\begin{aligned} \dim L^\circ &= n - \dim L - 1, \text{ wobei } n = \dim P(V) \\ (L^\circ)^\circ &= L \\ L_1 \subset L_2 &\Rightarrow L_1^\circ \supset L_2^\circ \end{aligned}$$

**Beispiel 4.31.** Sei  $V = \mathbb{R}^3$  und  $\alpha$  die Form  $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ , d. h. das Standardskalarprodukt. Dann ist der Punkt  $(a : b : c) \in \mathbb{R}P^2$  dual zur projektiven Geraden  $ax + by + cz = 0$ .

Auf die affine Ebene  $z = 1$  eingeschränkt ordnet diese Dualität jedem Punkt  $(a, b)$  die Gerade  $ax + by + 1 = 0$ . Jede Gerade, die nicht durch den Koordinatenursprung geht, ist zu einem Punkt dual. Die Geraden durch den Ursprung sind zu den unendlich fernen Punkten dual.

Sei  $Q \subset \mathbb{R}^n$  eine nicht-ausgeartete affine Quadrik mit Zentrum in 0:

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha(x, x) = 1\}, \quad \text{rank } \alpha = n \quad (4.18)$$

Die Polarität bezüglich einer affinen Quadrik wurde definiert als

$$L^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \alpha(x, y) = 1 \ \forall x \in L\}$$

(wobei der affine Unterraum  $L$  nicht durch 0 geht). Wir wollen nun zeigen, dass die affine und projektive Polaritäten miteinander verträglich sind.

**Proposition 4.32.** Sei  $\alpha$  eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform auf  $\mathbb{R}^n$ , und  $Q \subset \mathbb{R}^n$  die entsprechende Quadrik (4.18). Sei  $\bar{Q} \subset \mathbb{R}P^n$  der projektive Abschluss der Quadrik  $Q$ . Dann gilt für jeden affinen Unterraum  $L \subset \mathbb{R}^n$  mit  $0 \notin L$

$$\overline{L^\circ} = (\bar{L})^\circ$$

Hier ist  $\bar{L}$  der projektive Abschluss eines affinen Unterraums, und die projektive Polarität wird bezüglich der Quadrik  $\bar{Q}$  betrachtet.

*Beweis.* Da die beiden projektiven Unterräume die gleiche Dimension haben, genügt es, die Inklusion  $(\bar{L})^\circ \subset \bar{L}^\circ$  zu beweisen.

Die Quadrik  $\bar{Q}$  entsteht durch Homogenisierung der Gleichung von  $Q$ :

$$\bar{Q} = \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{R}P^n \mid \alpha(x, x) = x_0^2\}$$

wobei  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Sei  $\bar{\alpha} = \alpha - x_0^2$  die entsprechende quadratische Form in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Zwei Vektoren  $(1, x)$  und  $(1, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$  sind bezüglich  $\bar{\alpha}$  genau dann orthogonal, wenn  $\alpha(x, y) = 1$  ist. Daraus folgt

$$(1 : y) \in (\bar{L})^\circ \Rightarrow \alpha(x, y) = 1 \quad \forall x \in L \Rightarrow y \in L^\circ \Rightarrow (1 : y) \in \bar{L}^\circ$$

Für jedes  $(0 : y) \in (\bar{L})^\circ$  gilt

$$0 = \bar{\alpha}((1, x), (0, y)) = \alpha(x, y)$$

für alle  $x \in L$ . Wähle  $z \in L^\circ$  beliebig. Dann gilt  $\alpha(x, z) = \alpha(x, z - y) = 0$ , und folglich  $y = z - t$  mit  $z, t \in L^\circ$ . Aber jedes solche  $(0 : z - t)$  ist ein Element von  $\bar{L}$ .  $\square$

Die projektive Polarität erlaubt es, die affine Polarität bezüglich nicht-zentrierter Quadriken zu definieren.

**Beispiel 4.33.** Betrachten wir die Parabel  $x^2 - 2y = 0$  in  $\mathbb{R}^2$ . Durch Homogenisierung entsteht die quadratische Form  $x^2 - 2yz$  in  $\mathbb{R}^3$  mit der assoziierten symmetrischen Bilinearform

$$x_1x_2 - y_1z_2 - y_2z_1$$

Die dem Vektor  $(a, b, c)$  bezüglich dieser Form orthogonale Ebene hat die Gleichung

$$ax - bz - cy = 0$$

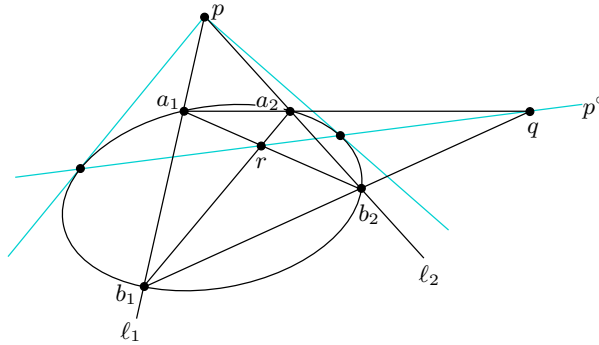
Kehren wir zurück in die affine Ebene  $z = 1$ , so wird auch  $c = 1$  gesetzt, und jedem Punkt  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  die Gerade  $ax - b - y = 0$ , d. h.  $y = ax - b$  zugeordnet. Das ist die Polarität bezüglich der Parabel  $x^2 - 2y = 0$ .

### 3.6 Konjugierte Durchmesser und projektive Polarität

Die Polarität bezüglich einer projektiven Quadrik gibt den konjugierten Durchmessern (siehe Abschnitte 3.5 und 4.2) eine neue Interpretation.

**Proposition 4.34.** *Sei  $\alpha$  eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform auf  $\mathbb{R}^2$  und  $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha(x, x) = 1\}$  die entsprechende affine Quadrik. Die Vektoren  $v, w \in \mathbb{R}^2$  definieren konjugierte Durchmesser von  $Q$  genau dann, wenn die Gerade durch 0 mit dem Richtungsvektor  $w$  die Polare des unendlich fernen Punktes  $(0 : v)$  bezüglich der projektiven Quadrik  $\bar{Q} \subset \mathbb{R}^2$  ist.*





*Beweis.* Die Polare des Punktes  $(0 : v)$  bezüglich der projektiven Quadrik  $\bar{Q} = \{(x_0 : x) \mid \alpha(x, x) = x_0^2\}$  hat die Gleichung  $\alpha(v, x) = 0$ . Sie ist also durch den zu  $v$  bezüglich  $\alpha$  orthogonalen Vektor  $w$  aufgespannt, und orthogonale Vektoren entsprechen nach Proposition 3.45 konjugierten Durchmessern.  $\square$

**Proposition 4.35.** Sei  $p \in \mathbb{R}^2$  ein Punkt außerhalb einer Quadrik  $Q$ . Seien  $\ell_1$  und  $\ell_2$  zwei Geraden durch  $p$ , die  $Q$  in den Punkten  $a_1, b_1$  bzw.  $a_2, b_2$  schneiden. Dann liegt der Schnittpunkt der Geraden  $a_1a_2$  und  $b_1b_2$  auf der Polare von  $p$  bezüglich  $Q$ .

*Beweis.* Betrachte im projektiven Abschluss eine affine Karte, die  $p$  zu einem unendlich fernen Punkt macht. Dann sind die Geraden  $\ell_1$  und  $\ell_2$  parallel,  $a_1a_2b_2b_1$  eine Trapez, und ihre Diagonalen, bzw. die Verlängerungen ihrer Schenkel schneiden sich auf der Geraden durch die Mittelpunkte der Grundseiten. Diese Gerade definiert aber genau den zu den Richtungen von  $\ell_1$  und  $\ell_2$  konjugierten Durchmesser.  $\square$

Das führt zu der folgenden Konstruktion der Polare.

**Korollar 4.36.** Um die Polare eines Punktes  $p$  zu konstruieren, nehme zwei beliebige Geraden durch  $p$ , die  $Q$  jeweils in zwei Punkten  $a_1, b_1$ , bzw.  $a_2, b_2$  schneiden, und markiere die Punkte

$$q = a_1a_2 \cap b_1b_2, \quad r = a_1b_2 \cap a_2b_1$$

Dann ist die Gerade  $qr$  die Polare von  $p$ .

*Beweis.* Da die Punkte  $b_1$  und  $b_2$  vertauschbar sind (gerade deswegen wussten wir im obigen Beweis nicht, ob  $a_1a_2$  und  $b_1b_2$  Diagonalen oder Schenkel sind), liegt auch der Schnittpunkt von  $a_1b_2$  und  $a_2b_1$  auf der Polare von  $p$ .  $\square$

Beachte, dass die Gerade  $pq$  die Polare von  $r$ , sowie  $pr$  die Polare von  $q$  ist. Außerdem geht die Gerade  $qr$  durch die Tangentialpunkte der Tangenten durch  $p$  zu  $Q$ .

## 4 Das Doppelverhältnis

### 4.1 Geometrischer Zugang

Affine Transformationen erhalten Teilungsverhältnisse, projektive nicht. Wir werden jetzt studieren, wie die Teilungsverhältnisse bei Zentralprojektion verzerrt werden.

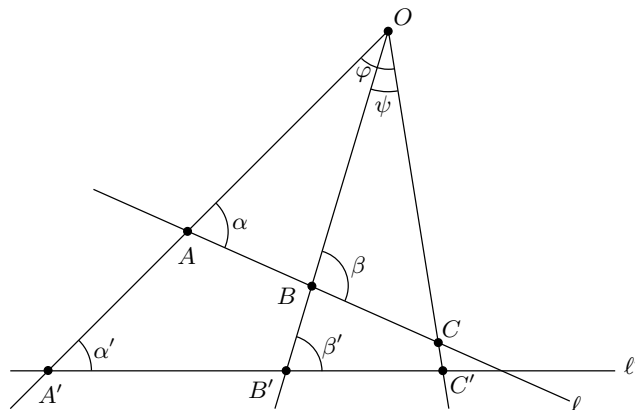


Abbildung 4.7: Teilungsverhältnis unter einer Zentralprojektion.

**Proposition 4.37.** *In den Bezeichnungen der Abb. 4.7 gilt*

$$\frac{A'C'}{B'C'} : \frac{AC}{BC} = \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha'} : \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

*Beweis.* Nach dem Sinussatz gilt

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AC}{OC} \cdot \frac{OC}{BC} = \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \psi} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}$$

Analog,  $\frac{A'C'}{B'C'} = \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha'} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}$ , und die Behauptung folgt.  $\square$

Bemerkenswert ist, dass der Verzerrungsfaktor  $\frac{\sin \beta'}{\sin \alpha'} : \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$  des Teilungsverhältnisses von Punkten  $A, B, C$  vom Punkt  $C$  nicht abhängt. Wird ein vierter Punkt  $D \in \ell$  gewählt mit dem Bild  $D' \in \ell'$ , so gilt auch

$$\frac{A'D'}{B'D'} : \frac{AD}{BD} = \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha'} : \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

Daraus folgt

$$\frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

Dieses Verhältnis zweier Teilungsverhältnisse wird das *Doppelverhältnis* von Punkten  $A, B, C, D$  genannt. Wir haben gerade Folgendes bewiesen.

**Satz 4.38.** *Das Doppelverhältnis von vier kollinearen Punkten ist invariant unter Zentralprojektionen.*

Jede projektive Transformation kann als Komposition von Zentralprojektionen dargestellt werden. Das kann aus Proposition 4.4 und Satz 2.66. Also können wir schließen, dass das Doppelverhältnis unter allen projektiven Transformationen erhalten bleibt.

Im nächsten Abschnitt gehen wir das Doppelverhältnis von einer anderen Seite an.

Wenn die Punkte  $A, B, C, D$  durch ihre Koordinaten  $a, b, c, d$  bezüglich eines Koordinatensystems auf der Geraden  $\ell$  dargestellt werden, dann lautet die obige Definition wie folgt.

**Definition 4.39.** *Das Doppelverhältnis von vier verschiedenen Zahlen  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  wird definiert als*

$$\text{DV}(a, b; c, d) := \frac{a - c}{b - c} : \frac{a - d}{b - d} = \frac{(a - c)(b - d)}{(a - d)(b - c)}$$

## 4.2 Doppelverhältnis als Koordinate auf einer projektiven Geraden

Seien  $p_1, p_2, p_3$  und  $p$  vier verschiedene Punkte auf einer projektiven Geraden  $P(L)$ . Dann bilden  $p_1, p_2$  und  $p_3$  eine projektive Basis von  $P(L)$ , und dem Punkt  $p$  kann eine "Koordinate" bezüglich dieser Basis zugeordnet werden. Diese Koordinate ist das Doppelverhältnis der vier Punkte  $p, p_1, p_2, p_3$ .

**Definition 4.40.** *Für eine projektive Basis  $(p_1, p_2, p_3)$  einer projektiven Geraden  $P(L)$  sei  $I: P(L) \rightarrow \mathbb{R}P^1$  der projektive Isomorphismus definiert durch*

$$I(p_1) = 1, \quad I(p_2) = 0, \quad I(p_3) = \infty \quad (4.19)$$

Dann definieren wir für jeden  $p \in P(L)$  mit  $p \notin \{p_1, p_2, p_3\}$ :

$$\text{DV}(p, p_1; p_2, p_3) := I(p) \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

Das Doppelverhältnis ist wohldefiniert, weil es nach dem Satz 4.10 genau eine Abbildung  $I$  mit den Eigenschaften (4.19) gibt.

Die Definition des Doppelverhältnisses kann auf 4 kollineare Punkte im projektiven Raum  $P(V)$  von beliebiger Dimension erweitert werden, indem man die von den Punkten aufgespannte projektive Gerade auf  $\mathbb{R}P^1$  abbildet.

Ein Vorteil der Definition 4.40 ist, dass aus ihr die projektive Invarianz des Doppelverhältnisses unmittelbar folgt.

**Satz 4.41.** *Sei  $f: P(V) \rightarrow P(W)$  ein projektiver Isomorphismus. Dann gilt*

$$\text{DV}(f(p_0), f(p_1); f(p_2), f(p_3)) = \text{DV}(p_0, p_1; p_2, p_3)$$

*für jedes Quadrupel paarweise verschiedener kollinearere Punkte  $p_0, p_1, p_2, p_3 \in P(V)$ .*

*Beweis.* Sei  $P(L) \subset P(V)$  die von  $p_0, p_1, p_2, p_3$  aufgespannte projektive Gerade. Dann ist  $f(P(L)) = P(L')$  eine projektive Gerade in  $P(W)$ . Jeder Isomorphismus  $I: P(L) \rightarrow \mathbb{R}P^1$  erzeugt einen Isomorphismus

$$I' := I \circ f^{-1}: P(L') \rightarrow \mathbb{R}P^1$$

Wenn  $I$  die Punkte  $p_1, p_2, p_3$  auf die "projektive Standardbasis"  $(1, 0, \infty)$  wie in (4.19) abbildet, dann gilt

$$I'(f(p_1)) = 1, \quad I'(f(p_2)) = 0, \quad I'(f(p_3)) = \infty$$

und folglich

$$DV(f(p_0), f(p_1); f(p_2), f(p_3)) = I'(f(p_0)) = I(p_0) = DV(p_0, p_1, p_2, p_3)$$

□

**Proposition 4.42.** *Definitionen 4.39 und 4.40 sind äquivalent. Das heißt, für jede affine Karte auf der projektiven Geraden  $P(L)$ , die die Punkte  $p, p_1, p_2, p_3$  enthält und für jedes Koordinatensystem auf dieser Karte gilt*

$$DV(p, p_1; p_2, p_3) = \frac{(x - x_2)(x_1 - x_3)}{(x - x_3)(x_1 - x_2)}$$

wobei  $x, x_1, x_2, x_3$  die Koordinaten von  $p, p_1, p_2, p_3$  sind.

*Beweis.* Wird auf  $P(L)$  ein affines Koordinatensystem gewählt, so hat jeder projektive Isomorphismus  $P(L) \rightarrow \mathbb{R}P^1$  die Form

$$x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$$

Wir suchen einen solchen Isomorphismus mit

$$\frac{ax_1 + b}{cx_1 + d} = 1, \quad \frac{ax_2 + b}{cx_2 + d} = 0, \quad \frac{ax_3 + b}{cx_3 + d} = \infty$$

Das ergibt ein lineares Gleichungssystem bezüglich  $a, b, c, d$ :

$$ax_1 + b = cx_1 + d, \quad ax_2 + b = 0, \quad cx_3 + d = 0$$

Das Eliminieren von  $b$  und  $d$  aus der ersten Gleichung ergibt

$$ax_1 - ax_2 = cx_1 - cx_3$$

Also

$$b = -ax_2, \quad c = a \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3}, \quad d = -ax_3 \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3}$$

Daraus folgt

$$\frac{ax - b}{cx - d} = \frac{ax - ax_2}{a \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} x - ax_3 \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3}} = \frac{x - x_2}{x - x_3} \cdot \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_2}$$

und, nach Definition 4.40

$$\text{DV}(x, x_1; x_2, x_3) = \frac{ax - b}{cx - d} = \frac{(x - x_2)(x_1 - x_3)}{(x - x_3)(x_1 - x_2)}$$

□

**Bemerkung 4.43.** Die Beschreibung des Doppelverhältnisses als Koordinate auf einer projektiven Geraden bezüglich einer projektiven Basis hat folgende Analogien.

Das Teilungsverhältnis von drei Punkten  $p, p_1, p_2$  auf einer affinen Gerade  $\ell$  ist

$$\text{TV}(p, p_1, p_2) := \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$$

Hier sind  $x, x_1, x_2$  die Koordinaten von  $p, p_1, p_2$  bezüglich eines beliebigen Koordinatensystems auf der Geraden. Gleichzeitig gilt

$$\text{TV}(p, p_1, p_2) = I(p)$$

wobei  $I: \ell \rightarrow \mathbb{R}$  der affine Isomorphismus mit  $I(p_1) = 1, I(p_2) = 0$  ist.

Die Koordinate eines Vektors  $v$  in einem eindimensionalen Vektorraum  $V$  bezüglich der Basis  $e$  (bestehend, natürlich, aus einem einzigen Vektor) ist die Zahl  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft  $v = \lambda e$ . Gleichzeitig gilt

$$\lambda = I(v)$$

wobei  $I: V \rightarrow \mathbb{R}$  ein Vektorraumisomorphismus mit  $I(e) = 1$  ist.

### 4.3 Symmetrien des Doppelverhältnisses

**Proposition 4.44.** Sei  $\lambda := \text{DV}(a_1, a_2; a_3, a_4)$ . Dann gilt

$$\text{DV}(a_2, a_1; a_3, a_4) = \text{DV}(a_1, a_2; a_4, a_3) = \frac{1}{\lambda} \tag{4.20}$$

$$\text{DV}(a_1, a_3; a_2, a_4) = 1 - \lambda \tag{4.21}$$

*Beweis.* Gleichungen (4.20) folgen aus  $\text{DV}(a_1, a_2; a_3, a_4) = \frac{(a_1 - a_3)(a_2 - a_4)}{(a_1 - a_4)(a_2 - a_3)}$  recht einfach. Für (4.21) braucht man eine etwas längere Rechnung:

$$\begin{aligned} \text{DV}(a_1, a_2; a_3, a_4) + \text{DV}(a_1, a_3; a_2, a_4) &= \frac{(a_1 - a_3)(a_2 - a_4)}{(a_1 - a_4)(a_2 - a_3)} + \frac{(a_1 - a_2)(a_3 - a_4)}{(a_1 - a_4)(a_3 - a_2)} \\ &= \frac{(a_1 a_2 + a_3 a_4 - a_1 a_4 - a_2 a_3) - (a_1 a_3 + a_2 a_4 - a_1 a_4 - a_2 a_3)}{(a_1 - a_4)(a_2 - a_3)} \\ &= \frac{a_1 a_2 + a_3 a_4 - a_1 a_3 - a_2 a_4}{(a_1 - a_4)(a_2 - a_3)} = 1 \end{aligned}$$

□

Da die Transpositionen (12), (23) und (34) die ganze symmetrische Gruppe  $S_4$  erzeugen, folgen aus Proposition 4.44 die Transformationsformeln für  $DV(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}; a_{\sigma(3)}, a_{\sigma(4)})$  für alle  $\sigma \in S_4$ . Zum Beispiel,

$$DV(a_2, a_1; a_4, a_3) = \frac{1}{DV(a_1, a_2; a_4, a_3)} = DV(a_1, a_2; a_3, a_4) = \lambda$$

$$DV(a_3, a_4; a_1, a_2) = 1 - DV(a_3, a_1; a_4, a_2) = 1 - DV(a_1, a_3; a_2, a_4) = 1 - (1 - DV(a_1, a_2; a_3, a_4)) = \lambda$$

$$DV(a_2, a_3; a_1, a_4) = 1 - DV(a_2, a_1; a_3, a_4) = 1 - \frac{1}{\lambda}$$

**Proposition 4.45.** *Es existiert ein Gruppenhomomorphismus*

$$f: S_4 \rightarrow \text{PGL}(2), \quad \sigma \mapsto f_\sigma: \mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1$$

mit

$$f_{(12)}(\lambda) = f_{(34)}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}, \quad f_{(23)}(\lambda) = 1 - \lambda \quad (4.22)$$

Dabei  $\text{Ker } f = \{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$  und  $\text{Bild } f \cong S_3$ .

*Beweis.* Setzen wir

$$f_\sigma(DV(a_1, a_2; a_3, a_4)) = DV(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}; a_{\sigma(3)}, a_{\sigma(4)}) \quad (4.23)$$

Dann ist  $f_\sigma \in \text{PGL}(2)$ , weil  $f_{(12)}$ ,  $f_{(23)}$  und  $f_{(34)}$  nach Proposition 4.44 zu  $\text{PGL}(2)$  gehören und weil die Transpositionen (12), (23), (34) die Gruppe  $S_4$  erzeugen. Dass  $f_\sigma \circ f_\tau = f_{\sigma\tau}$  gilt, folgt unmittelbar aus (4.23).

Oben haben wir festgestellt, dass  $(12)(34) \in \text{Ker } f$  und  $(13)(24) \in \text{Ker } f$ . Die Permutation  $(14)(23)$  ist ihre Komposition, und daher liegt auch im Kern. Da  $\text{Bild } f$  mindestens sechs Elemente enthält:

$$\left\{ \text{id}, \lambda \mapsto \frac{1}{\lambda}, \lambda \mapsto 1 - \lambda, \lambda \mapsto 1 - \frac{1}{\lambda}, \lambda \mapsto \frac{1}{1 - \lambda}, \lambda \mapsto \frac{\lambda}{\lambda - 1} \right\} \quad (4.24)$$

hat der Kern genau vier Elemente, und das Bild sechs.

Das Bild ist zu  $S_3$  isomorph, weil es nur zwei sechselementige Gruppen gibt: die zyklische und  $S_3$ . Die zyklische enthält aber nur ein Element der Ordnung 2, wir haben mindestens zwei:  $\lambda \mapsto \frac{1}{\lambda}$  und  $\lambda \mapsto 1 - \lambda$ .  $\square$

Die folgende Beobachtung liefert einen expliziten Isomorphismus zwischen der Gruppe (4.24) und  $S_3$ .

**Proposition 4.46.** *Die Gruppe (4.24) wirkt frei und transitiv auf der Menge  $\{0, 1, \infty\}$ .*

*Beweis.* Das kann natürlich direkt überprüft werden.

Andererseits, da  $DV(a_1, a_2; a_3, a_4) \in \mathbb{R}P^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$  und dort beliebige Werte annehmen darf, bildet jede der Projektivitäten (4.24) die Menge  $\mathbb{R}P^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$  auf sich selbst. Daraus folgt, dass sie auch die Menge  $\{0, 1, \infty\}$  auf sich selbst abbilden. Das gibt uns eine Gruppenwirkung. Sie ist frei, weil jede Projektivität von  $\mathbb{R}P^1$  mit drei Fixpunkten eine Identität ist. Sie ist transitiv, weil eine injektive Abbildung einer sechselementigen Menge in eine sechselementige surjektiv ist.  $\square$

#### 4.4 Harmonische Punktepaare und vollständiges Vierseit

**Definition 4.47.** Seien  $p_0, p_1, p_2, p_3$  vier verschiedene kollineare Punkte im projektiven Raum. Man sagt, dass die beiden Punktepaare  $\{p_0, p_1\}$  und  $\{p_2, p_3\}$  harmonisch liegen oder sich harmonisch trennen, wenn

$$DV(p_0, p_1; p_2, p_3) = -1$$

Es ist erlaubt, von *ungeordneten* harmonischen Punktepaaren zu reden, weil wegen 4.44 gilt

$$\begin{aligned} DV(p_0, p_1; p_2, p_3) = -1 &\Leftrightarrow DV(p_1, p_0; p_2, p_3) = -1 \\ &\Leftrightarrow DV(p_0, p_1; p_3, p_2) = -1 \Leftrightarrow DV(p_1, p_0; p_3, p_2) = -1 \end{aligned}$$

und  $DV(p_0, p_1; p_2, p_3) = DV(p_2, p_3; p_0, p_1)$ .

**Proposition 4.48.** Trennen sich  $\{p_0, p_1\}$  und  $\{p_2, p_3\}$  harmonisch, so ist  $p_2$  das Mittelpunkt des Intervalls  $p_0p_1$  in jeder affinen Karte, wo  $p_3 = \infty$ .

*Beweis.* Nach Definition 4.40 ist  $-1 = DV(p_0, p_1; p_2, p_3)$  die Koordinate von  $p_0$  in einem Koordinatensystem, wo  $p_1$  und  $p_2$  Koordinaten 1 bzw. 0 haben, und  $p_3$  unendlich fern ist. Dann ist  $p_2 = 0$  der Mittelpunkt des Intervalls  $[-1, 1] = p_0p_1$  in diesem Koordinatensystem. Jedes andere Koordinatensystem mit  $p_3 = \infty$  unterscheidet sich von diesem durch einen affinen Koordinatenwechsel, und dieser erhält die Mittelpunkte.  $\square$

Ein *vollständiges Vierseit* in einer projektiven Ebene besteht aus vier Geraden (*Seiten*), von welchen keine drei konkurrent sind, und aus den sechs Schnittpunkten dieser Geraden (*Ecken*). Wir bezeichnen die Geraden mit  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ , und den Schnittpunkt zwischen  $\ell_i$  und  $\ell_j$  mit  $p_{ij}$ . Die Punktepaare  $p_{12}$  und  $p_{34}, p_{13}$  und  $p_{24}, p_{14}$  und  $p_{23}$  liegen auf keiner gemeinsamen Seite des Vierseits, die von ihnen aufgespannten Geraden heißen *Diagonalen* des Vierseits.

**Satz 4.49.** Auf jeder Diagonalen eines vollständigen Vierseits trennen sich das Paar der Schnittpunkten mit zwei anderen Diagonalen und das Paar der auf der Diagonalen liegenden Ecken harmonisch.

*Beweis.* Sei  $m_1$  die Diagonale durch  $p_{14}$  und  $p_{23}$ ,  $m_2$  die Diagonale durch  $p_{13}$  und  $p_{24}$ , und  $m_3$  die Diagonale durch  $p_{12}$  und  $p_{34}$ . Sei  $q_1$  der Schnittpunkt von  $m_2$  und  $m_3$ ,  $q_2$  der Schnittpunkt von  $m_1$  und  $m_3$ , und  $q_3$  der Schnittpunkt von  $m_1$  und  $m_2$ , siehe Abb. 4.8. Wir müssen zeigen  $DV(p_{14}, p_{23}; q_2, q_3) = -1$ .

Betrachten wir die Zentralprojektion  $m_1 \rightarrow m_2$  mit Zentrum  $p_{12}$ . Sie bildet die uns interessierende Punkte wie folgt ab:

$$p_{14} \mapsto p_{13}, \quad p_{23} \mapsto p_{24}, \quad q_2 \mapsto q_1, \quad q_3 \mapsto q_3$$

Folglich

$$DV(p_{14}, p_{23}; q_2, q_3) = DV(p_{13}, p_{24}; q_1, q_3)$$

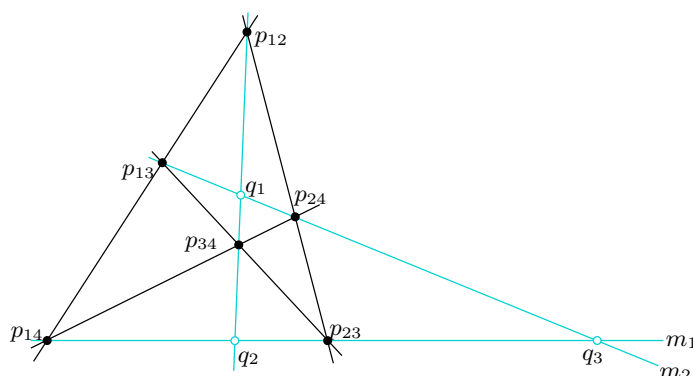


Abbildung 4.8: Das vollständige Vierseit.

Jetzt projizieren wir  $m_2$  zurück auf  $m_1$ , aber mit Zentrum  $p_{34}$ .

$$p_{13} \mapsto p_{23}, \quad p_{24} \mapsto p_{14}, \quad q_1 \mapsto q_2, \quad q_3 \mapsto q_3$$

Also gilt

$$DV(p_{13}, p_{24}; q_1, q_3) = DV(p_{24}, p_{13}; q_1, q_3)$$

und folglich

$$\lambda := DV(p_{13}, p_{24}; q_1, q_3) = DV(p_{24}, p_{13}; q_1, q_3) = \lambda^{-1}$$

Da das Doppelverhältnis von vier verschiedenen Punkten ungleich 1 ist, folgt daraus  $\lambda = -1$ , und der Satz ist bewiesen.  $\square$

Der Satz vom vollständigen Vierseit stellt eine Verbindung zwischen den Sätzen von Ceva (Satz 2.50) und Menelaus (Satz 2.51 her. Und zwar, in jeder affinen Karte gilt

$$DV(p_{14}, p_{23}; q_2, q_3) = -1 \Rightarrow \frac{\overrightarrow{p_{14}q_2}}{q_2p_{23}} = -\frac{\overrightarrow{p_{14}q_3}}{q_3q_{23}}$$

Deswegen erfüllen die Punkte  $q_2, p_{24}, p_{13}$  die Bedingung (2.5) im Bezug auf das Dreieck  $p_{14}p_{23}p_{12}$  genau dann, wenn die Punkte  $q_3, p_{24}, p_{13}$  die Bedingung (2.6) im Bezug auf dasselbe Dreieck erfüllen.

## 4.5 Doppelverhältnis und Dualität

Sei  $P(V)$  ein  $n$ -dimensionaler projektiver Raum. Wir nennen vier verschiedene projektive Hyperebenen  $h_1, h_2, h_3, h_4 \subset P(V)$  *konkurrent*, wenn sie einen projektiven Unterraum  $r$  von Dimension  $n-2$  gemeinsam haben. Dies ist äquivalent dazu, dass die dualen Punkte  $h_1^\circ, h_2^\circ, h_3^\circ, h_4^\circ \in P(V^*)$  kollinear sind.

**Definition 4.50.** *Das Doppelverhältnis von vier konkurrenten Hyperebenen wird definiert als das Doppelverhältnis von zu ihnen dualen Punkten.*

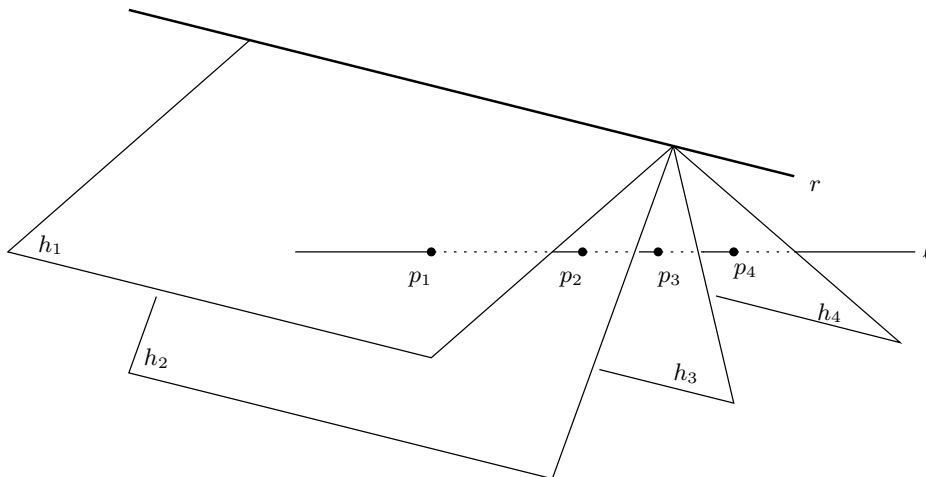


**Proposition 4.51.** Seien  $h_1, h_2, h_3, h_4 \subset P(V)$  vier konkurrente Hyperebenen, und sei  $\ell \subset P(V)$  eine Gerade, die den projektiven Unterraum  $r = h_1 \cap h_2 \cap h_3 \cap h_4$  nicht schneidet, sodass die Punkte

$$p_1 := \ell \cap h_1, \quad p_2 := \ell \cap h_2, \quad p_3 := \ell \cap h_3, \quad p_4 := \ell \cap h_4$$

verschieden sind. Dann gilt

$$DV(p_1, p_2; p_3, p_4) = DV(h_1, h_2; h_3, h_4)$$



*Beweis.* Das duale des projektiven Unterraums  $r \subset P(V)$  ist eine projektive Gerade  $r^\circ \in P(V^*)$ , die die Punkte  $h_1^\circ, h_2^\circ, h_3^\circ, h_4^\circ$  enthält. Per Definition gilt  $DV(h_1, h_2; h_3, h_4) = DV(h_1^\circ, h_2^\circ; h_3^\circ, h_4^\circ)$ . Wir werden eine projektive Abbildung

$$f: \ell \rightarrow r^\circ \quad \text{mit} \quad f(p_i) = h_i^\circ$$

konstruieren, dann wird die Behauptung aus der projektiven Invarianz des Doppelverhältnisses folgen.

Seien  $\ell = P(L)$ ,  $r = P(R)$ . Dann gilt  $V = L \oplus R$  und folglich  $V^* = L^\circ \oplus R^\circ$ . Wir brauchen eine lineare Abbildung

$$F: L \rightarrow R^\circ \quad \text{mit} \quad v \in \text{Ker } F(v) \quad \forall v \in L$$

(In der Tat,  $P(\text{Ker } F(v))$  ist eine Hyperebene durch  $r$ , und wir wollen, dass sie den Punkt  $[v]$  enthält.) Um  $F$  zu konstruieren, wählen wir eine Basis  $e_0, \dots, e_n$  von  $V$  so, dass  $L = \text{span}\{e_0, e_1\}$ . Ist  $\theta_0, \dots, \theta_n$  die duale Basis von  $V^*$ , so gilt  $R^\circ = \text{span}\{\theta_0, \theta_1\}$ . Setzen wir

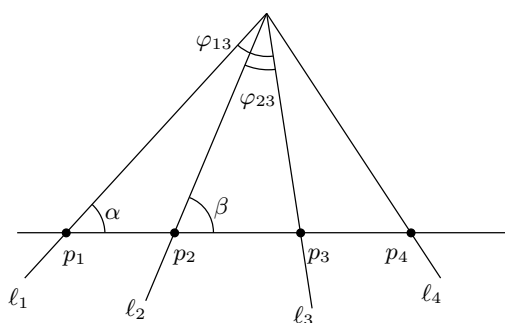
$$F(e_0) := \theta_1, \quad F(e_1) := -\theta_0$$

so gilt  $F(ae_0 + be_1) = a\theta_1 - b\theta_0$ , und wegen  $(a\theta_1 - b\theta_0)(ae_0 + be_1) = 0$  besitzt die Abbildung  $F$  die gewünschte Eigenschaft.  $\square$

Insbesondere wird das Doppelverhältnis von vier konkurrenten Geraden in der Ebene als das Doppelverhältnis von ihren Schnittpunkten mit einer beliebigen nicht mit ihnen konkurrenten Geraden definiert.

**Proposition 4.52.** *Seien  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$  vier konkurrente Geraden in der Ebene, und sei  $\varphi_{ij}$  der Winkel zwischen  $\ell_i$  und  $\ell_j$ . Dann gilt*

$$DV(\ell_1, \ell_2; \ell_3, \ell_4) = \frac{\sin \varphi_{13} \sin \varphi_{24}}{\sin \varphi_{14} \sin \varphi_{23}}$$



*Beweis.* Seien  $p_1, p_2, p_3, p_4$  die Schnittpunkte von  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$  mit einer beliebigen Geraden. Im Beweis der Proposition 4.37 haben wir festgestellt

$$\frac{\overrightarrow{p_1 p_3}}{\overrightarrow{p_2 p_3}} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \varphi_{13}}{\sin \varphi_{23}}$$

Analog,

$$\frac{\overrightarrow{p_1 p_4}}{\overrightarrow{p_2 p_4}} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \varphi_{14}}{\sin \varphi_{24}}$$

Folglich

$$DV(\ell_1, \ell_2; \ell_3, \ell_4) = DV(p_1, p_2; p_3, p_4) = \frac{\overrightarrow{p_1 p_3}}{\overrightarrow{p_2 p_3}} : \frac{\overrightarrow{p_1 p_4}}{\overrightarrow{p_2 p_4}} = \frac{\sin \varphi_{13} \sin \varphi_{24}}{\sin \varphi_{14} \sin \varphi_{23}}$$

□

## 4.6 Doppelverhältnis von Punkten auf einem Kegelschnitt

**Definition 4.53.** *Sei  $Q \subset \mathbb{R}P^2$  ein Kegelschnitt. Das Doppelverhältnis von vier verschiedenen Punkten  $p_1, p_2, p_3, p_4 \in Q$  wird definiert als  $DV(\ell_1, \ell_2; \ell_3, \ell_4)$ , wobei  $\ell_i = pp_i$  ist, für einen beliebigen Punkt  $p \in Q \setminus \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ .*

**Proposition 4.54.** *Das Doppelverhältnis auf einem Kegelschnitt ist wohldefiniert, d. h. der Wert  $DV(\ell_1, \ell_2; \ell_3, \ell_4)$  hängt nicht von der Wahl des Punktes  $p \in Q$  ab.*

*Erster Beweis.* Betrachte eine affine Karte, in welcher  $Q$  eine Ellipse ist, und darin eine euklidische Struktur, bezüglich welcher  $Q$  ein Kreis ist. Seien  $p, p' \in Q$  zwei verschiedene Punkte. Bezeichne mit  $\varphi_{ij}$ , bzw.  $\varphi'_{ij}$  den Winkel  $p_i p p_j$ , bzw.  $p_i p' p_j$ . Dann gilt  $\varphi'_{ij} = \varphi_{ij}$  oder  $\varphi'_{ij} = \pi - \varphi_{ij}$  (das letztere wenn  $p$  und  $p'$  auf verschiedenen von  $p_i$  und  $p_j$  aufgespannten Bögen liegen). Nun folgt  $DV(\ell_1, \ell_2; \ell_3, \ell_4) = DV(\ell'_1, \ell'_2; \ell'_3, \ell'_4)$  aus der Formel von Proposition 4.52.  $\square$

*Zweiter Beweis.* Betrachte eine affine Karte, in welcher die Punkte  $p$  und  $p'$  unendlich fern sind, sodass  $Q$  eine Hyperbel ist. Wähle ein Koordinatensystem, in welchem

$$Q = \{(x, y) \mid xy = 1\}$$

Die Geraden durch  $p$  und  $p'$  sind senkrecht, bzw. waagrecht (oBdA). Hat der Punkt  $p_i$  Koordinaten  $(x_i, y_i)$ , so gilt  $y_i = \frac{1}{x_i}$ , und deswegen

$$DV(\ell_1, \ell_2; \ell_3, \ell_4) = DV(x_1, x_2; x_3, x_4) = DV(y_1, y_2; y_3, y_4) = DV(\ell'_1, \ell'_2; \ell'_3, \ell'_4)$$

$\square$

*Ein neuer Beweis des Satzes von Pascal.* Wurde nicht vorgetragen.  $\square$

Es ist auch möglich, die Sätze von Desargue und Pappos aus der Invarianz des Doppelverhältnisses unter Zentralprojektionen herzuleiten. (Man benötigt Komposition von drei Zentralprojektionen.)

# Kapitel 5

## Sphärische Geometrie

### 1 Längen und Winkel

#### 1.1 Abstandsmessung in der sphärischen Geometrie

Sei  $\mathbb{R}^{n+1}$  mit dem Standardskalarprodukt versehen. Die  $n$ -Sphäre wird definiert als

$$\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

Für jede Orthogonaltransformation  $f \in O(n+1)$  gilt  $f(\mathbb{S}^n) = \mathbb{S}^n$ , deswegen wirkt die Gruppe  $O(n+1)$  auf  $\mathbb{S}^n$ . *Sphärische Geometrie* ist die Geometrie dieser Gruppenwirkung; das heißt, sie studiert die auf  $\mathbb{S}^n$  bezogene Größen, die unter der Wirkung von  $O(n+1)$  invariant bleiben.

Eine dieser Größen ist das Skalarprodukt:

$$\langle f(A), f(B) \rangle = \langle A, B \rangle \quad \forall f \in O(n+1), A, B \in \mathbb{S}^n$$

Ein Punktepaar  $A, B$  kann auf ein Punktepaar  $C, D$  nur dann (und genau dann) abgebildet werden, wenn  $\langle A, B \rangle = \langle C, D \rangle$  gilt. Das bringt uns auf die Idee, den Abstand zwischen  $A$  und  $B$  als eine Funktion von  $\langle A, B \rangle$  zu definieren. Eine unmittelbare Lösung ist es,

$$\text{dist}_{\text{ext}}(A, B) := \|A - B\| = \sqrt{2 - 2\langle A, B \rangle} \quad (5.1)$$

zu setzen, das heißt, gleich dem euklidischen Abstand zwischen  $A$  und  $B$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Die Funktion  $\text{dist}_{\text{ext}}$  ist eine *Metrik* auf  $\mathbb{S}^{n+1}$ , d. h. sie besitzt die Eigenschaften

1.  $\text{dist}_{\text{ext}}(A, B) = \text{dist}_{\text{ext}}(B, A)$  (Symmetrie);
2.  $\text{dist}_{\text{ext}}(A, B) \geq 0$ , und  $\text{dist}(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$ ;
3.  $\text{dist}_{\text{ext}}(A, C) \leq \text{dist}_{\text{ext}}(A, B) + \text{dist}_{\text{ext}}(B, C)$  (Dreiecksungleichung)

Diese Eigenschaften sind erfüllt, weil sie für die euklidische Metrik in  $\mathbb{R}^{n+1}$  gelten.  $\text{dist}_{\text{ext}}$  heißt die *extrinsische Metrik* auf  $\mathbb{S}^n$ .

Ein Nachteil der extrinsischen Metrik ist, dass sie keine "geraden Linien" hat.

**Definition 5.1.** Eine Geodäte im metrischen Raum  $(X, \text{dist})$  ist eine Kurve  $\gamma: I \rightarrow X$ , entlang welcher die Dreiecksungleichung lokal zur Gleichung wird: für jedes  $t \in I$  gibt es ein Intervall  $J \subset I$ , sodass für alle  $t_1, t_2, t_3 \in J$

$$\text{dist}(\gamma(t_i), \gamma(t_k)) = \text{dist}(\gamma(t_i), \gamma(t_j)) + \text{dist}(\gamma(t_j), \gamma(t_k))$$

für irgendeine Transposition  $(i, j, k)$  von  $(1, 2, 3)$ .

Eine Gerade  $\ell \subset \mathbb{R}^n$  ist eine Geodäte. Für die Metrik (5.1) auf  $\mathbb{S}^n$  ist aber die Dreiecksungleichung immer strikt (unter Annahme, dass  $A, B$  und  $C$  verschieden sind), deshalb besitzt sie keine Geodäten.

**Definition 5.2.** Ein Großkreis auf  $\mathbb{S}^n$  ist die Menge  $\mathbb{S}^n \cap L$ , wobei  $L \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ein zweidimensionaler Untervektorraum ist.

Jeden Großkreis kann man als  $\mathbb{S}^1$  sehen, indem man in  $\mathbb{R}^{n+1}$  eine orthonormale Basis wählt, in welcher die ersten zwei Vektoren  $L$  aufspannen.

**Definition 5.3.** Die intrinsische Metrik  $\text{dist}_{\text{intr}}$  oder  $\text{dist}$  auf  $\mathbb{S}^n$  ist definiert als

$$\text{dist}(A, B) := \text{die Länge des kürzesten } A \text{ und } B \text{ verbindenden Großkreisbogens}$$

Mit anderen Worten,

$$\text{dist}(A, B) := \arccos \langle A, B \rangle \quad (5.2)$$

Sind  $A$  und  $B$  Antipoden, so gibt es unendlich viele Großkreise durch  $A$  und  $B$ , und jeder wird durch  $A$  und  $B$  in zwei Bögen der Länge  $\pi$  geteilt. Sind  $A$  und  $B$  keine Antipoden, so ist der Großkreis eindeutig (und zwar vom  $L = \text{span}\{A, B\}$  ausgeschnitten), und ein Bogen ist kürzer als der andere.

Offensichtlich ist der in Definition 5.3 definierte Abstand symmetrisch und positiv. Die Dreiecksungleichung wird in Kürze auch bewiesen. Aus der Definition 5.3 folgt unmittelbar, dass die Großkreise Geodäten auf  $\mathbb{S}^n$  sind (das Bild des Intervalls  $J$  soll in einem Halbkreis enthalten sein).

Die extrinsische Metrik (5.1) soll aber nicht verachtet werden. Ohne sie gäbe es keine intrinsische Metrik. Die Bogenlänge ist nämlich das Supremum der (extrinsischen!) Längen der in den Bogen eingeschriebenen Polygonzügen. Auf eine ähnliche Weise kann man aus einem wegzusammenhängenden metrischen Raum einen geodätischen Raum machen: man definiert den neuen Abstand als das Infimum der Längen aller rektifizierbaren Kurven (wobei die Länge einer Kurve als Supremum der Längen der Polygonzügen definiert wird, und rektifizierbar heißt, dass dieses Supremum endlich ist). Mehr dazu siehe in [BBI01].

## 1.2 Duale sphärische Dreiecke

Seien  $A, B, C \in \mathbb{S}^n$  drei verschiedene, nicht auf einer Geodäte liegende Punkte. Dann ist  $V := \text{span}\{A, B, C\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ein dreidimensionaler Untervektorraum, und  $S := V \cap \mathbb{S}^n$  ist eine zweidimensionale Sphäre. Sphäre  $S$  ist *geodätisch*, d. h. die Geodäte zwischen zwei nicht-antipodalen Punkten  $X, Y \in S$  ist vollständig in  $S$  enthalten. Deswegen dürfen wir uns auf der Geometrie eines Dreiecks  $ABC$  in  $\mathbb{S}^2$  konzentrieren.

**Definition 5.4.** Die Polare eines Punktes  $A \in \mathbb{S}^2$  ist der Großkreis

$$A^\circ := \{X \in \mathbb{S}^2 \mid \langle A, X \rangle = 0\}$$

Beachte, dass jeder Großkreis zwei Pole (zwei Punkte, zu welchen er polar ist) hat. Sei

$$A_-^\circ := \{X \in \mathbb{S}^2 \mid \langle A, X \rangle \leq 0\}$$

die von  $A^\circ$  berandete und  $A$  nicht enthaltende Halbsphäre.

**Definition 5.5.** Das zu  $ABC$  duale Dreieck ist der Schnitt  $A_-^\circ \cap B_-^\circ \cap C_-^\circ$ .

Dieser Schnitt von drei Halbsphären hat in der Tat drei Ecken  $A' \in B^\circ \cap C^\circ$ ,  $B' \in C^\circ \cap A^\circ$  und  $C' \in A^\circ \cap B^\circ$ . Zwei Großkreise schneiden sich in zwei Punkten, und  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  werden so gewählt, dass

$$\langle A, A' \rangle < 0, \quad \langle B, B' \rangle < 0, \quad \langle C, C' \rangle < 0 \quad (5.3)$$

**Proposition 5.6.** Die Dualität zwischen sphärischen Dreiecken ist involutiv: ist  $A'B'C'$  dual zu  $ABC$ , so ist  $ABC$  dual zu  $A'B'C'$ .

*Beweis.* Aus  $B' \in C^\circ \cap A^\circ$  und  $C' \in A^\circ \cap B^\circ$  folgt

$$\langle A, B' \rangle = \langle A, C' \rangle = 0$$

Dann  $A \in (B')^\circ \cap (C')^\circ$  und analog für die anderen zwei Ecken  $B$  und  $C$ . Die Bedingungen (5.3) garantieren, dass  $A$  der richtige von zwei Schnittpunkten von  $(B')^\circ$  und  $(C')^\circ$  ist.  $\square$

Anstelle von Dreiecken kann man die Triederwinkel  $OABC$  und  $OA'B'C'$  mit der Spitze  $O$  im Koordinatenursprung betrachten. Dann ist  $OA'$  die Außennormale zur Seite  $OBC$  des Winkels  $OABC$ .

Bezeichnen wir mit  $a, b, c$  die Längen der Seiten  $BC, CA, AB$ , und mit  $\alpha, \beta, \gamma$  die Winkel an den Ecken  $A, B, C$ . Der Winkel  $\alpha$  ist gleich dem Diederwinkel zwischen den Halbebenen  $OAB$  und  $OAC$ . Andererseits, da  $OB'$  und  $OC'$  Außennormalen zu  $OAC$  bzw.  $OAB$  sind, ist  $B'OC'$  der entsprechende Außendiederwinkel, und deswegen gleich  $\pi - \alpha$ . Es folgt

$$a' = \pi - \alpha, \quad b' = \pi - \beta, \quad c' = \pi - \gamma \quad (5.4)$$

wobei  $a', b', c'$  die Seitenlängen im dualen Dreieck  $A'B'C'$  sind. Werden die Rollen von  $ABC$  und  $A'B'C'$  vertauscht, so entstehen die Gleichungen

$$\alpha' = \pi - a, \quad \beta' = \pi - b, \quad \gamma' = \pi - c \quad (5.5)$$

zwischen den Seitenlängen von  $ABC$  und den Winkelgrößen des dualen.

**Proposition 5.7.** Ein sphärisches Dreieck ist durch seine Winkelgrößen eindeutig bestimmt. Das heißt, für zwei Dreiecke mit gleichen entsprechenden Winkelgrößen existiert eine Orthogonaltransformation, die ein in das andere überführt.

*Beweis.* Zwei Dreiecke mit gleichen Seitenlängen sind kongruent, weil eine Abbildung, die die Skalarprodukte der Basisvektoren erhält, erhält die Skalarprodukte aller Vektoren. Sind die Winkelgrößen in zwei Dreiecken gleich, so sind die Seitenlängen in den zu ihnen dualen Dreiecken gleich. Eine Orthogonaltransformation, die die dualen Dreiecke ineinander überführt, bildet auch die “primale” Dreiecke aufeinander.  $\square$

Das steht im Kontrast zur euklidischen Geometrie, wo Dreiecke mit gleichen Winkeln nicht unbedingt kongruent, sondern ähnlich zueinander sind.

Zum Schluss drücken wir die Vektoren  $A', B', C'$  durch  $A, B, C$  aus. Da der Vektor  $A'$  orthogonal zu  $B$  und  $C$  ist, ist er kollinear mit dem Vektorprodukt  $B \times C$ . Daraus folgt

$$A' = \pm \frac{B \times C}{\|B \times C\|}$$

Um das Vorzeichen genau zu definieren, müssen wir  $\langle A, A' \rangle < 0$  in Betracht ziehen.

**Proposition 5.8.** *Ist  $\det(A \ B \ C) > 0$ , so gilt*

$$\begin{aligned} A' &= -\frac{B \times C}{\|B \times C\|}, & B' &= -\frac{C \times A}{\|C \times A\|}, & C' &= -\frac{A \times B}{\|A \times B\|} \\ A &= \frac{B' \times C'}{\|B' \times C'\|}, & B &= \frac{C' \times A'}{\|C' \times A'\|}, & C &= \frac{A' \times B'}{\|A' \times B'\|} \end{aligned}$$

*Beweis.* Da  $\langle A, B \times C \rangle = \det(A \ B \ C)$ , gilt bei der getroffenen Wahl  $\langle A, A' \rangle < 0$ . Für das zweite Tripel der Gleichungen beachte, dass  $\det(A \ B \ C) > 0 \Rightarrow \det(A' \ B' \ C') < 0$ .  $\square$

### 1.3 Sinus- und Kosinussätze für sphärische Dreiecke

**Satz 5.9** (Sinussatz für sphärische Dreiecke). *In jedem sphärischen Dreieck  $ABC$  gilt*

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \alpha} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

*Beweis.* Nach Proposition 5.8 gilt

$$\langle A, A' \rangle = -\frac{\langle A, B \times C \rangle}{\|B \times C\|} = -\frac{\det(A \ B \ C)}{\sin a}$$

sowie

$$\langle A, A' \rangle = \frac{\langle A', B' \times C' \rangle}{\|B' \times C'\|} = \frac{\det(A' \ B' \ C')}{\sin a'} \quad (5.6)$$

Daraus folgt

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin a}{\sin a'} = -\frac{\det(A \ B \ C)}{\det(A' \ B' \ C')}$$

Analog

$$\frac{\sin b}{\sin \beta} = -\frac{\det(A \ B \ C)}{\det(A' \ B' \ C')} = \frac{\sin c}{\sin \beta}$$

und der Satz folgt.  $\square$

**Satz 5.10** (Kosinussätze für sphärische Dreiecke). *In jedem sphärischen Dreieck  $ABC$  gilt*

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma \quad (5.7)$$

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c \quad (5.8)$$

*Beweis.* Seien  $V = (A \ B \ C)$  und  $W = (A' \ B' \ C')$   $3 \times 3$ -Matrizen mit Koordinaten von entsprechenden Punkten als Spalten. Dann haben die Gram-Matrizen von den Basen  $(A, B, C)$  und  $(A', B', C')$  die Form

$$G = V^T V = \begin{pmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{pmatrix}$$

$$G' = W^T W = \begin{pmatrix} 1 & \cos c' & \cos b' \\ \cos c' & 1 & \cos a' \\ \cos b' & \cos a' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos \gamma & -\cos \beta \\ -\cos \gamma & 1 & -\cos \alpha \\ -\cos \beta & -\cos \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Außerdem gilt

$$V^T W = \begin{pmatrix} \langle A, A' \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle B, B' \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle C, C' \rangle \end{pmatrix} =: D$$

Daraus folgt  $W = (V^T)^{-1}D$  und  $W^T = DV^{-1}$ , also

$$G' = DV^{-1}(V^T)^{-1}D = DG^{-1}D \quad (5.9)$$

Der Kosinussatz folgt aus dem Vergleich der Matrixeinträge auf der linken und auf der rechten Seite dieser Gleichung.

Das Anwenden der Formel für die inverse Matrix ergibt

$$G^{-1} = \frac{1}{\det G} \begin{pmatrix} \sin^2 a & \cos a \cos b - \cos c & \cos a \cos c - \cos b \\ \cos a \cos b - \cos c & \sin^2 b & \cos b \cos c - \cos a \\ \cos a \cos c - \cos b & \cos b \cos c - \cos a & \sin^2 c \end{pmatrix}$$

Also folgt aus (5.9)

$$-\cos \gamma = \frac{\langle A, A' \rangle \langle B, B' \rangle}{\det G} (\cos a \cos b - \cos c)$$

Nach (5.6) gilt

$$\frac{\langle A, A' \rangle \langle B, B' \rangle}{\det G} = \frac{(\det V)^2}{\sin a \sin b \det G} = \frac{1}{\sin a \sin b}$$

also

$$-\cos \gamma = \frac{\cos a \cos b - \cos c}{\sin a \sin b}$$

und die Gleichung (5.7) folgt.



Die Gleichung (5.8) folgt aus der Anwendung der (5.7) auf den dualen Dreieck und den Formeln (5.4) und (5.5):

$$\cos c' = \cos a' \cos b' + \sin a' \sin b' \cos \gamma' \Rightarrow -\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos c$$

□

**Proposition 5.11.** *In jedem (nicht-ausgearteten) sphärischen Dreieck gelten die Ungleichungen*

$$a < b + c, \quad b < a + c, \quad c < a + b, \quad a + b + c < 2\pi$$

*Für jedes Tripel  $a, b, c \in (0, \pi)$ , das diese Bedingungen erfüllt, existiert ein sphärisches Dreieck mit Seitenlängen  $a, b, c$ . Dieses Dreieck ist eindeutig bis auf Isometrie der Sphäre.*

*Beweis.* Nach dem Kosinussatz

$$\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \cos \alpha > -1$$

Das ergibt

$$\cos a - \cos b \cos c > -\sin b \sin c \Rightarrow \cos a > \cos(b + c)$$

Wegen  $a \in (0, \pi)$  folgt daraus

$$2\pi - a > b + c > a \Rightarrow a + b + c < 2\pi, a < b + c$$

Aus

$$\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \cos \alpha < 1$$

folgt

$$\cos a < \cos(b - c)$$

Das bedeutet  $a > |b - c|$  und impliziert

$$b < a + c, \quad c < b + a$$

Sind die Bedingungen erfüllt, so gilt  $|\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}| < 1$ , das heißt es existiert ein  $\alpha$  mit  $\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \cos \alpha$ . Man trage von einem Punkt zwei Großkreisbögen ab von den Längen  $b$  und  $c$  und mit Winkel  $\alpha$  dazwischen. Dann ist der Abstand zwischen ihren Endpunkten gleich  $a$ . □

**Korollar 5.12.** *In jedem (nicht-ausgearteten) sphärischen Dreieck gilt*

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi$$

*Beweis.* Das folgt aus der Ungleichung  $a' + b' + c' < 2\pi$  für den dualen Dreieck. □

**Proposition 5.13.** *In einem rechtwinkligen sphärischen Dreieck mit  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  gilt:*

1.  $\cos c = \cos a \cos b$

$$2. \cos c = \cot \alpha \cot \beta$$

$$3. \sin a = \sin c \sin \alpha$$

$$4. \cos \alpha = \sin \beta \cos a$$

*Beweis.* Folgt aus dem Sinus- und Kosinussatz. □

## 2 Winkel und Krümmung

### 2.1 Kosinussatz auf der Sphäre vom Radius $R$

Sei  $\mathbb{S}_R^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = R\}$  die Sphäre vom Radius  $R$ . Der Kehrwert des Quadrates des Radius

$$\kappa := \frac{1}{R^2}$$

wird die *Krümmung* der Sphäre genannt.

Auf  $\mathbb{S}_R^2$  definiert man die Metrik auf eine ähnliche Weise wie auf  $\mathbb{S}^2$ . Die Zentralprojektion  $\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}_R^2$  multipliziert alle Abstände mit  $R$  und erhält die Winkel. Deswegen entspricht ein Dreieck auf  $\mathbb{S}_R^2$  mit Seitenlängen  $a, b, c$  und Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  einem Dreieck auf  $\mathbb{S}^2$  mit Seitenlängen  $\sqrt{\kappa}a, \sqrt{\kappa}b, \sqrt{\kappa}c$ . Daraus folgt unmittelbar der Kosinussatz auf der Sphäre vom Radius  $R$ .

**Proposition 5.14.** *Für jedes Dreieck auf  $\mathbb{S}_R^2$  gilt*

$$\cos \sqrt{\kappa}c = \cos \sqrt{\kappa}a \cos \sqrt{\kappa}b + \sin \sqrt{\kappa}a \sin \sqrt{\kappa}b \cos \gamma \quad (5.10)$$

Sei  $\Delta_\kappa(a, b, c)$  ein Dreieck mit Seitenlängen  $a, b, c$  auf der Sphäre vom Radius  $\frac{1}{\sqrt{\kappa}}$ . Bezeichnen wir mit  $\gamma_\kappa$  den Winkel von  $\Delta_\kappa(a, b, c)$  zwischen den Seiten  $a$  und  $b$ . Halten wir nun  $a, b, c$  fest und schicken  $\kappa \rightarrow 0$  (d. h.  $R \rightarrow \infty$ ).

**Proposition 5.15.** *Der Winkel  $\gamma_\kappa$  konvergiert gegen den Winkel  $\gamma$  im euklidischen Dreieck mit Seitenlängen  $a, b, c$ .*

*Beweis.* Mit Hilfe der Taylor-Polynome von  $\cos$  und  $\sin$  erhalten wir:

$$\begin{aligned} \cos \gamma_\kappa &= \frac{\cos \sqrt{\kappa}c - \cos \sqrt{\kappa}a \cos \sqrt{\kappa}b}{\sin \sqrt{\kappa}a \sin \sqrt{\kappa}b} = \frac{(1 - \frac{\kappa c^2}{2}) + o(\kappa) - (1 - \frac{\kappa a^2}{2} + o(\kappa))(1 - \frac{\kappa b^2}{2} + o(\kappa))}{(\sqrt{\kappa}a + o(\kappa))(\sqrt{\kappa}b + o(\kappa))} \\ &= \frac{1 - \frac{\kappa c^2}{2} - (1 - \frac{\kappa}{2}a^2 - \frac{\kappa}{2}b^2 + o(\kappa))}{\kappa ab + o(\kappa)} = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + o(1)}{2ab + o(1)} \rightarrow \cos \gamma \end{aligned}$$

□

## 2.2 Fläche eines sphärischen Vielecks

Ein *Zweieck* auf der Sphäre  $\mathbb{S}^2$  ist der Schnitt von zwei verschiedenen, nicht gegenüberliegenden Hemisphären. Die diese Hemisphären berandende Großkreise schneiden sich in einem Paar von Antipoden  $A, -A$ . Die Punkte  $A$  und  $-A$  heißen die Ecken des Zweiecks. Die Seiten eines Zweiecks sind zwei Halbkreisbogen.

**Lemma 5.16.** *Bilden die Seiten eines Zweiecks den Winkel  $\alpha$ , so hat er die Fläche  $2\alpha$ .*

*Beweis.* Wir geben ja keine Definition der Fläche, nehmen aber an, dass die Fläche additiv und im gewissen Sinne stetig ist. Aus der Additivität folgt die Gültigkeit der Formel bei  $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ , und dann auch bei  $\alpha = \frac{2\pi m}{n}$ . Aus der Stetigkeit folgt die Formel für alle  $\alpha$ .  $\square$

**Satz 5.17.** *Die Fläche eines sphärischen Dreiecks mit Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  ist  $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ .*

*Beweis.* Zeichne die von den Seiten des Dreiecks  $ABC$  aufgespannten Großkreise. Sie schneiden sich, außer in den Punkten  $A, B, C$ , noch in  $-A, -B, -C$ . Sei  $H_A \subset \mathbb{S}^2$  die den Punkt  $A$  enthaltende Halbsphäre, deren Randkreis durch  $B$  und  $C$  geht. Definiere analog  $H_B$  und  $H_C$ . Es gilt  $H_A \cup H_B \cup H_C = \mathbb{S}^2 \setminus -\Delta$ . Nach dem Inklusions-Exklusions-Prinzip

$$\begin{aligned} \text{Area}(H_A \cup H_B \cup H_C) &= \text{Area}(H_A) + \text{Area}(H_B) + \text{Area}(H_C) \\ &\quad - \text{Area}(H_A \cap H_B) - \text{Area}(H_B \cap H_C) - \text{Area}(H_C \cap H_A) + \text{Area}(H_A \cap H_B \cap H_C) \end{aligned}$$

Folglich

$$4\pi - \text{Area}(ABC) = 3 \cdot 2\pi - 2\gamma - 2\alpha - 2\beta + \text{Area}(ABC)$$

Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

Unter dem *Außenwinkel* eines Vielecks verstehen wir  $\pi - \alpha$ , wobei  $\alpha$  der entsprechende Innenwinkel ist.

**Satz 5.18.** *Die Fläche eines sphärischen Vielecks ist gleich  $2\pi$  minus die Summe seiner Außenwinkel.*

*Beweis.* Man wähle einen Punkt  $C$  im Inneren des Vielecks und zerschneide es in  $n$  Dreiecke mit Hilfe der Geodäten von  $C$  zu den Ecken. Bezeichne mit  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  die Winkel im  $i$ -ten Dreieck,  $\gamma_i$  der Winkel an der Ecke  $C$ . Dann gilt

$$\text{Area} = \sum_i (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i - \pi) = 2\pi - \sum_i (\pi - \alpha_i - \beta_{i-1})$$

und der Satz ist bewiesen.  $\square$

$2\pi$  minus die totale Krümmung. Fläche der Halbsphäre.

**Satz 5.19.** Sei  $\Delta \subset \mathbb{S}^3$  ein sphärisches Tetraeder, und sei  $\Delta'$  das duale Tetraeder. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\Delta) + \frac{1}{2} \sum_i a_{ij} a'_{ij} + \text{Vol}(\Delta') &= \pi^2 = \frac{1}{2} \text{Vol}(\mathbb{S}^3) \\ \text{Area}(\partial\Delta) + \text{Area}(\partial\Delta') &= 4\pi \end{aligned}$$

Hier sind  $a_{ij}$  die Kantenlängen des Tetraeders  $\Delta$ , und  $a'_{ij}$  die Längen der dualen Kanten von  $\Delta'$ .

**Korollar 5.20.** Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällige große Sphäre in  $\mathbb{S}^3$  das Tetraeder  $\Delta$  schneidet, ist gleich

$$\frac{1}{\pi^2} \left( \text{Vol}(\Delta) + \frac{1}{2} \sum_i a_{ij} a'_{ij} \right)$$

**Problem 5.21.** Gibt es ein sphärisches Tetraeder, dessen Diederwinkel rationale Vielfachen von  $\pi$  sind, das Volumen aber kein rationales Vielfaches von  $\pi^2$  ist?

### 3 Elliptische Geometrie

#### 3.1 Der Raum und die Gruppe

Die Großkreise sind die ‘‘Geraden’’ der sphärischen Geometrie. Anstelle der Axiomen der euklidischen Geometrie

- durch zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade;
- zwei Geraden schneiden sich in höchstens einem Punkt

gilt in der sphärischen Geometrie

- durch zwei verschiedene und nicht antipodale Punkte geht genau eine Gerade;
- zwei Geraden schneiden sich in zwei zueinander antipodalen Punkten.

Die sphärische Geometrie wird mehr Ähnlichkeit mit der euklidischen haben, wenn wir die Antipodenpaare zu einem Punkt erklären. Das heißt, statt der Sphäre  $\mathbb{S}^n$  betrachten wir den Quotientenraum

$$\mathbb{R}P^n = \mathbb{S}^n / A \sim -A$$

Die Großkreise werden zu projektiven Geraden (vergleiche die Definitionen der Geraden in  $\mathbb{R}P^n$  und der Großkreise in  $\mathbb{S}^n$ ), sodass durch zwei verschiedene Punkte stets eine Gerade geht und zwei Geraden sich immer in einem Punkt schneiden.

Die Gruppe der Orthogonaltransformationen  $O(n+1)$  wirkt auch auf  $\mathbb{R}P^n$  (Äquivalenzklasse wird auf Äquivalenzklasse abgebildet). Diese Wirkung ist aber nicht mehr treu: die Abbildung mit der Matrix  $-E_{n+1}$  vertauscht die Antipoden, und wirkt daher

auf  $\mathbb{R}P^n$  als Identität. Das und die Identität sind aber die einzigen Abbildungen mit dieser Eigenschaft, daher ist die Faktorgruppe

$$\mathrm{PO}(n+1) := \mathrm{O}(n+1)/\{E_{n+1}, -E_{n+1}\} \quad (5.11)$$

eine Transformationsgruppe von  $\mathbb{R}P^n$ .

**Definition 5.22.** *Der projektive Raum  $\mathbb{R}P^n$  zusammen mit der Transformationsgruppe  $\mathrm{PO}(n+1)$  heißt elliptische Geometrie.*

Die Gruppe der Orthogonaltransformationen  $\mathrm{O}(n+1)$  hat zwei Zusammenhangskomponenten: die orientierungserhaltenden Transformationen  $\mathrm{SO}(n+1)$  und die orientierungsumkehrenden  $\mathrm{O}(n+1)\setminus\mathrm{SO}(n+1)$ . Für  $\mathrm{PO}(n+1)$  hängt es von der Parität von  $n$  ab:

$$\mathrm{PO}(n+1) \cong \mathrm{SO}(n+1) \quad \text{für } n \text{ gerade,}$$

da in diesem Fall  $E_{n+1} \notin \mathrm{SO}(n+1)$  und deswegen enthält jede Äquivalenzklasse (5.11) genau eine Transformation aus  $\mathrm{SO}(n+1)$ . Wenn  $n$  ungerade ist, dann hat  $\mathrm{PO}(n+1)$  zwei Zusammenhangskomponenten, eine von welchen  $\mathrm{SO}(n+1)/\{E_{n+1}, -E_{n+1}\}$  ist.

Dieses Verhalten von  $\mathrm{PO}(n+1)$  spiegelt sich in der Orientierbarkeit, bzw. Nichtorientierbarkeit von  $\mathbb{R}P^n$  wieder: für  $n$  ungerade ist  $\mathbb{R}P^n$  orientierbar, und die zwei Komponenten von  $\mathrm{PO}(n+1)$  entsprechen den orientierungserhaltenden, bzw. orientierungsumkehrenden Transformationen.

### 3.2 Abstandmessung in der elliptischen Geometrie

Der Abstand zwischen den Punkten  $p, q \in \mathbb{S}^n$  ist gleich dem Winkel zwischen den Halbgeraden  $0p$  und  $0q$ ; der Abstand zwischen  $[p], [q] \in \mathbb{R}P^n$  ist der Winkel zwischen den Geraden  $0p$  und  $0q$ .

**Definition 5.23.** *Seien  $p, q \in \mathbb{S}^n$ . Die elliptische Metrik wird definiert als*

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{ell}}([p], [q]) := \min\{\angle p0q, \angle (-p)0q\}$$

Insbesondere ist der größtmögliche Abstand zwischen Punkten in  $\mathbb{R}P^n$  gleich  $\frac{\pi}{2}$ , während in  $\mathbb{S}^n$  es  $\pi$  ist.

Ist  $\angle p0q = \frac{\pi}{2}$ , so gibt es in  $\mathbb{R}P^n$  zwei  $[p]$  und  $[q]$  verbindende geodätische Intervalle. Sie entstehen aus den Großkreisbögen  $pq$  und  $(-p)q$ . Vergleiche das mit  $\mathbb{S}^n$ : für die am weitesten entfernte Punkte  $p$  und  $-p$  gibt es *unendlich viele* sie verbindende geodätische Intervalle.

Sei  $e_0, e_1, e_2$  die Standardbasis von  $\mathbb{R}^3$ . Die Punkte  $[e_0], [e_1], [e_2]$  haben paarweise Abstände  $\frac{\pi}{2}$ . Sie definieren vier Dreiecke, und diese Dreiecke überdecken ganz  $\mathbb{R}P^2$ .

Lokal ist die elliptische Geometrie zur sphärischen isometrisch.

**Proposition 5.24.** *Die Einschränkung der Projektion  $\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$  auf das Dreieck  $\Delta = e_0e_1e_2$  ist eine Isometrie.*

*Beweis.* Der sphärische Abstand zwischen zwei Punkten  $p, q \in \Delta$  ist kleiner oder gleich  $\frac{\pi}{2}$ . Deswegen ist  $\mathrm{dist}_{\mathrm{ell}}([p], [q]) = \mathrm{dist}(p, q)$ .  $\square$

### 3.3 Gnomonische Projektion

Sei

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{S}^n \mid x_0 = 0\}$$

der "Äquator" der  $n$ -Sphäre. Sei

$$A = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 = 1\}$$

die zu  $\mathbb{S}^n$  am Punkt  $(1, 0, \dots, 0)$  tangentielle Hyperebene.

**Definition 5.25.** Die gnomonische Projektion

$$\pi: \mathbb{S}^n \setminus \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow A$$

ist die Zentralprojektion mit Zentrum  $0$ .

Man erkennt in der gnomonischen Projektion eine affine Karte von  $\mathbb{R}P^n$ . Jedes Antipodenpaar  $\{p, -p\} \subset \mathbb{S}^n \setminus \mathbb{S}^{n-1}$  wird auf denselben Punkt in  $A$  abgebildet, die Antipodenpaare  $\{p, -p\} \subset \mathbb{S}^{n-1}$  entsprechen den unendlich fernen Punkten.

In Formeln sieht die gnomonische Projektion und ihre Inverse wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \pi(x_0, x_1, \dots, x_n) &= \left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \\ \pi^{-1}(1, \bar{x}) &= \left(\frac{1}{1 + \|\bar{x}\|^2}, \frac{\bar{x}}{1 + \|\bar{x}\|^2}\right) \end{aligned}$$

**Proposition 5.26.** Die gnomonische Projektion bildet Geodäten der elliptischen Geometrie auf Geraden in  $H$ .

*Beweis.* Geodäten entsprechen den Großkreisen auf  $\mathbb{S}^n$ , und die Zentralprojektion eines Kreises von seinem Mittelpunkt aus ist eine Gerade.  $\square$

Die gnomonische Projektion verzerrt die Längen und die Winkel. Der elliptische Abstand zwischen zwei Punkten  $p, q \in H$  ist gleich

$$\text{dist}_{ell}(p, q) = \begin{cases} \angle p0q, & \text{falls } \angle p0q \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - \angle p0q, & \text{falls } \angle p0q > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

In manchen Fällen können wir aber die Abstand- und Winkelverzerrung kontrollieren. Zum Beispiel,

$$\text{dist}_{ell}(e_0, p) = \arctan \|\bar{p}\|$$

Außerdem bleiben die Winkel zwischen den Geodäten durch den Nordpol erhalten:

$$\angle_{ell} p e_0 q = \angle \pi^{-1}(p) e_0 \pi^{-1}(q)$$

**Proposition 5.27.** *In jedem sphärischen rechtwinkligen Dreieck mit Hypotenuse  $c$  gilt*

$$\cos \alpha = \frac{\tan b}{\tan c}$$

*Beweis.* Wende eine Orthogonaltransformation an, die die Ecke  $A$  auf den Nordpol  $e_0$  abbildet. Die Projektion  $\pi$  bildet das Dreieck  $ABC$  auf ein Dreieck  $AB'C' \subset H$ . Dabei gilt

$$\alpha' = \alpha, \quad b' = \tan b, \quad c' = \tan c$$

Außerdem ist das Dreieck  $AB'C'$  auch rechtwinklig. Deswegen gilt  $\cos \alpha' = \frac{b'}{c'} = \frac{\tan b}{\tan c}$ .  $\square$

# Kapitel 6

## Hyperbolische Geometrie

### 1 Das Hyperboloid-Modell

#### 1.1 Der Raum und die Gruppe

**Definition 6.1.** Der Minkowski-Raum  $\mathbb{R}^{n,1}$  ist  $\mathbb{R}^{n+1}$  versehen mit der symmetrischen Bilinearform

$$\langle x, y \rangle_{n,1} = -x_0y_0 + x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

Die Bilinearform  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{n,1}$  erzeugt die quadratische Form, die *Minkowski-Norm* genannt wird:

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle_{n,1}$$

Das ist keine Norm im Sinne der Funktionalanalysis, denn  $\|v\|^2$  kann negativ sein (und deswegen werden wir meistens Quadrat der Norm  $\|\cdot\|^2$ , und nicht die Norm selbst benutzen).

**Definition 6.2.** Das Hyperboloid-Modell des hyperbolischen Raumes ist

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n,1} \mid \|x\|_{n,1}^2 = -1, x_0 > 0\}$$

Die Projektion  $\mathbb{R}^{n,1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(1, \bar{x}) \mapsto \bar{x}$  bildet  $\mathbb{H}^n$  bijektiv auf  $\mathbb{R}^n$ , deswegen ist der hyperbolische Raum zu  $\mathbb{R}^n$  homöomorph.

**Beispiel 6.3.** Die hyperbolische Ebene ist die obere Schale des zweischaligen Hyperboloids:

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1, z > 0\}$$

**Definition 6.4.** Die Lorentz-Gruppe ist die Gruppe aller linearen Transformationen, die das Minkowski-Skalarprodukt erhalten:

$$O(n, 1) = \{f \in \text{GL}(n+1) \mid \langle f(v), f(w) \rangle_{n,1} = \langle v, w \rangle_{n,1}\}$$



Direkt aus der Definition folgt, dass jede Transformation  $f \in O(n, 1)$  die Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^{n,1} \mid \|x\|_{n,1}^2 = -1\} = \mathbb{H}^n \cup -\mathbb{H}^n$$

auf sich selbst abbildet. Da  $\mathbb{H}^n$  und  $-\mathbb{H}^n$  zwei Zusammenhangskomponenten der ‘‘Minkowski-Sphäre’’ sind, gilt für jede  $f \in O(n, 1)$

$$\text{entweder } f(\mathbb{H}^n) = \mathbb{H}^n, f(-\mathbb{H}^n) = -\mathbb{H}^n \quad \text{oder } f(\mathbb{H}^n) = -\mathbb{H}^n, f(-\mathbb{H}^n) = \mathbb{H}^n$$

Die Abbildungen mit der ersteren Eigenschaft bilden eine Untergruppe von  $O(n, 1)$ :

$$O_+(n, 1) = \{f \in O(n, 1) \mid f(\mathbb{H}^n) = \mathbb{H}^n\}$$

**Aufgabe 6.5.** *Man zeige*

$$O_+(n, 1) \cong \text{PO}(n, 1) := O(n, 1)/\{E_{n+1}, -E_{n+1}\}$$

Die Gruppe  $O_+(n, 1) \cong \text{PO}(n, 1)$  wird die *positive* oder auch *projektive Lorentz-Gruppe* genannt.

**Proposition 6.6.** *Die projektive Lorentz-Gruppe wirkt auf  $\mathbb{H}^n$  treu und transitiv.*

*Beweis.* Wenn ein Element  $f \in O_+(n, 1)$  auf  $\mathbb{H}^n$  trivial wirkt, dann gilt  $f(v) = v$  für alle  $v \in \mathbb{H}^n$ . Wählt man linear unabhängige Vektoren  $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{H}^n$ , dann bilden sie eine Basis von  $\mathbb{R}^{n+1}$ , und deswegen folgt aus  $f(v_i) = v_i$  dass  $f(w) = w$  für alle  $w \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

Für die Transitivität genügt es zu zeigen, dass es für jedes  $v \in \mathbb{H}^n$  ein  $f \in O_+(n, 1)$  mit  $f(v) = e_0$  gibt. Dafür reicht es, eine Basis  $(v_0, v_1, \dots, v_n)$  von  $\mathbb{R}^{n+1}$  zu finden mit

$$v_0 = v, \quad \|v_i\|^2 = 1 \quad \forall i \geq 1, \quad \langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$$

Das Orthogonalkomplement

$$v^\perp = \{w \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v, w \rangle_{n,1} = 0\}$$

ist ein  $n$ -dimensionaler Untervektorraum von  $\mathbb{R}^{n+1}$ , und  $v \notin v^\perp$ . Die Einschränkung von  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{n,1}$  auf  $v^\perp$  ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform (nach dem Sylvesterschen Trägheitsgesetz). Deswegen gibt es eine Orthonormalbasis  $(v_1, \dots, v_n)$  von  $v^\perp$  bezüglich  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{n,1}$ .  $\square$

## 1.2 Abstandmessung in der hyperbolischen Geometrie

Analog zu der sphärischen Geometrie (siehe Abschnitt 1.1) wollen wir eine Metrik auf  $\mathbb{H}^n$  einführen, die unter der Wirkung der projektiven Lorentz-Gruppe erhalten bleibt.

**Definition 6.7.** *Der hyperbolische Abstand zwischen  $A, B \in \mathbb{H}^n$  wird definiert als*

$$\text{dist}(A, B) = \text{arcosh}(-\langle A, B \rangle_{n,1}) \tag{6.1}$$

**Aufgabe 6.8.** Man zeige, dass  $\operatorname{arcosh}(-\langle A, B \rangle_{n,1})$  definiert ist, d. h.  $\langle A, B \rangle_{n,1} \leq -1$  für alle  $A, B \in \mathbb{H}^n$  gilt.

Die (6.1) sieht ansprechend aus, da sie anstelle vom  $\arccos$  in (5.2) den  $\operatorname{arcosh}$  benutzt, und der Kosinus soll ja zum Kosinus hyperbolicus werden, wenn wir von der Sphäre zum Hyperboloid wechseln.

Dass der in (6.1) definierte Abstand die Dreiecksungleichung erfüllt, werden wir später beweisen.

**Satz 6.9.** Die Schnitte von  $\mathbb{H}^n$  mit zweidimensionalen Untervektorräumen von  $\mathbb{R}^{n+1}$  sind Geodäten der Metrik (6.1).

*Beweis.* Seien  $v_0, v_1 \in \mathbb{H}^n$ . OBdA können wir annehmen, dass  $\operatorname{span}\{v_0, v_1\} = \operatorname{span}\{e_0, e_1\}$  ist. Der Schnitt von  $\mathbb{H}^n$  mit der Ebene durch  $e_0, e_1$  ist der obere Zweig der Hyperbel

$$-x_0^2 + x_1^2 = -1$$

Diese Kurve besitzt die Parametrisierung

$$p_t = \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix}$$

(siehe Abschnitt 3.1). Es gilt

$$\langle p_t, p_s \rangle_{n,1} = -\cosh t \cosh s + \sinh t \sinh s = -\cosh(t - s)$$

Deswegen  $\operatorname{arcosh}(-\langle p_t, p_s \rangle_{n,1}) = |t - s|$ . Daraus folgt für  $r < s < t$

$$\operatorname{dist}(p_r, p_s) + \operatorname{dist}(p_s, p_t) = \operatorname{dist}(p_r, p_t),$$

und der Satz ist bewiesen. □

### 1.3 Das Cayley-Klein-Modell

Sei  $A = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 = 1\}$ . Die Zentralprojektion auf  $A$  mit Zentrum 0

$$\pi(x) = \frac{x}{x_0}$$

bildet  $\mathbb{H}^n$  bijektiv auf die Einheitskugel in  $A$  mit Zentrum in  $e_0$ .

**Definition 6.10.** Das Cayley-Klein-Modell des hyperbolischen Raums ist die offene Einheitskugel

$$\mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$$

identifiziert mit  $\mathbb{H}^n$  durch  $x \mapsto \pi^{-1}(1, x)$ , wobei  $\pi$  die Zentralprojektion mit Zentrum 0 ist.

Vergleiche das mit der gnomonischen Projektion der Sphäre, Abschnitt 3.3.

**Proposition 6.11.** *Schnitte von  $\mathbb{B}^n$  mit Geraden sind Geodäten des hyperbolischen Raums im Cayley-Klein-Modell.*

*Beweis.* Nach dem Satz 6.9 sind die Schnitte von  $\mathbb{H}^n$  mit zweidimensionalen Untervektorräumen Geodäten von  $\mathbb{H}^n$ . Ein zweidimensionaler Untervektorraum schneidet  $A$  entlang einer Geraden. Deswegen ist das Bild einer Geodäten ein Schnitt dieser Geraden mit  $\mathbb{B}^n$ .  $\square$

Beachte, dass der Lichtkegel im Cayley-Klein-Modell zur Randsphäre  $\mathbb{S}^{n-1}$  der Kugel  $\mathbb{B}^n$  wird. Die projektive Lorentz-Gruppe  $\text{PO}(n, 1)$  bildet die Lichtkegel auf sich selbst, deswegen gilt Folgendes.

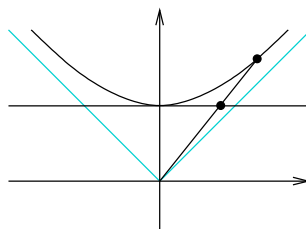
**Proposition 6.12.** *Isometrien des hyperbolischen Raums im Cayley-Klein-Modell sind projektive Transformationen, die die Sphäre  $\mathbb{S}^{n-1}$  auf sich selbst abbilden.*

(Es soll hierzu noch bemerkt werden, dass eine projektive Transformation, die die Sphäre invariant lässt, lässt auch das Innere der Sphäre invariant.)

Für zwei Punkte  $p, q \in \mathbb{B}^n$ , was ist der Abstand  $\text{dist}(p, q)$  bezüglich der hyperbolischen Metrik? Zunächst beantworten wir diese Frage in einem wichtigen Spezialfall.

**Proposition 6.13.** *Der hyperbolische Abstand eines Punktes  $p \in \mathbb{B}^n$  vom Zentrum der Kugel ist gleich*

$$\text{dist}(0, p) = \text{artanh } \|p\|_{\text{eucl}}$$



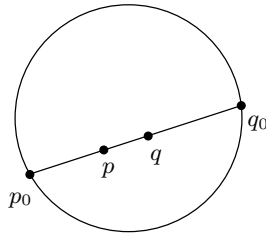
*Beweis.* OBdA  $e_0 + p = \pi(e_0 \cosh t + e_1 \sinh t)$ . Dann ist  $p = e_1 \tanh t$ . Andererseits  $t = \text{dist}(e_0, \pi^{-1}(e_0 + p)) = \text{dist}(0, p)$ , und die Behauptung folgt.  $\square$

Vergleiche das mit dem sphärischen Abstand vom Nordpol in der gnomonischen Projektion. Beachte auch, dass der hyperbolische Tangens auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert ist und  $-1 < \tanh x < 1$ .

**Proposition 6.14.** *Der Abstand zwischen zwei Punkten  $p, q \in \mathbb{B}^n$  im Cayley-Klein-Modell des hyperbolischen Raums ist gleich*

$$\text{dist}(p, q) = -\frac{1}{2} \log DV(p_0, q_0; p, q) \tag{6.2}$$

wobei  $p_0, q_0 \in \partial\mathbb{B}^n$  die Schnittpunkte der Geraden  $pq$  mit der Randsphäre sind,  $p$  liegt zwischen  $p_0$  und  $q$ .



*Beweis der Proposition 6.14.* Da das Doppelverhältnis projektiv invariant ist, gilt für jedes  $f \in \text{PO}(n, 1)$

$$\text{DV}(f(p_0), f(q_0); f(p), f(q)) = \text{DV}(p_0, q_0; p, q)$$

Da die Randsphäre bezüglich  $f$  invariant ist, gilt  $f(p_0), f(q_0) \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Es genügt deswegen, die Formel (6.2) für eine spezielle Lage von Punkten  $p$  und  $q$  zu beweisen.

Man nehme eine Lorentz-Transformation, die die Urbilder der Punkte  $p$  und  $q$  auf dem Hyperboloid auf die Punkte  $e_0$  und  $e_0 \cosh t + e_1 \sinh t$  abbildet, mit  $t > 0$ . Dann ist  $t = \text{dist}(p, q)$ . Im Cayley-Klein-Modell liegen die Bilder auf der  $x_1$ -Achse und haben dort die Koordinaten

$$f(p_0) = -1, \quad f(q_0) = 1, \quad f(p) = 0, \quad f(q) = \tanh t$$

Nun berechnen wir

$$\text{DV}(-1, 1; 0, \tanh t) = \frac{-1}{1} \frac{1 - \tanh t}{-1 - \tanh t} = \frac{1 - \tanh t}{1 + \tanh t} = \frac{\cosh t - \sinh t}{\cosh t + \sinh t} = \frac{e^{-t}}{e^t} = e^{-2t}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Wegen  $\text{DV}(q_0, p_0; p, q) = \frac{1}{\text{DV}(p_0, q_0; p, q)}$  kann man die Formel (6.2), ohne die Reihenfolge der Punkte  $p$  und  $q$  auf dem Intervall  $p_0 q_0$  zu spezifizieren, wie folgt schreiben:

$$\text{dist}(p, q) = \frac{1}{2} |\log \text{DV}(p_0, q_0; p, q)|$$

Die Formel

$$\text{DV}(p_1, p_2; q_1, q_2) \cdot \text{DV}(p_1, p_2; q_2, q_3) \cdot \text{DV}(p_1, p_2; q_3, q_1) = 1$$

aus der Hausaufgabe 49 ist äquivalent zur Tatsache, dass die Sehnen von  $\mathbb{B}^n$  Geodäten der hyperbolischen Metrik sind.

## 1.4 Lorentz-Matrizen

**Definition 6.15.** Eine Basis  $(v_0, v_1, \dots, v_n)$  von  $\mathbb{R}^{n+1}$  heißt Lorentz-orthonormal, wenn

$$\|v_0\|_{n,1}^2 = -1, \quad \|v_i\|_{n,1}^2 = 1, \quad \langle v_i, v_j \rangle_{n,1} = 0 \text{ für } i \neq j$$

Die Standardbasis  $e_0, e_1, \dots, e_n$  ist Lorentz-orthonormal.

Beachte, dass die Koordinaten bezüglich einer Lorentz-Orthonormalbasis wie folgt berechnet werden:

$$x = x_0 v_0 + \dots + x_n v_n \Leftrightarrow x_0 = -\langle x, v_0 \rangle_{n,1}, \quad x_i = \langle x, v_i \rangle_{n,1} \text{ für } i \geq 1$$

Der folgende Satz ist dem Satz 2.70 über orthogonale Abbildungen ähnlich.

**Satz 6.16.** *Eine lineare Abbildung  $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  ist genau dann Element von  $O(n, 1)$ , wenn eine der folgenden äquivalenten Aussagen gilt:*

1.  $f$  bildet jede Lorentz-Orthonormalbasis auf Lorentz-Orthonormalbasis;
2.  $f$  bildet die Standardbasis auf eine Lorentz-Orthonormalbasis;
3. die Spalten der die Abbildung  $f$  darstellenden (bzgl. der Standardbasis) Matrix  $M$  bilden eine Lorentz-Orthonormalbasis;
4.  $M^\top J M = J$ , wobei  $J$  die folgende Diagonalmatrix ist:

$$J = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$$

5. die Zeilen von  $M$  bilden eine Lorentz-Orthonormalbasis.

*Beweis.* Dass  $f \in O(n, 1) \Rightarrow 1.$ , folgt direkt aus der Definition von  $O(n, 1)$ .

1.  $\Rightarrow$  2. ist trivial.

2.  $\Rightarrow$  3. weil die Spalten der Matrix  $M$  die Bilder der Standardbasisvektoren sind.

Für 3.  $\Leftrightarrow$  4. bemerke

$$\langle v, w \rangle_{n,1} = v^\top J w \tag{6.3}$$

Wegen  $J^{-1} = J$  gilt

$$M^\top J M = J \Leftrightarrow M^{-1} = J M^\top J \Leftrightarrow M J M^\top J = E_{n+1} \Leftrightarrow M J M^\top = J$$

Deswegen 4.  $\Leftrightarrow$  5.

Schließlich, 3. impliziert  $M \in O(n, 1)$  wegen (6.3). □

Erinnerung: die Gruppe

$$\text{PO}(n, 1) = O(n, 1) / \{\pm E_{n+1}\} \cong O_+(n, 1) = \{f \in O(n, 1) \mid f(\mathbb{H}^n) = \mathbb{H}^n\}$$

wirkt auf  $\mathbb{H}^n$  isometrisch. Es kann gezeigt werden (vgl. Satz 2.74), dass jede Isometrie des hyperbolischen Raums einem linearen Isomorphismus  $f \in \text{PO}(n, 1)$  entspricht. Ab jetzt nennen wir  $\text{PO}(n, 1)$  *Isometriegruppe* des hyperbolischen Raums.

**Proposition 6.17.** *Für  $M = (a_{ij})_{i,j=0}^n \in O(n, 1)$  gilt  $M \in \text{PO}(n, 1)$  genau dann, wenn  $a_{00} > 0$ .*

*Beweis.* Die Zahl  $a_{00}$  ist die  $x_0$ -Koordinate von  $Me_0$ . Da  $M \in \text{PO}(n, 1) \Leftrightarrow Me_0 \in \mathbb{H}^n$ , liegt  $M$  in  $\text{PO}(n, 1)$  genau dann, wenn  $a_{00} > 0$ .  $\square$

Aus  $M^\top JM = J$  folgt  $(\det M)^2 = 1$ , sodass  $\det M = \pm 1$  für  $M \in \text{PO}(n, 1)$ . Das führt zu der Unterscheidung zwischen orientierungserhaltenden Isometrien

$$\text{PSO}(n, 1) = \{M \in \text{PO}(n, 1) \mid \det M = 1\}$$

und orientierungsumkehrenden.

**Beispiel 6.18.** Die Matrix  $\text{diag}(1, -1, 1)$  stellt eine orientierungsumkehrende Isometrie der hyperbolischen Ebene  $\mathbb{H}^2$  dar. Diese Isometrie kann man als Spiegelung an der Geraden  $x_1 = 0$  bezeichnen.

Eine Klassifikation der Isometrien der hyperbolischen Ebene wird später gegeben.

## 1.5 Untervektorräume vom Minkowski-Raum

Ein Vektor  $v \in \mathbb{R}^{n,1}$  heißt

- *raumartig*, wenn  $\|v\|_{n,1}^2 > 0$ ;
- *lichtartig*, wenn  $\|v\|_{n,1}^2 = 0$ ;
- *zeitartig*, wenn  $\|v\|_{n,1}^2 < 0$ .

**Definition 6.19.** Ein  $(k+1)$ -dimensionaler Untervektorraum  $U \subset \mathbb{R}^{n,1}$  heißt

- *raumartig*, wenn die symmetrische Bilinearform  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{n,1}$  auf  $U$  positiv definit ist;
- *lichtartig*, wenn die symmetrische Bilinearform  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{n,1}$  auf  $U$  ausgeartet ist;
- *zeitartig*, wenn die Einschränkung von  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{n,1}$  auf  $U$  Signatur  $(k, 1)$  hat.

Mit  $U^\perp$  bezeichnen wir das Lorentz-Orthogonalkomplement zu  $U$ . Beachte, dass

$$\dim U^\perp = n + 1 - \dim U$$

unabhängig davon, ob  $U$  raum-, zeit- oder lichtartig ist.

**Proposition 6.20.** Ist  $U \subset \mathbb{R}^{n,1}$  raum- oder zeitartig, so gilt  $\mathbb{R}^{n,1} = U \oplus U^\perp$ . Außerdem ist  $U^\perp$  zeitartig, wenn  $U$  raumartig ist, und umgekehrt.

*Beweis.* Es gilt  $U \cap U^\perp = \{0\}$  genau dann, wenn die Einschränkung der Bilinearform auf  $U$  nicht ausgeartet ist. Das ist der Fall, wenn  $U$  raum- oder zeitartig ist.

Ist  $U$  raum- bzw. zeitartig, so ist  $U^\perp$  zeit- bzw. raumartig nach dem Trägheitssatz von Sylvester, da das Minkowski-Skalarprodukt einen einzigen negativen Eigenwert hat.  $\square$

**Proposition 6.21** (Cauchy-Schwarz-Ungleichungen in  $\mathbb{R}^{n,1}$ ). Seien  $v, w \in \mathbb{R}^{n,1}$ .

1. Ist  $\text{span}\{v, w\}$  raumartig, so gilt

$$\|v\|_{n,1}^2 \|w\|_{n,1}^2 \geq \langle v, w \rangle_{n,1}$$

mit Gleichung genau dann, wenn  $v$  und  $w$  kollinear sind.

2. Ist  $\text{span}\{v, w\}$  lichtartig, so gilt

$$\|v\|_{n,1}^2 \|w\|_{n,1}^2 = \langle v, w \rangle_{n,1}$$

3. Ist  $\text{span}\{v, w\}$  zeitartig, so gilt

$$\|v\|_{n,1}^2 \|w\|_{n,1}^2 \leq \langle v, w \rangle_{n,1}$$

mit Gleichung genau dann, wenn  $v$  und  $w$  kollinear sind.

*Beweis.* Es gilt

$$\|v\|_{n,1}^2 \|w\|_{n,1}^2 - \langle v, w \rangle_{n,1}^2 = \det G(v, w)$$

wobei  $G(v, w)$  die Gram-Matrix von  $v$  und  $w$  bezüglich des Minkowski-Skalarproduktes ist. Sind  $v$  und  $w$  linear abhängig, so gilt  $\det G(v, w) = 0$ . Seien  $v$  und  $w$  linear unabhängig. Dann ist die Signatur der Gram-Matrix gleich der Signatur der Einschränkung des Minkowski-Skalarproduktes auf  $U = \text{span}\{v, w\}$ . Die letztere ist  $(+, +)$ ,  $(+, -)$ , oder  $(+, 0)$ , je nachdem ob  $U$  raumartig, zeitartig, oder lichtartig ist. Dementsprechend ist auch die Determinante positiv, negativ, oder Null.  $\square$

## 1.6 Diederwinkel im hyperbolischen Raum

**Definition 6.22.** Eine Hyperebene in  $\mathbb{H}^n$  ist der Schnitt von  $\mathbb{H}^n$  mit einem zeitartigen Untervektorraum von  $\mathbb{R}^{n,1}$  der Dimension  $n$ .

**Proposition 6.23.** Zwei Hyperebenen  $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{H}^n$  schneiden sich genau dann, wenn der Schnitt  $L_1 \cap L_2$  der zugehörigen Untervektorräume zeitartig ist.

*Beweis.* Es ist  $\ell_i = \mathbb{H}^n \cap L_i$ ,  $i = 1, 2$ . Dann gilt

$$\ell_1 \cap \ell_2 = \mathbb{H}^n \cap (L_1 \cap L_2)$$

Deswegen ist  $\ell_1 \cap \ell_2 \neq \emptyset$  genau dann, wenn  $L_1 \cap L_2$  zeitartig ist.  $\square$

Ist  $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$ , so heißen  $\ell_1$  und  $\ell_2$

- *ultraparallel*, wenn  $L_1 \cap L_2$  raumartig ist;
- *parallel* oder auch *horoparallel*, wenn  $L_1 \cap L_2$  lichtartig ist.

Im Cayley-Klein-Modell von  $\mathbb{H}^2$  schneiden sich parallele Geraden in einem Randpunkt des Kreises  $\mathbb{B}^2$ , und ultraparallele Geraden schneiden sich außerhalb des Kreises (oder sind im affinen Sinne parallel).

Das Äußere des Kreises wird uns auch nutzen.

**Definition 6.24.** Die Menge

$$d\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_{n,1}^2 = 1\}$$

heißt de Sitter-Raum.

Insbesondere ist  $d\mathbb{S}^2$  ein einschaliger Hyperboloid.

Im Cayley-Klein-Modell wird der de Sitter-Raum auf das Komplement von  $\mathbb{B}^n$  projiziert, dabei werden die Antipoden  $x$  und  $-x$  identifiziert.

**Definition 6.25.** Für jeden Punkt  $p \in d\mathbb{S}^n$  heißt die Hyperebene

$$p^\circ := \{q \in \mathbb{H}^n \mid \langle p, q \rangle_{n,1} = 0\} = p^\perp \cap \mathbb{H}^n$$

die Polare von  $p$ .

Beachte, dass der Untervektorraum  $p^\perp$  nach Proposition 6.20 zeitartig ist und deswegen eine Hyperebene definiert.

Umgekehrt, hat jede Hyperebene zwei Pole. Die Pole sind einfach Einheitsnormalen zum entsprechenden (zeitartigen) Untervektorraum.

**Proposition 6.26.** Zwei Hyperebenen schneiden sich genau dann, wenn ihre Pole einen raumartigen Untervektorraum von  $\mathbb{R}^{n,1}$  aufspannen.

*Beweis.* Seien  $L_i = p_i^\perp$ ,  $i = 1, 2$  zwei zeitartige Untervektorräume. Die entsprechenden Hyperebenen in  $\mathbb{H}^n$  schneiden sich genau dann, wenn  $L_1 \cap L_2$  zeitartig ist. Aber wegen

$$(L_1 \cap L_2)^\perp = \text{span}(L_1^\perp \cup L_2^\perp) = \text{span}\{p_1, p_2\}$$

und nach Proposition 6.20 ist  $L_1 \cap L_2$  zeitartig genau dann, wenn  $\text{span}\{p_1, p_2\}$  raumartig ist.  $\square$

Definieren wir den Halbraum mit der *Aussennormalen*  $p$ :

$$p_-^\circ := \{q \in \mathbb{H}^n \mid \langle p, q \rangle_{n,1} \leq 0\}$$

Die Punkte  $p$  und  $-p$  haben dieselbe Polare, sind aber Aussennormalen zu zwei komplementären Halbräumen. Punkte von  $d\mathbb{S}^n$  befinden sich in einer Bijektion zu Halbräumen von  $\mathbb{H}^n$ .

**Definition 6.27.** Seien  $h_1$  und  $h_2$  zwei Halbräume von  $\mathbb{H}^n$ , sodass ihre Randhyperebenen  $\ell_1, \ell_2$  sich schneiden. Der Diederwinkel  $\alpha$  des "Keils"  $h_1 \cap h_2$  wird definiert als

$$\alpha = \pi - \arccos \langle p_1, p_2 \rangle_{n,1}$$

Mit anderen Worten ist  $\arccos \langle p_1, p_2 \rangle_{n,1}$  der Außendiederwinkel.

Beachte, dass  $|\langle p_1, p_2 \rangle_{n,1}| < 1$  wegen der Proposition 6.21.

Der in Definition 6.27 erklärte Winkel ist invariant unter Isometrien von  $\mathbb{H}^n$ . Er ist außerdem "additiv", da die Normalen zu allen Kodimension 1 Untervektorräumen, die einen zeitartigen Kodimension 2 Untervektorraum  $K$  gemeinsam haben, einen Einheitskreis im raumartigen Untervektorraum  $K^\perp$  bilden. Die Winkelmasse kann als Bogenlänge auf diesem Kreis interpretiert werden.



**Beispiel 6.28.** In  $\mathbb{H}^2$ , haben Geodäten durch  $e_0$  Pole in der Ebene  $\text{span}\{e_1, e_2\}$ . Explizit, die Geodäte mit der Gleichung  $ax_1 + bx_2 = 0$ ,  $a^2 + b^2 = 1$ , hat Pole  $(-b, a)$  und  $(b, -a)$ . Das Minkowski-Skalarprodukt in  $\text{span}\{e_1, e_2\}$  ist mit dem euklidischen Skalarprodukt identisch, deswegen ist die Winkelmaß zwischen den Vektoren dieser Ebene die übliche, euklidische Winkelmaß.

Das bedeutet, dass im Cayley-Klein-Modell die hyperbolischen Winkel zwischen den Geraden durch das Zentrum von  $\mathbb{B}^2$  gleich den euklidischen Winkeln zwischen diesen Geraden sind.

## 2 Geometrie der hyperbolischen Dreiecke

### 2.1 Hyperbolische Dreiecke und ihre Dualen

Seien  $A, B, C \in \mathbb{H}^2$  drei nicht-kollineare Punkte in der hyperbolischen Ebene.

**Definition 6.29.** Das zu  $ABC$  duale Dreieck hat drei Punkte  $A', B', C' \in \text{dS}^2$  als Ecken, die durch

$$\begin{aligned} \langle A, B' \rangle_{2,1} = \langle A, C' \rangle_{2,1} = \langle B, A' \rangle_{2,1} = \langle B, C' \rangle_{2,1} = \langle C, A' \rangle_{2,1} = \langle C, B' \rangle_{2,1} = 0 \\ \langle A, A' \rangle_{2,1} < 0, \quad \langle B, B' \rangle_{2,1} < 0, \quad \langle C, C' \rangle_{2,1} < 0 \end{aligned}$$

bestimmt sind.

Die letztere Eigenschaft bedeutet, dass  $A'$  und  $A$  auf verschiedenen Seiten der Ebene  $\text{span}\{B, C\} \subset \mathbb{R}^{2,1}$  liegen. Diese Ebene hat nämlich die Gleichung  $\langle x, A' \rangle_{2,1} = 0$ ; andererseits gilt  $\langle A', A' \rangle_{n,1} = 1$ , und deswegen haben die Punkte auf der anderen Seite einen positiven Skalarprodukt mit  $A'$ .

Ein ähnliches Argument zeigt, dass  $A'$  und  $A$  auf derselben Seite der Ebene  $\text{span}\{B', C'\}$  liegen.

Die Orthogonalkomplemente bezüglich des Minkowski-Skalarproduktes sind Pole und Polaren bezüglich des Lichtkegels. Im Cayley-Klein-Modell wird es zu Polarität bezüglich des Einheitskreises. Das erklärt die Konstruktion des dualen Dreiecks auf Abb. 6.1.

Beachte, dass die Gerade  $A'B'$  den Kreis nicht schneidet, weil ihr Pol  $C$  im Kreis liegt. Das entspricht wiederum der Tatsache, dass das Orthogonalkomplement eines zeitartigen Vektors ein raumartiger Untervektorraum ist.

Auf Abb. 6.1 liegt das Zentrum des Kreises im Inneren des Dreiecks  $ABC$ . Das kann immer durch Anwenden einer Isometrie erreicht werden. Das impliziert auch, dass die Punkte  $A', B', C'$  im Halbraum  $\{x_0 > 0\}$  enthalten sind.

Die "Seitenlängen" des dualen Dreiecks hängen mit den Winkeln des Dreiecks  $ABC$  zusammen:

$$\langle A', B' \rangle_{2,1} = -\cos \gamma, \quad \langle B', C' \rangle_{2,1} = -\cos \alpha, \quad \langle C', A' \rangle_{2,1} = -\cos \beta$$

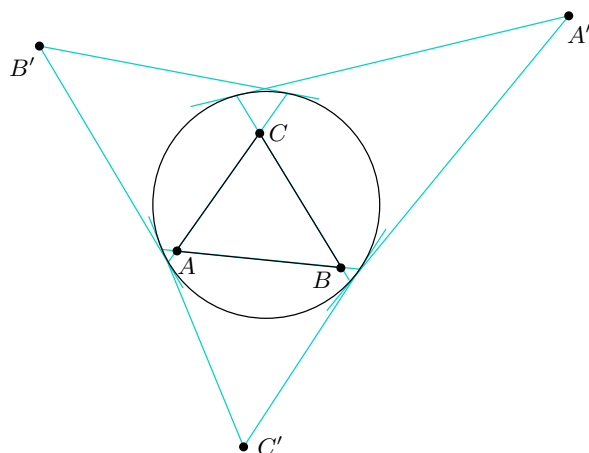


Abbildung 6.1: Ein hyperbolisches Dreieck und sein Duales.

## 2.2 Das Lorentz-Kreuzprodukt

**Definition 6.30.** Für  $v, w \in \mathbb{R}^{2,1}$  setze

$$v \times_L w := \begin{pmatrix} -v_1 w_2 + v_1 w_2 \\ v_2 w_0 - v_0 w_2 \\ v_0 w_1 - v_1 w_0 \end{pmatrix} = J(v \times w)$$

**Proposition 6.31.** Das Lorentz-Kreuzprodukt hat die folgenden Eigenschaften.

1.  $\langle u, v \times_L w \rangle_{2,1} = \det(u, v, w)$
2. Für jede  $f \in \text{PSO}(2,1)$  gilt

$$f(v) \times_L f(w) = f(v \times_L w)$$

3. Sind  $v, w \in \mathbb{H}^2$ , so ist  $v \times_L w$  raumartig, und es gilt

$$\|v \times_L w\|_{2,1} = \sinh \text{dist}(v, w) \tag{6.4}$$

4. Sind  $v, w \in \text{dS}^2$  mit  $\text{span}\{v, w\}$  raumartig, so ist  $v \times_L w$  zeitartig, und es gilt

$$\|v \times_L w\|_{2,1}^2 = -\sin^2 \varphi, \tag{6.5}$$

wobei  $\varphi$  der Winkel zwischen  $v$  und  $w$  ist.

*Beweis.* Punkt 1. folgt aus

$$\langle u, v \times_L w \rangle_{2,1} = u^\top J(v \times_L w) = u^\top J J(v \times w) = \langle u, v \times w \rangle = \det(u, v, w)$$

Für Punkt 2. vergleiche die Koordinaten beider Seiten bezüglich der Lorentz-Orthogonalbasis  $(f(e_0), f(e_1), f(e_2))$ :

$$\begin{aligned}\langle f(e_i), f(v) \times_L f(w) \rangle_{2,1} &= \det(f(e_i), f(v), f(w)) = \det(e_i, v, w) \\ \langle f(e_i), f(v \times_L w) \rangle_{2,1} &= \langle e_i, v \times_L w \rangle_{2,1} = \det(e_i, v, w)\end{aligned}$$

Aus 1. folgt  $\langle v, v \times_L w \rangle_{2,1} = 0$ . Deswegen ist  $v \times_L w$  raumartig, wenn mindestens einer von  $v, w$  zeitartig ist, und zeitartig, wenn  $\text{span}\{v, w\}$  raumartig ist.

Sind  $v$  und  $w$  zeitartig, wenden wir eine hyperbolische Isometrie  $f$  an, sodass  $f(v) = e_0$  und  $f(w) = e_0 \cosh t + e_1 \sinh t$ . Dann gilt

$$f(v \times_L w) = f(v) \times_L f(w) = \sinh t (e_0 \times_L e_1) = e_2 \sinh t$$

und deswegen  $\|v \times_L w\|_{2,1} = |\sinh t| = \sinh |t| = \sinh \text{dist}(v, w)$ .

Analog, wenn  $\text{span}\{v, w\}$  raumartig ist, dann wenden wir eine Isometrie  $f$  an, für welche  $f(v) = e_1$  und  $f(w) = e_1 \cos \varphi + e_2 \sin \varphi$  ist, und führen ein ähnliches Argument durch. Alternativ, kann in diesem Fall das übliche Kreuzprodukt benutzt werden:

$$\|v \times_L w\| = \|v \times w\| = \sin \varphi$$

□

**Bemerkung 6.32.** Sowohl die Formel  $\|v \times w\| = \|v\| \|w\| \sin \varphi$  für das euklidische Kreuzprodukt als auch die oben bewiesenen Formeln für den Betrag des Lorentz-Kreuzprodukts kann man aus den Identitäten

$$\begin{aligned}\|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2 &= \|v \times w\|^2 \\ \|v\|_{2,1}^2 \|w\|_{2,1}^2 - \langle v, w \rangle_{2,1}^2 &= -\|v \times w\|_{2,1}^2\end{aligned}$$

Das sind die algebraischen Identitäten

$$\begin{aligned}(v_0^2 + v_1^2 + v_2^2)(w_0^2 + w_1^2 + w_2^2) - (v_0 w_0 + v_1 w_1 + v_2 w_2)^2 \\ = (v_1 w_2 - v_2 w_1)^2 + (v_2 w_0 - v_0 w_2)^2 + (v_0 w_1 - v_1 w_0)^2\end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}(-v_0^2 + v_1^2 + v_2^2)(-w_0^2 + w_1^2 + w_2^2) - (-v_0 w_0 + v_1 w_1 + v_2 w_2)^2 \\ = (v_1 w_2 - v_2 w_1)^2 - (v_2 w_0 - v_0 w_2)^2 - (v_0 w_1 - v_1 w_0)^2\end{aligned}$$

**Proposition 6.33.** *Ist  $ABC$  ein hyperbolisches Dreieck mit  $\det(A B C) > 0$ , so gilt für sein duales de Sitter Dreieck*

$$\begin{aligned}A' &= -\frac{B \times_L C}{\|B \times_L C\|}, & B' &= -\frac{C \times_L A}{\|C \times_L A\|}, & C' &= -\frac{A \times_L B}{\|A \times_L B\|} \\ A &= -\frac{B' \times_L C'}{\|B' \times_L C'\|}, & B &= -\frac{C' \times_L A'}{\|C' \times_L A'\|}, & C &= -\frac{A' \times_L B'}{\|A' \times_L B'\|}\end{aligned}$$

Für zeitartige Vektoren wird hier  $\|v\| = \sqrt{-\langle v, v \rangle_{n,1}}$  gesetzt.

*Beweis.* Der Vektor  $B \times_L C$  ist orthogonal zu  $B$  und  $C$  nach Punkt 1. der Proposition 6.31. Deswegen gilt  $A' = \pm \frac{B \times_L C}{\|B \times_L C\|}$ . Die Wahl des Vorzeichens in der ersten Formel folgt aus  $\langle A, A' \rangle_{2,1} < 0$ .

Die anderen Formeln werden analog bewiesen.  $\square$

## 2.3 Sinus- und Kosinussätze für hyperbolische Dreiecke

**Satz 6.34** (Sinussatz für hyperbolische Dreiecke). *In jedem hyperbolischen Dreieck  $ABC$  gilt*

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}$$

*Beweis.* Es gilt

$$\langle A, A' \rangle_{2,1} = -\frac{\langle A, B \times_L C \rangle_{2,1}}{\|B \times_L C\|} = -\frac{\det(A, B, C)}{\sinh a} \quad (6.6)$$

und andererseits

$$\langle A, A' \rangle_{2,1} = -\frac{\langle A', B' \times_L C' \rangle_{2,1}}{\|B' \times_L C'\|} = -\frac{\det(A', B', C')}{\sin \alpha}$$

Folglich

$$\frac{\det(A, B, C)}{\sinh a} = \frac{\det(A', B', C')}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\det(A, B, C)}{\det(A', B', C')}$$

Analog wird gezeigt

$$\frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\det(A, B, C)}{\det(A', B', C')} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}$$

und der Satz folgt.  $\square$

**Satz 6.35** (Kosinussätze für hyperbolische Dreiecke). *In jedem hyperbolischen Dreieck  $ABC$  gilt*

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma \quad (6.7)$$

und

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cosh c$$

*Beweis.* Betrachten wir  $3 \times 3$ -Matrizen

$$V = (A \ B \ C), \quad W = (A' \ B' \ C')$$

und die entsprechenden Gram-Matrizen

$$G := V^T J V = \begin{pmatrix} -1 & -\cosh c & -\cosh b \\ -\cosh c & -1 & -\cosh a \\ -\cosh b & -\cosh a & -1 \end{pmatrix}$$

$$G' := W^T J W = \begin{pmatrix} 1 & -\cos \gamma & -\cos \beta \\ -\cos \gamma & 1 & -\cos \alpha \\ -\cos \beta & -\cos \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrizen  $V$  und  $W$  sind “fast” invers zueinander:

$$V^\top JW = \begin{pmatrix} \langle A, A' \rangle_{2,1} & 0 & 0 \\ 0 & \langle B, B' \rangle_{2,1} & 0 \\ 0 & 0 & \langle C, C' \rangle_{2,1} \end{pmatrix} =: D$$

Daraus folgt  $W = J(V^\top)^{-1}D$  sowie  $W^\top = DV^{-1}J$ , also

$$G' = (DV^{-1}J)J(J(V^\top)^{-1}D) = D(V^{-1}J(V^\top)^{-1})D = DG^{-1}D \quad (6.8)$$

Um die Einträge in den Matrizen  $G'$  und  $DG^{-1}D$  zu vergleichen, berechnen wir

$$G^{-1} = \frac{1}{\det G} \begin{pmatrix} -\sinh^2 a & -\cosh c + \cosh a \cosh b & -\cosh b + \cosh a \cosh c \\ -\cosh c + \cosh a \cosh b & -\sinh^2 b & -\cosh a + \cosh b \cosh c \\ -\cosh b + \cosh a \cosh c & -\cosh a + \cosh b \cosh c & -\sinh^2 c \end{pmatrix}$$

Dann folgt aus  $\det G = -(\det V)^2$  und aus (6.6) und (6.8)

$$-\cos \gamma = \frac{\cosh c - \cosh a \cosh b}{\sinh a \sinh b}$$

und daraus der erste Kosinussatz.

Der zweite Kosinussatz folgt analog aus  $G = D(G')^{-1}D$ .  $\square$

Der hyperbolische Kosinussatz kann als der Kosinussatz auf der Sphäre vom imaginären Radius  $\sqrt{-1}$  interpretiert werden. Und zwar, wird in die Formel (5.10)  $\kappa = -1$  eingesetzt, so verwandelt sie sich in (6.7) unter Berücksichtigung von

$$\cos ix = \cosh x, \quad \sin ix = i \sinh x$$

Das deutet darauf hin, dass der hyperbolische Raum Krümmung  $-1$  haben soll. Ein weiteres Indiz dafür ist die Formel für die Fläche eines Dreiecks. Auf der Sphäre vom Radius  $R$  lautet sie nämlich

$$\text{Area}_R^S(\alpha, \beta, \gamma) = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

Wird  $\mathbb{H}^2$  wie oben als Sphäre vom Radius  $\sqrt{-1}$  interpretiert, so soll die Fläche eines hyperbolischen Dreiecks nach

$$\text{Area}^H(\alpha, \beta, \gamma) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$$

berechnet werden. Das ist in der Tat der Fall, wie wir später beweisen werden.

Diese Überlegungen stellen keine mathematische Aussagen dar, da wir weder die Sphäre vom Radius  $\sqrt{-1}$  noch den allgemeinen Begriff der Krümmung definiert haben.

## 2.4 Rechtwinklige Dreiecke

**Proposition 6.36.** *In einem rechtwinkligen hyperbolischen Dreieck mit  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  gilt:*

1.  $\cosh c = \cosh a \cosh b$
2.  $\cosh c = \cot \alpha \cot \beta$
3.  $\sinh a = \sinh c \sin \alpha$
4.  $\cos \alpha = \sin \beta \cosh a$
5.  $\cos \alpha = \frac{\tanh b}{\tanh c}$

*Beweis.* Die ersten vier folgen aus dem Sinussatz und den beiden Kosinussätzen.

Für die fünfte Gleichung wende eine hyperbolische Isometrie an, sodass die Ecke  $A$  im Zentrum des Cayley-Klein-Modells liegt. Dann ist das Dreieck  $ABC$  auch bezüglich der euklidischen Metrik rechtwinklig, und hat  $\alpha_{eucl} = \alpha$ . Was die euklidischen Seitenlängen angeht, haben wir wegen Proposition 6.13

$$b_{eucl} = \tanh b, \quad c_{eucl} = \tanh c$$

Daraus folgt die Formel. □

**Proposition 6.37.** *Sei  $p$  ein Punkt im Abstand  $b$  von einer Geraden  $\ell$ . Eine durch  $p$  gehende und Winkel  $\alpha$  mit dem Lot von  $p$  auf  $\ell$  bildende Gerade*

- *schneidet  $\ell$ , wenn  $\alpha < \arccos \tanh b$ ;*
- *ist zu  $\ell$  parallel, wenn  $\alpha = \arccos \tanh b$ ;*
- *ist zu  $\ell$  ultraparallel, wenn  $\alpha > \arccos \tanh b$ .*

*Beweis.* Aufgabe. □

Der Winkel  $\arccos \tanh b$  heißt der *Parallelitätswinkel*. Beachte, dass

$$\alpha = \arccos \tanh b \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{e^{2b} - 1}{e^{2b} + 1} \Leftrightarrow e^{2b} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \Leftrightarrow e^b = \cot \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow b = \log \cot \frac{\alpha}{2}$$

## 2.5 Der Abstand von Punkt zu Gerade und zwischen zwei Geraden

Erinnerung: das Cayley-Klein-Modell ist die offene Kreisscheibe  $\mathbb{B}^2 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}P^2$ , auf welche das Hyperboloid  $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1$  mittels gnomonischer Projektion (Zentralprojektion) projiziert wurde. Der de Sitter-Raum wird auf das Äußere der Kreisscheibe projiziert.

Polarität bezüglich der Quadrik  $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$  ist die Orthogonalität bezüglich des Minkowski-Skalarproduktes. Gleichzeitig ist die Polarität bezüglich der projektiven Quadrik  $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$  eine Erweiterung der Polarität bezüglich des Einheitskreises  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ , siehe Abschnitt 3.5. Deshalb können wir geometrische Interpretation der Polarität (Abb. 3.14) benutzen.

**Lemma 6.38.** *Zwei Geraden  $\ell, m$  schneiden sich orthogonal genau dann, wenn  $\ell^\circ \in m$ .*

*Beweis.* Nach der Definition 6.27,  $\ell \perp m \Leftrightarrow \langle \ell^\circ, m^\circ \rangle_{2,1} = 0$ . Andererseits

$$\ell^\circ \in m \Leftrightarrow \langle \ell^\circ, m^\circ \rangle_{2,1} = 0 \Leftrightarrow m^\circ \in \ell$$

□

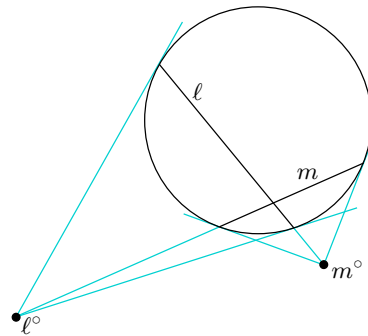


Abbildung 6.2: Orthogonale Geraden im Cayley-Klein-Modell.

**Proposition 6.39.** 1. *Sei  $\ell$  eine Gerade in  $\mathbb{H}^2$ , und  $p \in \mathbb{H}^2$  ein Punkt nicht auf  $\ell$ . Dann existiert genau ein Punkt  $q \in \ell$ , sodass  $pq$  orthogonal zu  $\ell$  ist. Außerdem minimiert  $\text{dist}(p, q)$  den Abstand von  $p$  zu den Punkten von  $\ell$ , und es gilt*

$$\sinh \text{dist}(p, q) = |\langle p, \ell^\circ \rangle_{n,1}|$$

wobei  $\ell^\circ \in \text{dS}^n$  einer der Pole der Geraden  $\ell$  ist.

2. *Seien  $\ell_1$  und  $\ell_2$  zwei ultraparallele Geraden in der hyperbolischen Ebene. Dann gibt es genau ein Punktepaar  $q_1 \in \ell_1, q_2 \in \ell_2$ , sodass  $q_1 q_2$  orthogonal sowohl zu  $\ell_1$  als auch zu  $\ell_2$  ist. Außerdem gilt*

$$\text{dist}(q_1, q_2) = \min_{x_i \in \ell_i} \text{dist}(x_1, x_2) \quad (6.9)$$

und

$$\cosh \text{dist}(q_1, q_2) = |\langle \ell_1^\circ, \ell_2^\circ \rangle_{n,1}|$$

wobei  $\ell_1^\circ, \ell_2^\circ \in \text{dS}^n$  beliebige Pole der Geraden  $\ell_1, \ell_2$  sind.

*Beweis.* Nach Lemma 6.38 ist eine Gerade durch  $p$  orthogonal zu  $\ell$  genau dann, wenn sie durch den Punkt  $\ell^\circ$  geht. Für jedes  $p \in \mathbb{B}^2$  schneiden sich die Geraden  $\ell^\circ p$  und  $\ell$  im Inneren von  $\mathbb{B}^2$ . Dieser Schnittpunkt ist der Lotfußpunkt  $q$ , siehe Abb. 6.3, links.

Für jeden anderen Punkt  $q' \in \ell$  gilt  $\text{dist}(p, q') > \text{dist}(p, q)$  weil aus Punkt 1. der Proposition 6.36 folgt  $c > a$  in jedem rechtwinkligen Dreieck.

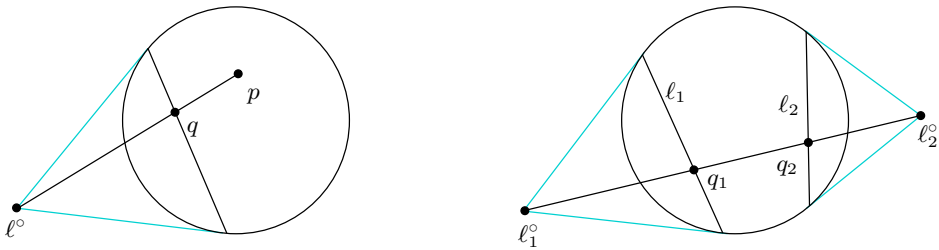


Abbildung 6.3: Lote im Cayley-Klein-Modell.

Mit einer Isometrie kann erreicht werden, dass  $p$  das Zentrum von  $\mathbb{B}^2$  ist, und die Gerade  $\ell$  zu  $x_2$ -Achse parallel ist. Sei

$$q = e_0 \cosh t + e_1 \sinh t, \quad t > 0$$

im Hyperboloid-Modell. Dann hat  $L = \text{span} \ell$  die Gleichung  $x_0 \sinh t - x_1 \cosh t = 0$ , und  $\ell^0 = e_0 \sinh t + e_1 \cosh t$ . Siehe Abb. 6.4. Folglich

$$\langle p, \ell^0 \rangle_{2,1} = \langle e_0, e_0 \sinh t + e_1 \cosh t \rangle_{2,1} = -\sinh t = -\sinh \text{dist}(p, q)$$

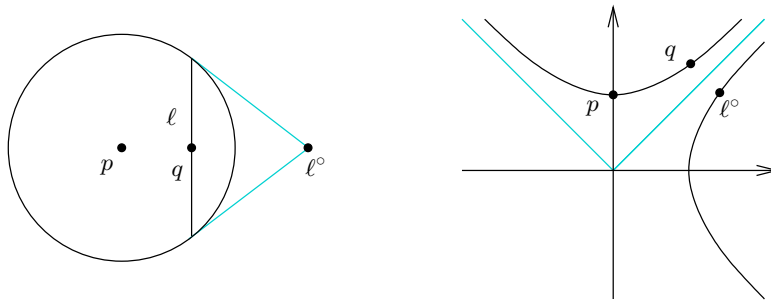


Abbildung 6.4: Berechnung des Abstands Punkt-Gerade.

Die Existenz und Eindeutigkeit eines Lotes zwischen ultraparallelen Geraden folgt aus Abb. 6.3, rechts.

OBdA haben die den  $\ell_1$  und  $\ell_2$  entsprechenden Unterräume von  $\mathbb{R}^{2,1}$  die Gleichungen  $x_1 = 0$  bzw.  $x_0 \sinh t - x_1 \cosh t = 0$ ,  $t > 0$ . Dann entsprechen den Punkten  $q_1$  und  $q_2$  Punkte  $e_0$  und  $e_0 \cosh t + e_1 \sinh t$  auf dem Hyperboloid, sodass  $\text{dist}(q_0, q_1) = t$ . Andererseits  $\ell_1^0 = \pm e_1$  und  $\ell_2^0 = e_0 \sinh t + e_1 \cosh t$ . Siehe Abb. 6.5. Folglich

$$\langle \ell_1^0, \ell_2^0 \rangle_{2,1} = \pm \cosh t = \pm \cosh \text{dist}(q_1, q_2)$$

□

**Aufgabe 6.40.** Man beweise (6.9).



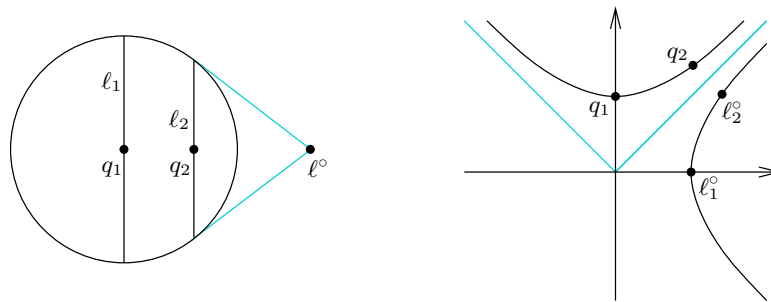


Abbildung 6.5: Berechnung des Abstands zwischen ultraparallelen Geraden.

## 2.6 Ideale und hyperideale Dreiecke

**Definition 6.41.** Ein verallgemeinertes hyperbolisches Dreieck im Cayley-Klein-Modell ist der Schnitt von  $\mathbb{B}^2$  mit einem Dreieck in  $\mathbb{R}^2$ , dessen alle Seiten  $\mathbb{B}^2$  schneiden.

Eine Ecke heißt ideal, wenn sie auf  $\partial\mathbb{B}^2$  liegt, und hyperideal, wenn sie außerhalb von  $\overline{\mathbb{B}^2}$  liegt.

Ein verallgemeinertes Dreieck mit drei idealen Ecken heißt ideal, mit drei hyperidealen Ecken hyperideal.

Nach Abschnitt 2.5 ist die Polare eines Punktes  $r \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\mathbb{B}^2}$  das gemeinsame Lot zu allen durch  $r$  gehenden hyperbolischen Geraden. Werden also hyperideale Ecken eines verallgemeinertes Dreiecks durch ihre Polaren abgeschnitten, entsteht ein Vieleck mit einem oder mehreren Paaren benachbarter rechten Winkeln:

- bei einer hyperidealen Ecke: ein Viereck mit zwei benachbarten rechten Winkeln;
- bei zwei: ein Fünfeck mit vier rechten Winkeln;
- bei drei: ein rechtwinkliges Sechseck.

Siehe Abb. 6.6.

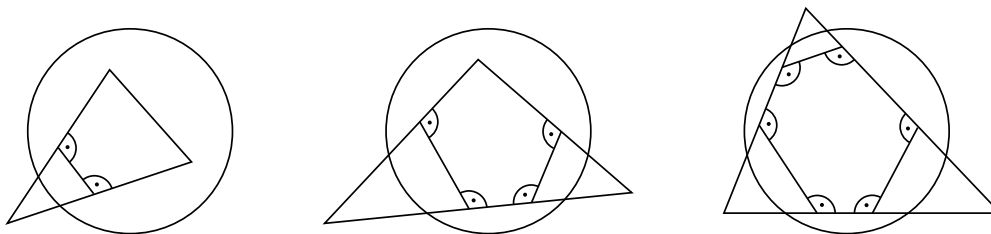


Abbildung 6.6: Dreiecke mit hyperidealen Ecken.

Es ist auch leicht zu sehen, dass jedes Vieleck dieser Art aus einem verallgemeinerten Dreieck entsteht.

**Aufgabe 6.42.** Man zeige, dass Vierecke mit drei rechten Winkeln den Tripeln von Punkten  $A \in \mathbb{H}^2$ ,  $B, C \in \text{dS}^2$  mit  $\langle B, C \rangle_{2,1} = 0$  entsprechen. Die Gerade  $BC$  schneidet in diesem Fall  $\mathbb{H}^2$  nicht.

Für ein Dreieck mit hyperidealen Ecken kann man das duale Dreieck definieren, und dann die Argumente aus den Beweisen der Sinus- und Kosinussätze anwenden. Die Interpretation von Skalarprodukten mit hyperidealen Ecken wird durch Proposition 6.39 gegeben. Und zwar, die Winkelgrößen werden bei hyperidealen Ecken durch die Abstände zwischen den diese Ecke enthaltenden Seiten ersetzt. Siehe Abb. 6.6.

**Proposition 6.43.** Seien  $a, b, c$  die Seitenlängen von paarweise nicht benachbarten Seiten eines rechtwinkligen hyperbolischen Sechsecks, und  $a', b', c'$  die Längen der beziehungsweise gegenüberliegenden Seiten. Dann

$$\frac{\sinh a}{\sinh a'} = \frac{\sinh b}{\sinh b'} = \frac{\sinh c}{\sinh c'}$$

$$\cosh c' = \frac{\cosh a \cosh b + \cosh c}{\sinh a \sinh b}$$

## 2.7 Fläche eines hyperbolischen Vielecks

**Proposition 6.44.** Die Fläche eines hyperbolischen Dreiecks mit zwei idealen Ecken und Winkel  $\alpha$  an der dritten Ecke ist endlich und gleich  $\pi - \alpha$ .

Wir werden die Polarkoordinaten für die Berechnung der Fläche benutzen. Wird die nichtideale Ecke des Dreiecks im Zentrum der Cayley-Klein-Modell platziert, so dass die gegenüberliegende Seite senkrecht ist, so hat diese Seite die Gleichung  $r \cos \varphi = \cos \frac{\alpha}{2}$ . Daher gilt

$$\text{Area}(\Delta_\alpha) = \int_{|\varphi| \leq \frac{\alpha}{2}, r \leq \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \varphi}} \text{darea}$$

Wie sieht nun das Flächenelement  $\text{darea}$  aus? Für die euklidische Metrik ist  $\text{darea}_{\text{eucl}} = r d\varphi dr$ , weil das “unendlich kleine” von den Linien  $r = \text{const}$  und  $\varphi = \text{const}$  Rechteck die Seitenlängen  $dr$  und  $r d\varphi$  hat, siehe Abb. 6.7, links.



Abbildung 6.7: Flächenelemente in Polarkoordinaten in  $\mathbb{E}^2$  und  $\mathbb{H}^2$ .

In  $\mathbb{H}^2$  hat die radiale Seite eines solchen Rechtecks Länge  $dt$  mit  $r = \tanh t$ . Das Längenelement auf dem Kreis ist gleich der Länge des Kreises geteilt durch  $2\pi$ , also nach Proposition 6.45 unten  $\sinh t d\varphi$ .

**Proposition 6.45.** *Der hyperbolische Kreis vom Radius  $t$  hat Länge  $2\pi \sinh t$ .*

*Beweisskizze.* Ein hyperbolischer Kreis vom Radius  $t$  mit Zentrum im Punkt  $e_0$  des Hyperboloidsmodells ist die Lösungsmenge von

$$x_0 = \cosh t, \quad x_1^2 + x_2^2 = \sinh^2 t$$

Die Minkowski-Metrik in einer waagerechten Ebene  $x_0 = \text{const}$  ist euklidisch. Deswegen ist die Länge dieses Kreises gleich der Länge eines euklidischen Kreises vom Radius  $\sinh t$ .  $\square$

*Beweis der Proposition 6.44.* Es gilt also

$$d\text{area} = \sinh t \, d\varphi \, dt = d\varphi \, d \cosh t = d\varphi \, d \left( \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

(weil  $\cosh t = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 t}}$ ). Folglich ist die gesuchte Fläche

$$\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \left( \int_0^{\frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \varphi}} d \left( \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \right) d\varphi = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \varphi}}} - 1 \right) d\varphi = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \varphi}}} - \alpha$$

Ferner

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \varphi}}} &= \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi - \cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \frac{d(\sin \varphi)}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \varphi}} \\ &= \int_{-\sin \frac{\alpha}{2}}^{\sin \frac{\alpha}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - x^2}} = \int_{-\sin \frac{\alpha}{2}}^{\sin \frac{\alpha}{2}} \frac{d \left( \frac{x}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right)}{\sqrt{1-\frac{x^2}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}}} = \int_{-1}^1 1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pi \end{aligned}$$

und die Behauptung folgt.  $\square$

**Proposition 6.46.** *Die Fläche jedes idealen Dreiecks ist gleich  $\pi$ .*

*Beweis.* Man wähle einen Punkt im Inneren des idealen Dreiecks  $\Delta$  und zerlege  $\Delta$  in drei Dreiecke mit jeweils zwei idealen Ecken:

$$\Delta = \Delta_{\alpha_1} \cup \Delta_{\alpha_2} \cup \Delta_{\alpha_3}$$

Da  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi$ , gilt

$$\text{Area}(\Delta) = (\pi - \alpha_1) + (\pi - \alpha_2) + (\pi - \alpha_3) = 3\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \pi$$

$\square$

**Proposition 6.47.** Die Fläche eines hyperbolischen Dreiecks mit Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  ist gleich  $\pi - \alpha - \beta - \gamma$ .

*Beweis.* Verlängere die Seite  $AB$  über den Punkt  $B$  hinaus, die Seite  $BC$  über  $C$ , und die Seite  $AC$  über  $A$ . Die entstehenden drei Punkte auf dem Randkreis bilden ein ideales Dreieck  $\Delta$ . Das Komplement des Dreiecks  $ABC$  in  $\Delta$  besteht aus drei Dreiecken mit je zwei idealen Ecken und Winkeln  $\pi - \alpha, \pi - \beta, \pi - \gamma$ .

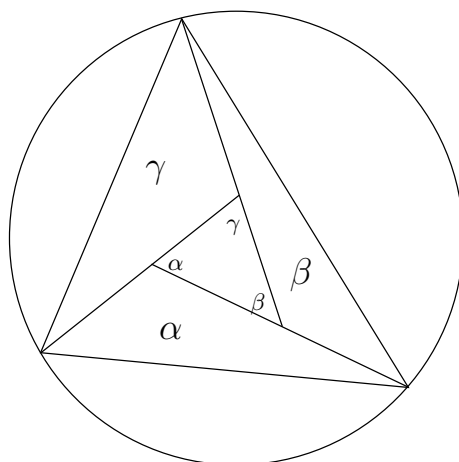


Abbildung 6.8: Berechnung der Fläche eines hyperbolischen Dreiecks.

Dann gilt

$$\text{Area}(ABC) = \text{Area}(\Delta) - \text{Area}(\Delta_{\pi-\alpha}) - \text{Area}(\Delta_{\pi-\beta}) - \text{Area}(\Delta_{\pi-\gamma}) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$$

□

**Proposition 6.48.** Die Fläche eines hyperbolischen  $n$ -ecks ist gleich

$$\sum_{i=1}^n \overline{\alpha}_i - 2\pi$$

wobei  $\overline{\alpha}_i$  die Außenwinkel des  $n$ -ecks sind.

*Beweis.* Vgl. Satz 5.18.

□

Ideale Dreiecke sind nicht nur gleich groß, sondern auch kongruent.

**Proposition 6.49.** Alle idealen Dreiecke sind kongruent.

# Literaturverzeichnis

- [BBI01] Dmitri Burago, Yuri Burago, and Sergei Ivanov. *A course in metric geometry*, volume 33 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [Ber87] Marcel Berger. *Geometry. II*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1987. Translated from the French by M. Cole and S. Levy.
- [Ber09] Marcel Berger. *Geometry I*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2009. Translated from the 1977 French original by M. Cole and S. Levy, Fourth printing of the 1987 English translation.
- [Fis85] Gerd Fischer. *Analytische Geometrie*, volume 35 of *Vieweg Studium: Grundkurs Mathematik*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, fourth edition, 1985.
- [Ful89] William Fulton. *Algebraic curves*. Advanced Book Classics. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1989.
- [HCV73] David Hilbert and Stefan Cohn-Vossen. *Anschauliche Geometrie*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1973.
- [Rat06] John G. Ratcliffe. *Foundations of hyperbolic manifolds*, volume 149 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2006.
- [Rei88] Miles Reid. *Undergraduate algebraic geometry*, volume 12 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [Sti05] John Stillwell. *The four pillars of geometry*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2005.
- [Sti08] John Stillwell. *Naive Lie theory*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2008.
- [Sti10] John Stillwell. *Mathematics and its history*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, third edition, 2010.
- [Tab13] Serge Tabachnikov. *Geometrie und Billard*. Springer Spektrum. Springer-Lehrbuch. Heidelberg, 2013.

- [Thu97] William P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*, volume 35 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Edited by Silvio Levy.
- [Yag62] I. M. Yaglom. *Geometric transformations. I*. Random House, New York, 1962.
- [Yag68] I. M. Yaglom. *Geometric transformations. II*. Random House, New York, 1968.