Themenliste zur Vorlesung “Geometrie”

Ivan Izmestiev

1 Euklidische und affine Geometrie

1. Gruppenwirkungen. Definitionen und Beispiele.

2. Isometrien der Ebene. Darstellung als Komposition von Spiegelungen. Klassifikation. Komposition von Drehungen.

3. Ähnlichkeitstransformationen. Klassifikation in der Ebene. Komposition von Drehstreckungen.

4. Affine Räume. Affine Kombinationen von Punkten. Affine Hülle und Abhängigkeit. Affine Basen und baryzentrische Koordinaten.

5. Affine Abbildungen. Der Hauptsatz der affinen Geometrie.

6. Koordinatensysteme in affinen Räumen. Die Gruppe der Affinitäten als semidirektes Produkt. Dilatationsgruppe als semidirektes Produkt.

7. Affine Unterräume von Vektorräumen. Parallelprojektionen.

8. Orthogonaltransformationen von $\mathbb{R}^n$ und Isometrien von $\mathbb{E}^n$. Isometriegruppe als semidirektes Produkt.

9. Die “fast-Diagonalisierbarkeit” der Orthogonaltransformationen. Klassifikation der Isometrien von $\mathbb{E}^2$ und $\mathbb{E}^3$.

10. Volumina der Parallelotope und Simplexe.

2 Quadriken

1. Kegelschnitte. Brennpunkte und Direktrices. Brennpunkteigenschaften. Gleichungen der Kegelschnitte.

2. Quadriken. Schnitt mit einem affinen Raum. Bild unter einer affinen Transformation.

3. Euklidische und affine Klassifikation der Quadriken. Die wichtigsten Quadriken in $\mathbb{R}^3$.

4. Die Einheitshyperbel, hyperbolische Funktionen und hyperbolische Drehungen von $\mathbb{R}^2$.

5. Konjugierte Durchmesser: der affine Ansatz.

6. Polarität bezüglich einer affinen Quadrik $\{\alpha(p,p) = 1\}$. Umkehrung der Inzidenzen: $p \in \ell \Rightarrow p^\circ \ni \ell^\circ$. Äquivalenz der Sätze von Pascal und Brianchon.

7. *Geraden auf dem einschaligen Hyperboloid und Beweis des Satzes von Brianchon für den Kreis.

3 Projektive Geometrie

1. Projektivierung $P(V)$ eines Vektorraums V. Die Gruppe $\mathrm{PGL}(V)$ der projektiven Transformationen. Affine Karten $P(V) \setminus P(U) \to A$.

2. Zentralprojektion zwischen affinen Unterräumen. Unendlich ferne Punkte. Zentralprojektion als projektive Abbildung.

3. Projektive Basen und der Hauptsatz der projektiven Geometrie.

4. Sätze von Pappos und Desargues. Beweis durch Anwendung projektiver Transformationen. Projektive Dualität (zwischen $P(V)$ und $P(V^*)$).

5. Homogene Koordinaten. Projektive Unterräume und projektive Transformationen in Koordinaten. Gebrochene lineare Abbildungen von $\mathbb{R}$.

6. Projektive Quadriken. Projektive Quadrik in einer affinen Karte ist eine affine Quadrik. Abschluss einer affinen Quadrik zu einer projektiven.

7. Projektive Klassifikation der Quadriken. Beweis der Sätze von Pascal und Brianchon durch Anwendung projektiver Transformationen.

8. Polarität bezüglich einer projektiven Quadrik. Zusammenhang mit der affinen Polarität.

9. Verzerrung des Teilungsverhältnisses und Erhaltung des Doppelverhältnisses unter Zentralprojektionen.

10. Doppelverhältnis als Koordinate auf einer projektiven Geraden. Erhaltung des Doppelverhältnisses unter projektiven Transformationen.

11. Symmetrien des Doppelverhältnisses.

12. *Harmonische Punktepaare und vollständiges Vierseit.

13. Doppelverhältnis von konkurrenten Hyperebenen: über die projektive Dualität und über den Schnitt mit einer Geraden. Die Sinus-Formel. Doppelverhältnis auf einem Kegelschnitt.

4 Sphärische und elliptische Geometrie

1. Abstand zwischen Punkten auf der Sphäre. Geodäten.

2. Duale sphärische Dreiecke. Beziehungen zwischen Seitenlängen und Winkelgrößen.

3. Sinus- und Kosinussätze für sphärische Dreiecke. *Die Sätze auf der Sphäre vom Radius R; übergehen in die euklidischen Sätze bei $R \to \infty$.

4. Fläche sphärischer Dreiecke und Vielecke.

5. Gnomonische Projektion und elliptische Geometrie.

5 Hyperbolische Geometrie

1. Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{n,1}$, Minkowski-Skalarprodukt, die Lorentz-Gruppen $\mathrm{Ort}(n,1)$, $\mathrm{PO}(n,1) \cong \mathrm{O}_+(n,1)$, $\mathrm{PSO}n, 1$.

2. Das Hyperboloid-Modell des hyperbolischen Raums. Abstand zwischen Punkten. Geodäten.

3. Das Cayley-Klein-Modell. Geodäten. Die $\log \mathrm{DV}$-Formel für den Abstand.

4. Lorentz-Orthonormalbasen und Gestalt der Lorentz-Matrizen.

5. Raum-, zeit- und lichtartige Vektoren und Unterräume. Cauchy-Schwarz Ungleichungen.

6. Der de-Sitter Raum. Bijektion Punkte in $\mathrm{d}\mathbb{S}^n \leftrightarrow$ Halbräume in $\mathbb{H}^n$.

7. Sinus- und Kosinussätze für hyperbolische Dreiecke.

8. Abstand Punkt-Gerade und Gerade-Gerade. Zusammenfassung der geometrischen Bedeutung von $\langle v, w \rangle_{n,1}$ für $v, w \in \mathrm{d}\mathbb{S}^n \cup \mathbb{H}^n$.

9. Ideale und hyperideale Dreiecke. Die ihnen entsprechenden Vielecke mit rechten Winkeln.

10. Fläche hyperbolischer Dreiecke und Vielecke.

6 Möbiusgeometrie

1. Die Wirkung von $\mathrm{PO}(n,1)$ auf $\mathbb{S}^{n-1}$.
2. Sphären in $\mathbb{S}^{n-1}$. Ihre Erhaltung unter Möbiustransformationen (d. h. unter der Wirkung von $\mathrm{PO}(n,1)$).
3. Möbiusgeometrie von $\mathbb{S}^1$ ist die projektive Geometrie von $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$.
4. Winkelerhältung auf $\mathbb{S}^2$ unter Möbiustransformationen.
5. Spiegelungen in $\mathbb{R}^{n,1}$ und $\mathbb{H}^n$.
6. Klassifikation der Lorentz-Transformationen von $\mathbb{R}^{2,1}$ und orientierungserhaltenden Isometrien von $\mathbb{H}^2$.
7. *Inversionen von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{S}^{n-1}$.
8. *Inversionen von $\mathbb{S}^{n-1}$ als Möbiustransformationen. Erzeugung der Möbiustransformationen durch Inversionen.
9. *Stereographische Projektion konjugiert Möbiustransformationen von $\mathbb{S}^{n-1}$ mit denjenigen von $\mathbb{R}^{n-1} \cup \{\infty\}$.
10. *Möbiusgeometrie von $\mathbb{S}^2$ als projektive Geometrie von $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$.
11. Die Poincaré-Modelle des hyperbolischen Raums.