Darstellungen affiner Abbildungen in Matrixform

Es gibt zwei (sehr ähnliche) Techniken die Matrixdarstellung einer affinen Abbildung auszurechnen.

Wir illustrieren die Techniken anhand von Aufgabe 3 der Probeklausur.

Aufgabe 3 (in Kurzform)

Betrachte $\mathbb{R}^3$ als aff. Raum mit $\vec{ab} = b - a$. Sei $a = (1,1,1)$ dargestellt bzgl. der Standard-3-Basis. Stelle

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$x \longmapsto a + 4\vec{ax}$$

bzgl. der 3-Basis $a_0 = (1,0,0)$, $a_1 = (1,1,0)$, $a_2 = (1,1,1)$, $a_3 = (2,2,3)$ dar.

Technik 1

1) Basis aus 3-Bein bestimmen:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Bezeichne Basis mit $X = (v_1, v_2, v_3)$.

2) Linearteil ablesen:

Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ der zu f zugehörige Linearteil. Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi(\overrightarrow{a_0 x}) &= \overrightarrow{f(a_0) f(x)} = f(x) - f(a_0) \\ &= (a + 4\overrightarrow{ax}) - (a + 4\overrightarrow{a a_0}) \\ &= 4(\overrightarrow{ax} - \overrightarrow{a a_0}) \\ &= 4(\overrightarrow{ax} + \overrightarrow{a_0 a}) = 4\overrightarrow{a_0 x}, \end{aligned}$$

d.h. $\varphi = 4 \cdot \mathrm{Id}$.

3) Linearteil bzgl. der Basis X darstellen:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

4) Translationsteil bzgl. der Basis darstellen:

Für alle $x \in \mathbb{A}$ gilt $f(x) = f(a_0) + f(\overrightarrow{a_0 x})$. Wir müssen also

$$f(a_0) = a + 4\,\overrightarrow{a a_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

bzgl. der gegebenen 3-Basis darstellen, d.h.

$$\overrightarrow{a_0 f(a_0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

lösen. Das ergibt $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 0$.

5) Matrixform aufstellen:

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

<u>Technik 2</u>

1) Bestimme die Bilder der 3-Basis unter f:

$$f(a_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad f(a_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix},$$

$$f(a_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f(a_3) = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

2) Bestimme Bilder der Basisvektoren unter der linearen Abbildung:

$$\varphi(\overrightarrow{a_0 a_1}) = f(a_1) - f(a_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(\overrightarrow{a_0 a_2}) = f(a_2) - f(a_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(\overrightarrow{a_0 a_3}) = f(a_3) - f(a_0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

3) Stelle die Bilder der Basis unter f bzgl. der Basis im Bildraum dar:

Bildraum - Basis Bt

$$X = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right).$$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ dargestellt bzgl. X: $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ — " — : $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$ — " — : $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

4) Translationsteil bzgl. Basis darstellen:

Wie in Technik 1, 4).

5) Matrixform aufstellen:

Wie in Technik 1, 5).