Elementar Geometrie: Axiome, Sätze, Definitionen und Propositionen

23. Juni 2014

1. Euklidische Geometrie

   (a) Affine Räume

      i. Definition: Ein affiner Raum besteht aus einer Menge $A \neq \emptyset$, einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V und einer Abb. $A \times A \to V$,$(a, b) \mapsto \vec{ab}$ mit
      für $a, b, c \in A$ gilt $\vec{ab} + \vec{bc} = \vec{ac}$ ("Dreiecksregel")
      für $a \in A, v \in V$ gibt es genau ein $b \in A$ mit $\vec{ab} = v$

      ii. Definition: Die Dimension von A ist gegeben durch durch die Dimension des VR.

      iii. Definition: $a_0, ..., a_n \in A$. Dann ist $\{a_0, ..., a_n\}$ int allgemeiner lage (spannen A auf | n-Bein) falls $\{a_0\vec{a}_1, ..., a_0\vec{a}_n\}$ Basis sind von V

   (b) Affine Unterräume

      i. Definition: Sei $a \in A, W \subseteq V$ UVR. Dann ist $a + W = \{a + w, w \in W\} \subseteq A$ ein affiner Unterraum ("Teilraum") mit $\vec{ab} = w$.

      ii. Satz: Affine Unterraum sind affine Räume.

      iii. Definition: Sei $a_0, ..., a_n \in A$. Dann heißt $\{a_0, ..., a_n\}$ linear unabhängig falls $\{a_0\vec{a}_1, ..., a_0\vec{a}_n\}$ linear unabhängig

      iv. Satz: Definition 2.3 ist unabhängig des gewählten Punktes.

      v. Definition: Seien $a, b \in A$, sei W UVR von V. Dann ist $a + W = \{a + w, w \in W\}$ein affiner Unterraum von A.

      vi. $\dim W = \dim (a + W) = 1$, dann heißt a+W Gerade

      vii. $\dim W = \dim (a + W) = 2$, dann heißt a+W Ebene

      viii. Satz: Sei $B \subset A$ affiner Unterraum, dann ist der dazugehörige, UVR $W \subseteq V$ eindeutig.

      ix. Definition: 2 Unterräume $B_1 = b_1 + W_1$ und $B_2 = b_2 + W_2$ heißen parallel falls $W_1 = W_2$.
      heißen schwach parallel falls $W_1 = W_2$ echt ineinander enthalten sind, also $W_1 \subseteq W_2 \vee W_1 \supseteq W_2$.

   (c) Baryzentrische Koordinaten

      i. Definition: Seien $a_0, ..., a_n \in A$, $\lambda_0, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$. Dann ist $a = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i = b + \sum \lambda_i b\vec{a}_i \in A$ wobei $b \in A$ beliebig. Die Ausdrücke $\lambda_0 a_0, ..., \lambda_n a_n$ heißen Punktmassen, der Punkt $a \in A$ Baryzentrum der Punktmassen. Falls $\{a_0, ..., a_n\}$ in allgemeiner Lage so heißen $(\lambda_0, ..., \lambda_n)$ baryzentrische Koordinaten von a.

      ii. Satz: Definition c)(i) ist unabhängig von b.

      iii. Satz von Ceva: Das Produkt der drei Seitenschnittverhältnisse durch einen Punkt im Inneren eines Dreiecks ist 1. Dann gilt $\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \cdot \frac{\lambda_0}{\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1$

   (d) Konvexe Hülle

      i. Definition: Sei $X \subseteq A$. Dann heist X konvex falls für $a, b \in X$ auch $\overset{\longmapsto}{\mathrm{ab}} \subseteq X$ gilt.
      Bemerkung: Der Schnitt einer bel. Familie von konvexen Mengen ist konvex.

   (e) Einbettung in Höhe 1

      i. Definition: Sei (A,V) n-dim affiner Raum und $b \in A$. Dann ist $A \overset{\sim}{\to} V$ $\left(a \mapsto \overrightarrow{ba}\right)$. Weiterhin sei $\{e_1, ..., e_n\}$Basis von V. Dann ist $A \cong V \cong R^n$. Die Einbettung von A in Höhe 1 ist nun gegeben durch $V \cong \{0\} \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ $\left(A \cong \{1\} \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}\right)$

   (f) Affine Abbildungen

      i. Definition: $(A, V), (B, W)$ affine Räume. Eine affine Abb. $f = (f, \varphi)$ bestehend aus einer Abb. $f : A \to B$ und einer linearen Abb. $\varphi : V \to W$ so dass für alle $a, b \in A$, $\overrightarrow{f(a)f(b)} = \varphi(\overrightarrow{ab})$.

      ii. Proposition: Seien $(f, \varphi), (g, \varphi)$ affine Abb. bzgl lin. Abb. φ. Dann ist $f(a) = g(a) + a_0$.

      iii. Hauptsatz affine Geometrie:
      Satz: $A = (A, V), B = (B, W)$ affine Räume, $\{a_0, ..., a_n\}, \{b_0, ..., b_n\}$ n-Beine. Dann existiert eine eindeutige affine Abb. $f = (f, \varphi)$ mit $f(a_i) = b_i$ für alle i.

iv. Definition: (A, V) affiner Raum, $(B_1, W_1), (B_2, W_2)$ affine Unterräume. Dann heißen B_1 und B_2 komplementär falls
$W_1 \cap W_2 = \{0\}$
$< W_1 \cup W_2 >= V$

v. Proposition: Seien B_1, B_2 komplementär. Dann ist $|B_1 \cap B_2| = 1$

vi. Definition: B_1, B_2 komplementär UR von A. Seien B_a für $a \in A$ der zu B_1 parallele Unterraum von A, der durch a geht. Die Projektion $\pi_{B_1 B_2} : A \to B_1$ gegeben durch $\pi_{B_1 B_2} : a \mapsto b$ wobei $B_2 \cap B_a = \{b\}$.

vii. Proposition: Sei $\pi_{B_1 B_2}$ Projektion entlang B_2 auf B_1. Dann $\pi_{B_1 B_2}(a) = a \Leftrightarrow a \in B_1$.

viii. Satz: Projetionen sind affine Abbildungen.

(g) Volumina und Parallelotope

i. Definition: Sei A affiner Raum mit n-Bein $\{a_0, ..., a_n\}$. Dann ist das dazugehörige Parallelotop $\rho = \{a_0 + \sum \lambda_i \overrightarrow{a_0 a_i} : 0 \leq \lambda$
Das Volumen von ρ ist $vol\, \rho = |det\, \{\overrightarrow{a_0 a_1}, ..., \overrightarrow{a_0 a_n}\}$

ii. Proposition: Das Volumen ist wohl-definiert.

iii. Satz: Seien zwei n-Beine $\{a_0, ..., a_n\}$ und $\{a'_0, ..., a'_n\}$ gegeben und seien ρ, ρ' die dazugehörigen Parallelotope. Dann gibt es eine affine Abbildung: $f : A \to A$ mit $f(\rho) = p'$ und $vol\, p' = |\det \varphi| vol\, \rho$

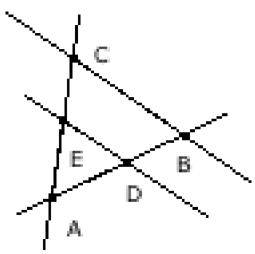
2. Synthetische Geometrie

   (a) Hilbert Axiome:

      i. Definition: (Inzidenzaxiome) Eine Menge (Punkte) zusammen mit einer Menge von Teilmengen (Geraden) heißt Inzidenzgeometrie falls:
         (I1) Für zwei verschiedene Punkte gibt es eine eindeutige Gerade, die beide Punkte enthält
         (I2) Jede Gerade enthält mindestens 2 Punkte
         (I3) Es existieren 3 Punkte, die nicht in einer gemeinsammen Geraden liegen
      ii. Proposition: Zwei verschiedene Geraden gehen durch höchstens einen gemeinsammen Punkt.
      iii. Definition: Zwei Geraden n,l heißen parallel falls:
         A. $m = l$
         B. $m \cap l \neq \emptyset$. Wir schreiben dann $m \parallel l$
      iv. Definition: Eine Inzidenzgeometrie erfüllt das Parallelitätsaxiom falls (P) $A \in P, l \in G$. Dann existiert höchstens eine Gerade $m \in G$ mit $A \in m$, $m \parallel l$
      v. Definition: Seien (P_1, G_1) und (P_2, G_2) Modelle. Dann heißen diese isomorph, falls es eine Bijektion $\varphi : P_1 \tilde{\rightarrow} P_2$ gibt mit $G_2 = \varphi(G_1) : \{\{\varphi(A), A \in l\} : l \in G_1\}$
      vi. Proposition: Jede Inzidenzgeometrie auf 3 Punkten ist Isomorph zu jeder anderen Inzidenzgeometrie auf 3 Punkten.
      vii. Definition: Seien X,Y,...,Z Axiome. Dann heißt X unabh. von Y,...,Z falls es ein Modell gibt, in dem Y,...,Z gelten aber X nicht.

   (b) Anordnungsaxiome

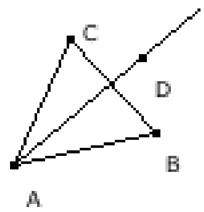
      i. Definition: Sei (P, G) Inzidenzgeometrie und sei $A \subset P^2$. Für $(A, B, C) \in A$ sagen wir B liegt zwischen A und C und schreiben $A * B * C$. A (oder kurz *) ist eine Anordnung von (P, G) falls:
         (A1) Falls $A * B * C$, dann sind A,B,C verschieden und $C * B * A$
         (A2) Für zwei verschiedene Punkte $A, B \in P$ gibt es $C \in P$ mit $A * B * C$
         (A3) Für 3 verschiedene Punkte auf einer Geraden liegt genau einer zwischen den Anderen
         (A4) A,B,C nicht kolliniar, $l \in G$ mit $A, B, C \notin l$. Falls $D \in l$ für $A * D * B$. Dann muß l ebenfalls E enthalten, so dass $A * E * C$ oder $B * E * C$ (exklosiv oder)



      ii. Definition: Seien A,B,C nicht kollineare Punkte. Dann heißt $\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{C : A * C * B\}$ Strecke mit den Endtpunkten A und B. AUßerdem heißt $\triangle(A, B, C) = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$. Dreieck mit Ecken A,B,C und Seiten $\widetilde{AB}, \widetilde{AC}, \widetilde{BC}$.
      iii. Satz: Ebenen Zerlegung: Sei $l \in G$. Dann gibt es $P \backslash l = S_1 \cup S_2$, so dass:
         $A, B \notin l$ liegn in der gl. Menge genau dann wenn $\overline{AB} \cap l = \emptyset$
      iv. Korollar (Geraden Zerlegung): Sei l Gerade und $A \in l$. Dann ex. Zerlegung $l \backslash \{A\} = S_1 \cup S_2$ mit B,C gehören zur gleichen Menge falls $A \notin \widetilde{BC}$
      v. Definition: Sei A,B,C nicht kollinar. Der Strahl $\overrightarrow{AB}$ mit Ursprung A ist: $\overrightarrow{AB} = \{A\} \cup \{C : C\, und\, B\, sind\, auf\, der\, selben\, Seit$
      vi. Definition: Winkel $\angle(ABC)$ mit Scheitelpunkt B ist $\angle(ABC) = \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}$
      vii. Definition: Das Innere des Dreiecks $\triangle(ABC)$ ist der Schnitt der drei Halbebenen.

viii. Definition: Das Innere des Winkels $\angle(ABC) = \{D : D\,und\,A\,auf\ selber\ Seite\ von\ \overline{BC}\} \cup \{D : D\,und\,C\,auf\ selber\ Seite\ de$

ix. Satz: (Kreuzschnitt) Sei $\triangle(BAC)$ ein Dreieck und D im Inneren des Winkels $\angle(ABC)$. Dann ist $\widetilde{BC} \cap \overrightarrow{AD} \neq \emptyset$



x. Satz: Die Kartesische Ebene erfüllt $(A1) \to (A4)$

(c) Kongruenzaussagen für Strecken

i. Definition: Eine Relation auf Strecken, geschrieben $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ heist Kongruenz von Strecken falls:
(K1) Für Strecke $\overline{ab}$ und einen Strahl r mit Ursprung C existiert ein eind. Punkt D auf r mit $AB \cong CD$
(K2) $AB \cong AB, AB \cong CD \wedge AB \cong EF \Rightarrow CD \cong EF$
(K3) Für Punkte $A * B * C$, $D * E * F$ mit $AB \cong DE \wedge BC \cong EF \Rightarrow AC \cong DF$

ii. Proposition: Kongruenz ist Äquivalenzrelation

iii. Definition: Ein Punkt $C \in \overline{AB}$ heißt Mittelpunkt von $\overline{AB}$ falls $AC \cong CB$

iv. Proposition: Eine Strecke hat höchstens einen Mittelpunkt.

v. Definition: Seien $O \neq A$ Punkte. Der Kreis mit Mittelpunkt O ist gegeben durch: $S(O, A) = \{B : OB \cong OA\}$

vi. Definition: Seien $\overline{AB}$,$\overline{CD}$ gegeben, sei E der eind. Punkt auf $v = -\overrightarrow{BA}$ mit $CD \cong BE$. Dann schreiben wir $\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{CD}$

vii. Proposition: $AB \cong A'B', CD \cong C'D'$. Dann ist auch $AB + CD \cong A'B' + C'D'$

viii. Proposition: Seien $A * B * C$, seien E,F auf Strahl l mit Ursprung D. Falls $AB \cong DE, AC \cong DF$ dann gilt auch $D * E * F$
$BC \cong EF$. (Wir schreiben $BC = AC - AB$)

ix. Definition: Seien Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ gegeben. Dann ist $\overline{AB} < \overline{CD}$ falls ein F in CD existiert, so dass $AB \cong CF$, $C * F * D$

x. Satz: Die Kleiner Relation ist:
(a)kompatibel mit Kongruenz
(b)bleibt bei Addition erhalten
(c)ist eine totale Ordnung auf Kongruenzklassen

(d) Kongruenzaussagen für Winkel

i. Definition: Eine Relation auf Winkeln, geschrieben $\angle ABC \cong \angle DEF$ heißt kongruenz (von Winkeln) falls
(K4) Für $\angle ABC$ und Strahl $\overrightarrow{ED}$ existiert ein eindeutiger Strahl $\overrightarrow{EF}$ auf gegebenr seite von $\overline{ED}$ mit $\angle(ABC) \cong \angle(DEF)$
(K5) Für Winkel α, β, γ gilt: $\alpha \cong \alpha$ und $\alpha \cong \beta \wedge \alpha \cong \gamma \Rightarrow \beta \cong \alpha$
(K6) Gegeben $\triangle(ABC), \triangle(DEF)$ mit $AB \cong DE$, $AC \cong DF, \angle(BAC) \cong \angle(DEF)$ kongruent, d.h. $BC \cong EF, \angle(ABC) \cong \angle(DEF), \angle(ACB) \cong \angle(DFE)$

ii. Proposition: Kongruenz von Winkeln ist eine Äquivalenzrelation

iii. Definition: Sei $\angle(ABC)$ Winkel und D im Inneren dann Schreiben wir $\angle(ABC) = \angle(ABD) + \angle(DBC)$

iv. Definition: Sei $\angle(ABC)$ Winkel und sei $D \in -\overrightarrow{BC} \setminus \{B\}$. Dann heißen $\angle(ABC)$ und $\angle(ABD)$ Supplemtär

v. Proposition: Seien $\angle(BAC), \angle(BAD)$ und $\angle(B'A'C'), \angle(B'A'D')$ jeweils supplementär. Falls $\angle(BAC) \cong \angle(B'A'C')$. So gilt auch $\angle(BAD) \cong \angle(B'A'D')$

vi. Korolar: Seien zwei verschiedene Strahlen $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ und seien $B' \in -\overrightarrow{AB} \setminus \{A\}$ und ,$C' \in -\overrightarrow{AC} \setminus \{A\}$. Dann ist $\angle(BAC) \cong \angle(B'AC')$. Solche Winke heißen Scheitelwinkel

vii. Proposition: Seien $\angle(BAC) \cong \angle(B'A'C')$. D im Inneren von $\angle(BAC)$. Dann ex. D' im Inneren von $\angle(B'A'C')$mit $\angle(BAD) \cong \angle(B'A'D')$ und $\angle(CAD) \cong \angle(C'A'D')$

viii. Definition: Seien $\angle(ABC), \angle(DEF)$ Winkel. Dann ist $\angle(ABC) < \angle(DEF)$ falls ein Punkt P im inneren von $\angle(DEF)$ ex. mit $\angle(ABC) \cong \angle(DEP)$

ix. Satz: Die kleiner Relation von Winkeln ist:
(a) komüatibel mit der Kongruenz
(b) ist eine Totale Ordnung auf Kongruenzklassen von Winkeln

x. Definition: Ein Rechter Winkel ist ein Winkel, der zu einem (und daher zu allen) seiner Supplementärwinkel kongruent ist.

xi. Proposition: Je zwei rechte Winkel sind Kongruent

xii. Proposition: Gegeben $\angle(BAC)$ mit D im Inneren. Weiterhin sei $\angle(D'A'C') \cong \angle(DAC)$, $\angle(D'A'B') \cong \angle(DAB)$ und die Strahlen $\overrightarrow{A'B'}$ und $\overrightarrow{A'C'}$ auf verschiednene Seiten von $\overrightarrow{A'D'}$. Dann ist $\overrightarrow{A'B'} \cup \overrightarrow{A'C'}$ Winkel $\angle(B'A'C') \cong \angle(BAC)$mit D' im Inneren. Summe kongruenter Winkel sind Kongruent

(e) Hilbertebene

i. Ein Modell mit Anordnung, Kongruenz von Strecken und Winkel heißt Hilbertebene falls $(I1) \to (I3), (A1) \to (A4), (K1) \to (K6)$ gelten.

ii. Definition: Ein Dreieck mit zwei kongr. Seiten heißt gleichschenklig

iii. Satz: Die eingeschlossenen Winkel in einem gleichsch. $\triangle$ sind Kongr.

iv. Satz: (SSS Kriterium) Zwei Dreiecke $\triangle(ABC), \triangle(A'B'C')$ mit:
$AB \cong A'B'$
$AC \cong A'C'$
$BC \cong B'C'$ sind Kongruent, d.h. $\angle(ABC) \cong \angle(A'B'C')$ usw.

v. Satz: (Existens von Gleichschenklichen Dreiecken) Seien $A \neq B$ gegeben. Dann existiert C mit $\triangle(ABC)$ ist gleichschenklig

vi. Satz: (Außenwinkelsatz): In einem Dreieck ist ein Außenwinkel größer als beide gegenüberliegenden Innenwinkel

vii. Proposition: Seien $A_1, ..., A_n$ Punkte. Dann ex. Gerade l für alle Punkte $A_1, ..., A_n$ auf der gleichen Seite liegen

viii. Definition: Sei $\angle(ABC)$ gegeben. Dann ist die Winkelhabierende die Gerade (bzw. Strahl) $\overline{BX}$ $\left(\overrightarrow{BX}\right)$ mit $\angle(ABX) \cong \angle(XBC)$ und X im Inneren von $\angle(ABC)$

ix. Definition: Zwei Geraden stehen senkrecht auf einander falls diese nicht Parallel sind und auch die eingeschlossenen Winkel rechte Winkel sind.

(f) Hilbert Werkzeuge

i. Definition: Wir haben folgende Konstruktionen:
Existenz einer Gerade durch 2 gegebene Punkte („Lineal",(I1))
Das Abtragen von Strecken („Zirkel",(K1))
Das Abtragen von Winkeln („Verschraubte Lineale", (K4))
Diese heißen Hilbert Werkzeuge

(g) Schnitte von Geraden und Kreisen

i. Definition: Sei $O \neq A$. Der Kreis mit Mittelpunkt O und Radius $\overset{\longmapsto}{\mathrm{OA}}$ ist $\mathbb{S}(O, A) = \{B : OB \cong OA\}$

ii. Proposition: Der Mittelpunkt eines Kreises ist eindeutig.

iii. Definition: Sei Γ ein Kreis mit Mittelpunkt O und Radius $\overset{\longmapsto}{\mathrm{OA}}$. Dann ist das Innere von Γ gegeben durch $\{B : OB < OA\}$ und das Äußere durch $\{B : OB > OA\}$.

iv. Definition: Eine Gerade l heißt Tangente von Γ falls $|\Gamma \cap l| = 1$

v. Definition: Zwei Kreise Γ, Γ' heißen Tangenzial falls $|\Gamma \cap \Gamma'| = 1$

vi. Satz: (Stufenwinkel) Seien l_1, l_2, g verschiedene Geraden mit $l_1 \nparallel g, l_2 \nparallel g$. Sei P_1, P_2 die Schnittpunkte von g mit $l_1$und l_2. Weiterhin $\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}$ die Strahlen auf l_1 und l_2 mit Urpsrung P_1, P_2 auf der gleichen Seite von g. Schließlich $\alpha = \overrightarrow{l_1} \cup \overrightarrow{P_1P_2}, \beta = \overrightarrow{l_2} \cup -\overrightarrow{P_2P_1}$. Dann ist $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \alpha \cong \beta$

vii. Korollar: Sei $\triangle(ABC)$ gegeben und seien α und β die Innenwinkel in A und B. Dann gilt $\alpha < \beta \Leftrightarrow BC < AC$

viii. Korollar: Sei l Gerade und Γ Kreis, so dass $|l \cap \Gamma| > 1$. Dann ist $|l \cap \Gamma| = 2$

ix. Satz: Sei g die Senkrechte auf $\overline{OA}$ in A. Dann steht g Tangential auf $\mathbb{S}(O, A)$ und $g \setminus \{A\}$ liegt außerhalb des Kreises. Umgekehrt gilt: Ist eine Gerade tangente an $\mathbb{S}(O, A)$ mit Schnittpunkt B, dann steht diese Senkracht auf $\overline{OB}$. Insbesondere gibt es für es für jeden Punkt B auf $\mathbb{S}(O, A)$ eine eindeutige Tangente.

x. Korollar: Sei l eine Gerade, die den Kreis Γ nicht tangential schneidet. Dann gibt es genau zwei Schnittpunkte.

xi. Proposition: Seien O, O', A drei verschiedene Kollineare Punkte. Dann sind die Kreise $\mathbb{S}(O, A)$ und $\mathbb{S}(O, A')$ Tangential.
Umgekehrt gilt, sind zwei Kreise Γ, Γ' tangential am Punkt A, so sind ihre MP O, O' und A Kollinear.

xii. Definition: (Kreis-Kreis-Schnitt) Eine Hilbertebene hat K-K-S-Eigenschaft falls gilt:
(E) Seien Γ, Γ' Kreise, so dass Γ je einen Punkt im inneren und im Äußeren von Γ' enthält. Dann gilt $\Gamma \cap \Gamma' \neq \emptyset$

xiii. Proposition: (Kreis-Geraden-Schnitt) Sei l Gerade in Hilberebene mit (E) ud sei Γ Kreis, so dass l das Innere von Γ schneidet. Dann ist $l \cap \Gamma \neq \emptyset$

xiv. Proposition: Das Äußere eines Kreises ist Streckenzusammenhängend.