Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik und Informatik
Christian Stump
Moritz Schmitt

Elementargeometrie
Sommersemester 2014

Nachklausur

23. September 2014

Name: Musterlösung

Matrikelnummer: ______________________

Ergebnis auf Website (j/n): ______________________

- Tragen Sie bitte auf jeder Seite Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein.
- Diese Nachklausur besteht aus einem **analytischen Teil** (Aufgaben 1–3) und einem **synthetischen Teil** (Aufgaben 4–7).
- Die erste Aufgabe in beiden Teilen (Aufgaben 1 und 4) sind Multiple-Choice-Aufgaben. Dort soll in die Kästchen entweder $\boxed{\text{w}}$ eingetragen werden, falls die nebenstehende Aussage wahr ist, oder $\boxed{\text{f}}$, falls die nebenstehende Aussage falsch ist. Es können auch Kästchen freigelassen werden. In diesem Teil ergibt
  - eine richtige Antwort 3 Punkte,
  - eine falsche Antwort 0 Punkte und
  - ein leer gelassene Kästchen 1 Punkt.
- Falls im Ankreuzteil Verbesserungen vorgenommen werden sollen, dann streichen Sie bitte die zu verbessernde Antwort durch und zeichnen neben das alte Kästchen ein weiteres für die neue Antwort. Undeutliche Bewertungen werden als **nicht korrekt beantwortet** interpretiert und entsprechend mit 0 Punkten gewertet.
- Es sind **keine** Hilfsmittel außer einem Stift zugelassen.
- Die Bearbeitungsdauer der Nachklausur beträgt **90 Minuten**.
- Die Ergebnisse werden am **24. September** um 10:00 im Foyer der **Arnimallee 2** sowie auf der **Webseite der Vorlesung** ausgehängt.

VIEL ERFOLG!

Name: Musterlösung

Matrikelnummer:

Aufgabe 1 (15 **Punkte**)

Bitte geben Sie an, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

f — Das Intervall $[0,1] \subset \mathbb{R}$ ist ein affiner Unterraum des affinen Raumes $\mathbb{R}$.

---

f — Jedes Polynom $f(x) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ mit Koeffizienten $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist eine affine Abbildung des affinen Raumes $\mathbb{R}$ auf sich selbst.

---

w — Jede affine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kann als lineare Abbildung vom Vektorraum $\mathbb{R}^{n+1}$ auf sich selbst dargestellt werden.

---

f — Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Drehung um den Nullpunkt. Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, sodass $f^k = \mathrm{id}$ gilt.

---

w — Gegeben seien drei Punkte a, b und c in einem affinem Raum. Jeder Punkt der konvexen Hülle $\mathrm{conv}\{a, b, c\}$ kann als gewichtetes Baryzentrum von a, b und c dargestellt werden.

Name: Musterlösung

Matrikelnummer:

Aufgabe 2 (14 **Punkte**)

Sei $\mathbb{A}$ eine affine Ebene und $\mathbb{B}$ eine Gerade in $\mathbb{A}$. Beweisen Sie, dass es durch jeden Punkt $p \in \mathbb{A}$ eine eindeutige zu $\mathbb{B}$ parallele Gerade gibt.

$\mathbb{A} = (A, V)$ affiner Raum der Dimension 2

$\mathbb{B} = (\mathbb{B}, W)$ mit $\mathbb{B} \subseteq A$ und W Untervektorraum der Dimension 1.

$\mathbb{B}$ affiner Unterraum von A, also ist

$\mathbb{B} = b + W$ für ein $b \in A$.

Zwei affine Unterräume $\mathbb{B}, \mathbb{C}$ heißen parallel falls $\mathbb{B} = b + W$ und $\mathbb{C} = c + W$.

Somit ist $p + W$ parallel zu $\mathbb{B}$ mit $p \in p + W$ (da $\vec{0} \in W$).

Sei nun $q + W$ für ein $q \in A$ mit $p \in q + W$.

Dann ist $q + W = p + (\overrightarrow{qp} + W) = p + W$.

$\Rightarrow$ Eindeutigkeit.

Name: Musterlösung

Matrikelnummer:

Aufgabe 3 (14 Punkte)

(i) Geben Sie die Definition einer „affinen Abbildung“ an.

Betrachten Sie den $\mathbb{R}^2$ als affinen Raum mit der Abtragbarkeitsregel $\overrightarrow{ab} = b - a$, sowie drei Punkte $a_0 = (-1, -1)$, $a_1 = (0, -1)$ und $a_2 = (-1, 1)$.

(ii) Zeigen Sie, dass es $\{a_0, a_1, a_2\}$ ein 2-Bein sind.

(iii) Stellen Sie die affine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x, y) = (-2 - x, 1 + y)$$

bzgl. dieses 2-Beins in Urbild- und Bildraum dar.

(i) Eine affine Abb. $f = (f, \varphi) : (A, V) \to (B, W)$ ist eine Abb. $f : A \to B$ und eine lineare Abb. $\varphi : V \to W$ mit $\overrightarrow{f(a)f(b)} = \varphi(\overrightarrow{ab})$ für alle $a, b \in A$.

(ii) $B = \{\overrightarrow{a_0a_1}, \overrightarrow{a_0a_2}\} = \{a_1 - a_0, a_2 - a_0\} = \{(1,0), (0,2)\}$ ist lin. unabh. und somit Basis. $\Rightarrow \{a_0, a_1, a_2\}$ 2-Bein

(iii) $f(a_0) = (-1, 0)$, $f(a_1) = (-2, 0)$, $f(a_2) = (-1, 2)$

$\Rightarrow \varphi(\overrightarrow{a_0a_1}) = f(a_1) - f(a_0) = (-1, 0) = -\overrightarrow{a_0a_1}$

$\varphi(\overrightarrow{a_0a_2}) = f(a_2) - f(a_0) = (0, 2) = \overrightarrow{a_0a_2}$

$$\Rightarrow \varphi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{a_0 f(a_0)} = f(a_0) - a_0 = (0, 1) = \frac{1}{2} \overrightarrow{a_0a_2}$.

$$\Rightarrow f = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Name: Musterlösung

Matrikelnummer: ______

Aufgabe 4 (15 Punkte)

Bitte geben Sie an, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

[w] Es existieren unendliche Inzidenzgeometrien, die keine Hilbertebenen sind.

---

[w] In jeder Hilbertebene kann man ein gleichschenkliges Dreieck zu gegebener Grundseite konstruieren.

---

[w] Die Tangente an einem Punkt eines Kreises in einer Hilbertebene ist eindeutig.

---

[w] Eine Gerade durch den Mittelpunkt eines Kreises in einer Hilbertebene schneidet den Kreis in genau zwei Punkten.

---

[f] Im Poincaré-Modell gilt das schwache Parallelitätsaxiom (P).

Name: Musterlösung

Matrikelnummer:

Aufgabe 5 (14 Punkte)

Beweisen Sie die Unabhängigkeit der Axiome (I1)–(I3). Geben Sie dazu drei Modelle an, die jeweils zwei Axiome erfüllen und das dritte nicht. Skizzen zusammen mit kurzen Erklärungen reichen als Antwort aus.

(I1) Durch zwei verschiedene Punkte geht eine eindeutige Gerade

(I2) Jede Gerade enthält (min.) 2 Punkte

(I3) Es existieren drei nicht kollineare Punkte

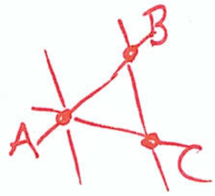
(I1) & (I2), nicht (I3): Eine Gerade mit min. 2 Punkten

$(P, G) = (\{A, B\}, \{AB\})$

(I1), (I2) erfüllt. Es ex. kein Punkt außerhalb der Geraden

(I1) & (I3), nicht (I2):

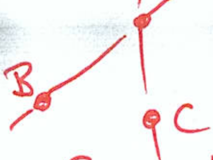
$(P, G) = (\{A, B, C\}, \{AB, AC, BC, A\})$



Je zwei Punkte bestimmen Gerade, A, B, C nicht kollinear, A ist eine Gerade mit weniger als zwei Punkten.

(I2) & (I3), nicht (I1):

$(P, G) = (\{A, B, C\}, \{AB, AC\})$



Durch B und C geht keine Gerade.

A, B, C nicht kollinear

Beide Geraden enth. zwei Punkte

Name: Musterlösung

Matrikelnummer: ______________________

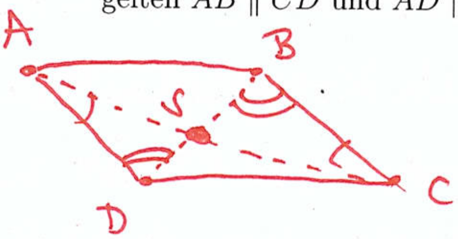
Aufgabe 7 (14 **Punkte)**

Seien A, B, C, D vier Punkte in einer Hilbertebene, so dass keine 3 Punkte kollinear sind, und weiterhin $AB \cong CD$ und $AD \cong BC$. Ohne Beweis wird weiterhin angenommen, dass $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{S\}$ für einen Punkt S. Wir betrachten nun das Viereck mit den Ecken A, B, C, D.

(i) Beweisen Sie, dass die gegenüberliegenden Winkel im Viereck kongruent sind. Es soll also gelten $\angle(ABC) \cong \angle(ADC)$ und $\angle(BAD) \cong \angle(BCD)$.

(ii) Beweisen Sie, dass S der Mittelpunkt der Strecken $\overset{\vdash\!\dashv}{\mathrm{AC}}$ und $\overset{\vdash\!\dashv}{\mathrm{BD}}$ ist.

(iii) Beweisen Sie, dass die gegenüberliegenden Geraden des Vierecks parallel sind. Es soll also gelten $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ und $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.



(i) $AB \cong CD$, $AD \cong BC$.

Aus SSS folgt $\Delta ABC \cong \Delta ADC$ und $\Delta ABD \cong \Delta CBD$.

$\Rightarrow \angle ADC \cong \angle ABD$ und $\angle BAD \cong \angle BCD$

(ii) Nach (i) gilt $\angle SAD \cong \angle SCB$ und $\angle ADS \cong \angle CBS$.
Mit WSW folgt also $\Delta ADS \cong \Delta BCS$ und insbesondere $DS \cong BS$ und $AS \cong CS$

(iii) Aus $\angle DAC \cong \angle ACB$ folgt aus Scheitelwinkel- und Stufenwinkelsatz dass $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

Analog folgt aus $\angle ADB \cong \angle DBC$ dass $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

Name: Musterlösung

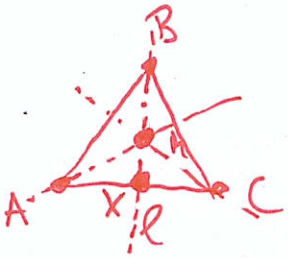
Matrikelnummer:

Aufgabe 6 (14 **Punkte**)

Sei in einer Hilbertebene ein *gleichseitiges* Dreieck $\triangle(ABC)$ gegeben. Zeigen Sie, dass ein Kreis existiert, der alle drei Ecken auf dem Rand enthält.

Wir suchen ein M mit $AM \cong BM \cong CM$.

Aus VL ist bekannt, dass sich die Winkelhalbierende schneiden. Sei M dieser Schnittpunkt.



Sei l die Winkelhalbierende von $\angle ABC$ und $\{X\} = l \cap \overline{AC}$ (nach Kreuzschnittsatz). Da $\angle XBC \cong \angle XBA$ und $AB \cong CB$ ist nach SWS $\triangle AXB \cong \triangle CXB$. Insbesondere ist $AX \cong CX$ und $\angle AXB \cong \angle CXB$. Somit ist auch $\triangle AXM \cong \triangle BXM$ nach SWS und wir erhalten $AM \cong CM$.

Analog für die Winkelhalbierende von $\angle ACB$. Wir erhalten $AM \cong BM$.

Insgesamt $AM \cong BM \cong CM$

und $A, B, C \in S(M, A) = \{Y : MY \cong MA\}$