Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik und Informatik
Christian Stump
Moritz Schmitt

Elementargeometrie
Sommersemester 2014
mathseminar.org/Elementargeometrie

0. Übungsblatt

→ Zum Aufwärmen, wird nicht korrigiert ←

Aufgabe 1: 0 Punkte

Sei $\mathbb{A}$ ein affiner Raum über dem $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Beweise folgende Aussagen:

(i) Für alle Punkte $a, b \in \mathbb{A}$ gilt $\overrightarrow{aa} = 0$ und $\overrightarrow{ab} = -\overrightarrow{ba}$.

(ii) Für alle Punkte $a, a', b, b' \in \mathbb{A}$ gilt $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{a'b'}$ genau dann, wenn $\overrightarrow{aa'} = \overrightarrow{bb'}$. Man veranschauliche sich die Aussage mit Hilfe einer Zeichnung.

(iii) Ist $a \in \mathbb{A}$ und $u, v \in V$, so existiert genau ein $b \in \mathbb{A}$ mit $\overrightarrow{ab} = v$. Dies kann man auch schreiben als $a + v = b$. Beweise, dass mit dieser Notation $(a + u) + v = a + (u + v)$ gilt.

Aufgabe 2: 0 Punkte

Für diese Aufgaben benötigen wir sogenannte Operationen von Gruppen. Eine Gruppe G *operiert* auf einer Menge X, falls eine Abbildung $* : G \times X \to X$ existiert, für die einerseits $g * (h * x) = (gh) * x$ und andererseits $1 * x = x$ gilt, jeweils für alle $g, h \in G$ und $x \in X$. Die Operation heißt *transitiv*, falls für alle $x, y \in X$ ein $g \in G$ existiert, sodass $g * x = y$ gilt, und sie wird *treu* genannt, wenn für $g, h \in G$ aus $g * x = h * x$ für alle $x \in X$ bereits $g = h$ folgt.

(i) Sei G eine abelsche Gruppe, die auf der Menge X treu-transitiv operiert. Beweise, dass es für alle $x, y \in X$ genau ein $g \in G$ gibt, sodass $g * x = y$ gilt. In diesem Fall spricht man von einer *scharf transitiven* Operation.

(ii) Zeige die Äquivalenz der in der Vorlesung gegebenen Definition von „affiner Raum“ zu folgender: Eine nicht-leere Menge $\mathbb{A}$ heißt *affiner Raum*, wenn ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V existiert, der treu-transitiv auf $\mathbb{A}$ operiert.

Aufgabe 3: 0 Punkte

Sei $\mathbb{A}$ ein affiner Raum über dem $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Beweise folgende Aussagen:

(i) Ein affiner Unterraum ist ein affiner Raum.

(ii) Der Durchschnitt einer beliebigen Familie von affinen Unterräumen ist wieder ein affiner Unterraum.