Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik und Informatik
Christian Stump
Moritz Schmitt

Elementargeometrie
Sommersemester 2014
elementargeometrie.mathseminar.org

3. Übungsblatt

Abgabe am 13/05/14
Name, Matrikelnummer und Tutorium auf Abgabe notieren

Aufgabe 1: (Satz von Thales) 2 + 8 Punkte

Seien $\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2, \mathbb{G}_3$ drei verschiedene parallele Geraden in einer affinen Ebene $\mathbb{A}$. $\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2$ seien Geraden in $\mathbb{A}$, die nicht parallel zu $\mathbb{G}_1$ sind. Bezeichne die Schnittpunkte mit $\{a_i\} = \mathbb{H}_i \cap \mathbb{G}_1$, $\{a_i'\} = \mathbb{H}_i \cap \mathbb{G}_2$ und $\{a_i''\} = \mathbb{H}_i \cap \mathbb{G}_3$. Dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass sowohl $\overrightarrow{a_1 a_1''} = \lambda \overrightarrow{a_1 a_1'}$ als auch $\overrightarrow{a_2 a_2''} = \lambda \overrightarrow{a_2 a_2'}$ gilt.

(i) Illustriere die Aussage durch eine Zeichnung.

(ii) Beweise obigen Satz unter der Verwendung von Projektionen.

Aufgabe 2: (Satz von Pappos) 2 + 1 + 2 + 5 Punkte

Sei $\mathbb{A}$ eine affine Ebene und $\mathbb{G}, \mathbb{H}$ zwei Geraden in der Ebene. Wähle drei verschiedene Punkte a, b, c auf $\mathbb{G}$ und drei verschiedene Punkte a', b', c' auf $\mathbb{H}$. Falls $\overline{ab'}$ parallel zu $\overline{bc'}$ und $\overline{ba'}$ parallel zu $\overline{cb'}$ ist, dann muss auch $\overline{aa'}$ parallel zu $\overline{cc'}$ sein.

(i) Illustriere die Aussage durch eine Zeichung.

Beweise obigen Satz in folgenden Schritten: Angenommen $\mathbb{G}, \mathbb{H}$ sind nicht parallel. Dann gibt es einen Schnittpunkt und damit eine zentrische Streckung f, die a auf b abbildet, und eine zentrische Streckung g, die b auf c abbildet.

(ii) Was ist $g \circ f(a)$ und was ist $f \circ g(a')$?

(iii) Beweise $g \circ f = f \circ g$.

(iv) Benutze den Satz von Thales, um die Aussage des Satzes von Pappos zu folgern.

Sind die Geraden parallel, so kann man in den obigen Schritten zentrische Streckungen durch Translationen ersetzen. Das müsst Ihr aber nicht aufschreiben.

Aufgabe 3: (Satz von Desargues) $2+2+3+3$ Punkte

Seien $\{a, b, c\}$ und $\{a', b', c'\}$ zwei Dreiecke in einer affinen Ebene $\mathbb{A}$, die keine gemeinsame Ecke besitzen. Die Geraden $\overline{ab}$, $\overline{a'b'}$ und $\overline{ac}$, $\overline{a'c'}$ und $\overline{bc}$, $\overline{b'c'}$ seien jeweils parallel. Dann sind die Geraden $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$ und $\overline{cc'}$ entweder parallel oder sie schneiden sich in einem Punkt.

(i) Illustriere die Aussage durch eine Zeichnung.

Beweise obigen Satz in folgenden Schritten:

(ii) Wenn sich $\overline{aa'}$ und $\overline{bb'}$ in $o \in \mathbb{A}$ schneiden, dann gibt es eine zentrische Streckung f, die a auf a' und b auf b' abbildet.

(iii) Setze $c'' = f(c)$ und beweise $c'' \in \overline{a'c'}$.

(iv) Folgere weiter, dass $c'' = c'$ und daraus dann die Aussage des Satzes.

Sind die Geraden $\overline{aa'}$ und $\overline{bb'}$ parallel, so kann man in den obigen Schritten zentrische Streckungen durch Translationen ersetzen. Das müsst Ihr aber nicht aufschreiben.

Aufgabe 4: $3+7$ Punkte

Wir nennen die konvexe Hülle eines n-Beins kurz n-*Simplex*.

(i) Gegeben sei das n-Bein $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$. Schreibe das zugehörige Parallelotop $\mathcal{P}$ als konvexe Hülle von möglichst wenigen Punkten. Diese Punkte werden *Ecken* von $\mathcal{P}$ genannt.

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass $\mathcal{P}$ in sechs Simplexe zerlegt werden kann, sodass die Ecken der Simplexe zugleich Ecken von $\mathcal{P}$ sind, sich die Simplexe höchstens im Rand scheiden und ihre Vereinigung ganz $\mathcal{P}$ ergibt.

(ii) Konstruiere eine Zerlegung von $\mathcal{P}$ in fünf 3-Simplexe.