Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik und Informatik
Christian Stump
Moritz Schmitt

Elementargeometrie
Sommersemester 2014
elementargeometrie.mathseminar.org

4. Übungsblatt

Abgabe am 20/05/14
Name, Matrikelnummer und Tutorium auf Abgabe notieren

Aufgabe 1: 10 Punkte

> »Euklids Geometrie bezieht sich nicht auf die reale Welt, sondern auf eine abstrakte, ideelle Welt, die aus beweisbaren Zusammenhängen aufgebaut ist. Allerdings ist Euklids Mathematik eng mit der realen Welt verbunden, da sie sich auf die abstrahierte aber eindeutige ideelle Welt bezieht, die die reale Welt widerspiegelt. Euklid benutzt insbesondere Argumente, die er aus der realen Welt ableitet und die dort klarerweise gelten, die aber keine logischen Konsequenzen seiner ursprünglichen Annahmen sind. Allerdings unterscheidet sich sein Zugang von einer „empirischen Geometrie" dahingehend, dass strenge logische Beweise gefordert werden. Damit eine Aussage als wahr gilt, reicht es nicht ihre Gültigkeit an Beispielen zu demonstrieren.
>
> Die moderne Mathematik geht einen Schritt weiter indem sie alle Annahmen explizit formuliert und eine konsistente mathematische Struktur beschreibt, die logisch auf diesen Annahmen zu begründen ist. Für diese Struktur ist ein Zusammenhang zur realen Welt a priori irrelevant.
>
> Diese „axiomatische Geometrie" liefert nicht nur eine Geometrie, sondern verschiedene geometrische Strukturen, die parallel ihre Berechtigung haben. Für Euklid dagegen gab es nur eine Geometrie, nämlich die, die wir heute „Euklidische Geometrie" nennen.«

Informiert Euch über Euklids „Elemente", beginnend mit der Wikipedia-Seite

`de.wikipedia.org/wiki/Euklidische_Geometrie`

und der MacTutor-Seite

`www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euclid.html`.

Konstruiere mit Zirkel und Lineal ein regelmäßiges Sechseck mit Euklids Methoden (Euklids Elemente, Buch IV, Anleitung 15, siehe `de.wikipedia.org/wiki/Sechseck`). Diskutiere mindestens zwei Eigenschaften von Dreiecken, die für diese Konstruktion nötig sind.

Aufgabe 2: 10 Punkte

Beschreibe all möglichen Inzidenzgeometrien auf der Punktmenge $\{1, 2, 3, 4\}$ entweder formal oder durch Zeichnungen. Geometrien, die zueinander isomorph sind, sollen nicht doppelt aufgelistet werden. Welche der Geometrien erfüllen das Parallelitätsaxiom (P)?

Aufgabe 3: 2 + 4 + 4 Punkte

Lese für diese Aufgabe ggf. nach, was eine Äquivalenzrelation und was eine Äquivalenzklasse ist.

Eine Inzidenzgeometrie heißt AFFINE EBENE, wenn zusätzlich zu den Inzidenaxiomen (I1), (I2) und (I3) auch noch die folgende stärkere Variante des Parallelitätsaxioms gilt:

(P′) Ist A ein Punkt und ℓ_1 eine Gerade, dann gibt es genau eine Gerade ℓ_2, die parallel zu ℓ_1 ist mit $A \in \ell_2$.

Gegeben sei eine affine Ebene mit einer Menge von Punkten X und einer Menge von Geraden $\mathcal{G}$.

(i) Beweise, dass Parallelität von Geraden eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{G}$ ist. Die Äquivalenzklasse $[\ell]$ einer Geraden ℓ wird RICHTUNG genannt.

(ii) Seien ℓ_1 und ℓ_2 nicht-parallele Geraden. Dann gibt es eine Bijektion zwischen der Richtung $[\ell_1]$ und den Punkten von ℓ_2.

(iii) Die Punkte auf je zwei Geraden können bijektiv aufeinander abgebildet werden.

Aufgabe 4: 2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte

Gegeben sei eine affine Ebene. Aus Aufgabe 3 (iii) wissen wir, dass alle Geraden dieselbe Kardinalität n besitzen, wobei wir auch $n = \infty$ erlauben. Beweise folgende Aussagen:

(i) Durch jeden Punkt gehen $n + 1$ Geraden.

(ii) Es gibt $n + 1$ Richtungen.

(iii) Jede Richtung besteht aus n Geraden, d.h. zu jeder Geraden gibt es n Parallelen.

(iv) Es gibt $n(n + 1)$ viele Geraden.

(v) Es gibt n^2 viele Punkte.