Name: Musterlösung

Matrikelnummer: ______________________

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Sei $\mathbb{A}$ ein 2-dimensionaler affiner Raum, seien $\mathbb{B}_1$ und $\mathbb{B}_2$ 1-dimensionale affine Unterräume und sei $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ eine affine Abbildung. Sei weiterhin $\{a, b, c\} \subseteq \mathbb{A}$ ein 2-Bein.

Bitte geben Sie an, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

W	Falls $\lvert \mathbb{B}_1 \cap \mathbb{B}_2 \rvert = 1$, dann sind $\mathbb{B}_1$ und $\mathbb{B}_2$ nicht parallel.
W	Falls f eine Kongruenztransformation ist, dann erhält f Winkel.
f	Falls f Winkel erhält, dann ist f eine Kongruenztransformation.
W	Jedes Parallelotop ist konvex.
W	Falls $f(x) = a + 23\,\overrightarrow{bx}$ für alle $x \in \mathbb{A}$, dann ist f eine Ähnlichkeitstransformation.

Name: Musterlösung

Matrikelnummer:

Aufgabe 2 (14 Punkte)

Sei $\mathbb{A}$ ein affiner Raum. Vier Punkte $\underbrace{a,b}, \underbrace{c,d} \in \mathbb{A}$ bilden ein Parallelogramm, falls $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cd}$ gilt. Beweisen Sie, dass sich die Diagonalen ad und bc eines Parallelogramms im Baryzentrum von $\{a, b, c, d\}$ schneiden.

Seien B_1 = Baryzentrum von $\{a,b,c,d\}$

B_2 = ——— " ——— $\{b,c\}$

B_3 = ——— " ——— $\{a,d\}$

Dann: $B_1 = \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c + \frac{1}{4}d$

$$\overset{\text{Def.}}{=} a + \frac{1}{4}(\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ac} + \overrightarrow{ad})$$

$$= a + \frac{1}{4}(\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ac} + \overrightarrow{ac} + \overrightarrow{cd})$$

$$\overset{\text{Vorr.}}{=} a + \frac{1}{4}(\overrightarrow{ab} + 2\overrightarrow{ac} + \overrightarrow{ab})$$

$$= a + \frac{1}{2}(\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ac})$$

$$= B_2$$

Analog: $B_1 = b + \frac{1}{4}(\overrightarrow{ba} + \overrightarrow{bc} + \overrightarrow{bd})$

$$= b + \frac{1}{4}(\overrightarrow{ba} + \overrightarrow{bd} + \overrightarrow{dc} + \overrightarrow{bd})$$

$$= b + \frac{1}{4}(\overrightarrow{ba} + 2\overrightarrow{bd} + \overrightarrow{ba})$$

$$= b + \frac{1}{2}(\overrightarrow{ba} + \overrightarrow{bd})$$

$$= B_3$$

Also: $B_1 = B_2 = B_3$ $\square$

Name: Musterlösung

Matrikelnummer:

Aufgabe 3 (14 Punkte)

Betrachten Sie den $\mathbb{R}^2$ als affinen Raum mit der üblichen Abtragbarkeitsregel $\overrightarrow{ab} = b - a$. Eine affine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bilde die Punkte $a = (1,1)$, $b = (2,1)$ und $c = (1,2)$ auf $f(a) = (2,4)$, $f(b) = (2,7)$ und $f(c) = (3,5)$ ab. Bestimmen Sie die Matrixform von f bezüglich des Standard-2-Beins

$$a_0 = (0,0), \quad a_1 = (1,0), \quad a_2 = (0,1).$$

Hinweis zum Selbsttest: Alle Matrixeinträge sind nicht-negativ und ganzzahlig.

$$\left.\begin{aligned} f(a) &= (2,4) \\ f(b) &= (2,7) \\ f(c) &= (3,5) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \varphi(a_1 - a_0) &= \varphi(b-a) = f(b) - f(a) = (0,3) \\ \varphi(a_2 - a_0) &= \varphi(c-a) = f(c) - f(a) = (1,1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(a_0) - a_0 &= f(a) + \varphi(\overrightarrow{a a_0}) \\ &= f(a) - \varphi(\overrightarrow{a_0 a}) \\ &= f(a) - (\varphi(a_1) + \varphi(a_2)) \\ &= (2,4) - ((0,3) + (1,1)) \\ &= (1,0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Name: Musterlösung

Matrikelnummer:

Aufgabe 4 (15 Punkte)

Bitte geben Sie an, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

- [f] In einer Inzidenzgeometrie impliziert das schwache Parallelitätsaxiom (P) das starke Parallelitätsaxiom (P').

- [f] Es existieren endliche Hilbertebenen.

- [f] Es existieren Hilbertebenen in denen sich je zwei beliebige Geraden schneiden.

- [w] In jeder Hilbertebenen gibt es zu jeder Geraden ℓ und jedem Punkt $A \notin \ell$ mindestens eine Parallele durch A.

- [f] Zwei Dreiecke $\triangle(ABC), \triangle(A'B'C')$ in einer beliebigen Hilbertebene sind kongruent, falls die Innenwinkel kongruent sind,

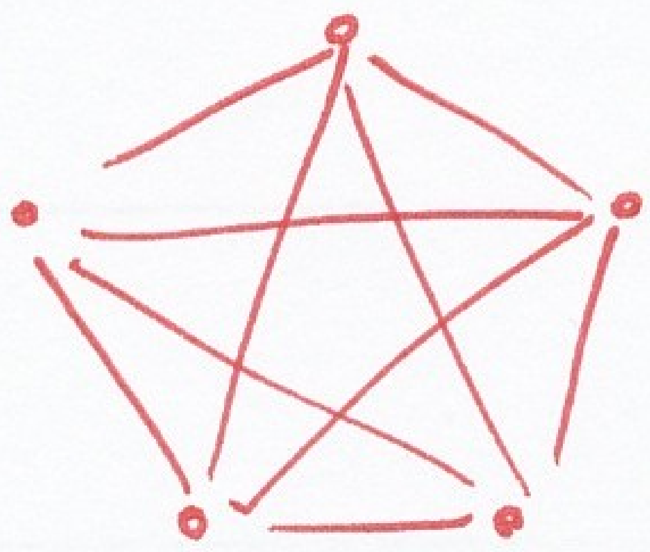
$$\angle(ABC) \cong \angle(A'B'C'), \angle(BCA) \cong \angle(B'C'A'), \angle(CAB) \cong \angle(C'A'B').$$

Name: Musterlösung

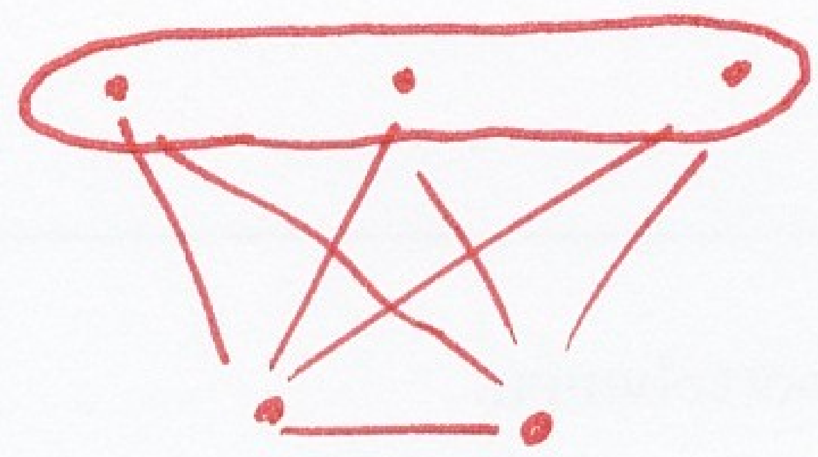
Matrikelnummer: ____________________

Aufgabe 5 (14 Punkte)

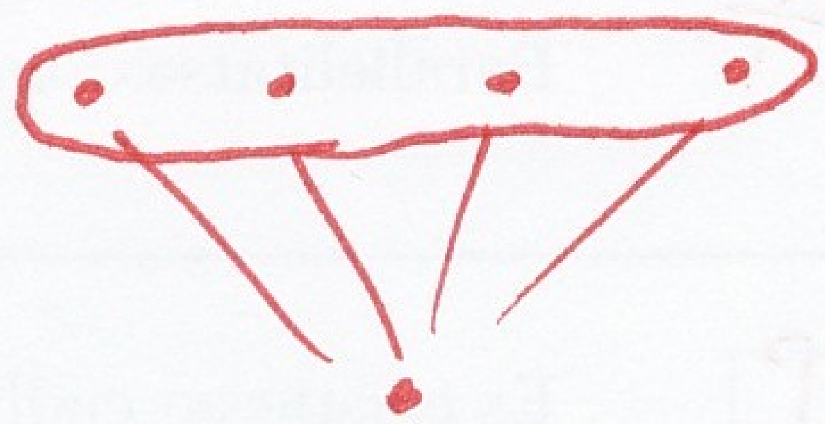
Konstruieren Sie drei nicht-isomorphe Inzidenzgeometrien auf 5 Punkten. Die Angabe der Beispiele zusammen mit einer kurzen Begründung, weshalb keine Isomorphie zwischen den Beispielen vorliegt, reicht aus. Es muss nicht begründet werden, weshalb die Beispiele Inzidenzgeometrien darstellen.



10 Geraden



8 Geraden



5 Geraden

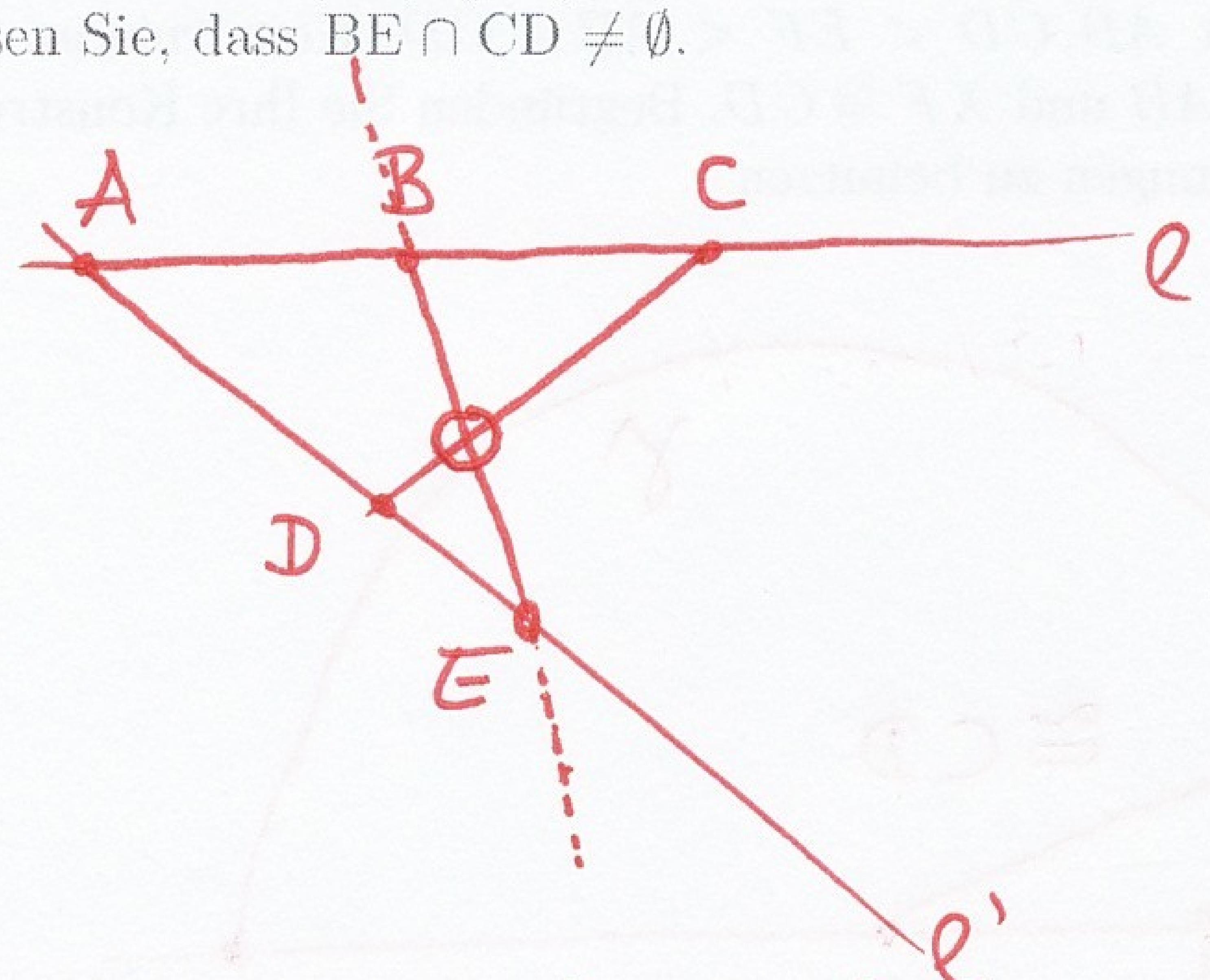
Name: Musterlösung

Matrikelnummer:

Aufgabe 6 (14 Punkte)

Gegeben sei eine Inzidenzgeometrie mit Anordnung, sowie Punkte A, B, C auf einer Geraden ℓ mit $A * B * C$ und Punkte A, D, E auf einer Geraden ℓ' mit $A * D * E$. Sei weiterhin $\ell \neq \ell'$.

Beweisen Sie, dass $\overset{\vdash\!\!\dashv}{\mathrm{BE}} \cap \overset{\vdash\!\!\dashv}{\mathrm{CD}} \neq \emptyset$.



$A * B * C \Rightarrow$ A und C auf verschiedenen Seiten von $\overline{BE}$

$A * D * E \Rightarrow$ A und D auf gl. Seiten von $\overline{BE}$

$\Rightarrow$ C und D auf verschiedenen Seiten von $\overline{BE}$

$\Rightarrow \overset{\vdash\!\!\dashv}{CD} \cap \overline{BE} \neq \emptyset$

(*) Aus Symmetrie folgt vollkommen analog

$\overset{\vdash\!\!\dashv}{BE} \cap \overline{CD} \neq \emptyset$.

Also folgt mit $\overline{BE} \cap \overline{CD} = \{S\}$, dass

$\overset{\vdash\!\!\dashv}{CD} \cap \overline{BE} = \overline{CD} \cap \overset{\vdash\!\!\dashv}{BE} = \{S\} = \overset{\vdash\!\!\dashv}{CD} \cap \overset{\vdash\!\!\dashv}{BE}$ $\square$

(*) kann man alternativ aus Ebenenzerlegung folgern.

Name: Musterlösung

Matrikelnummer:

Aufgabe 7 (4 + 10 Punkte)

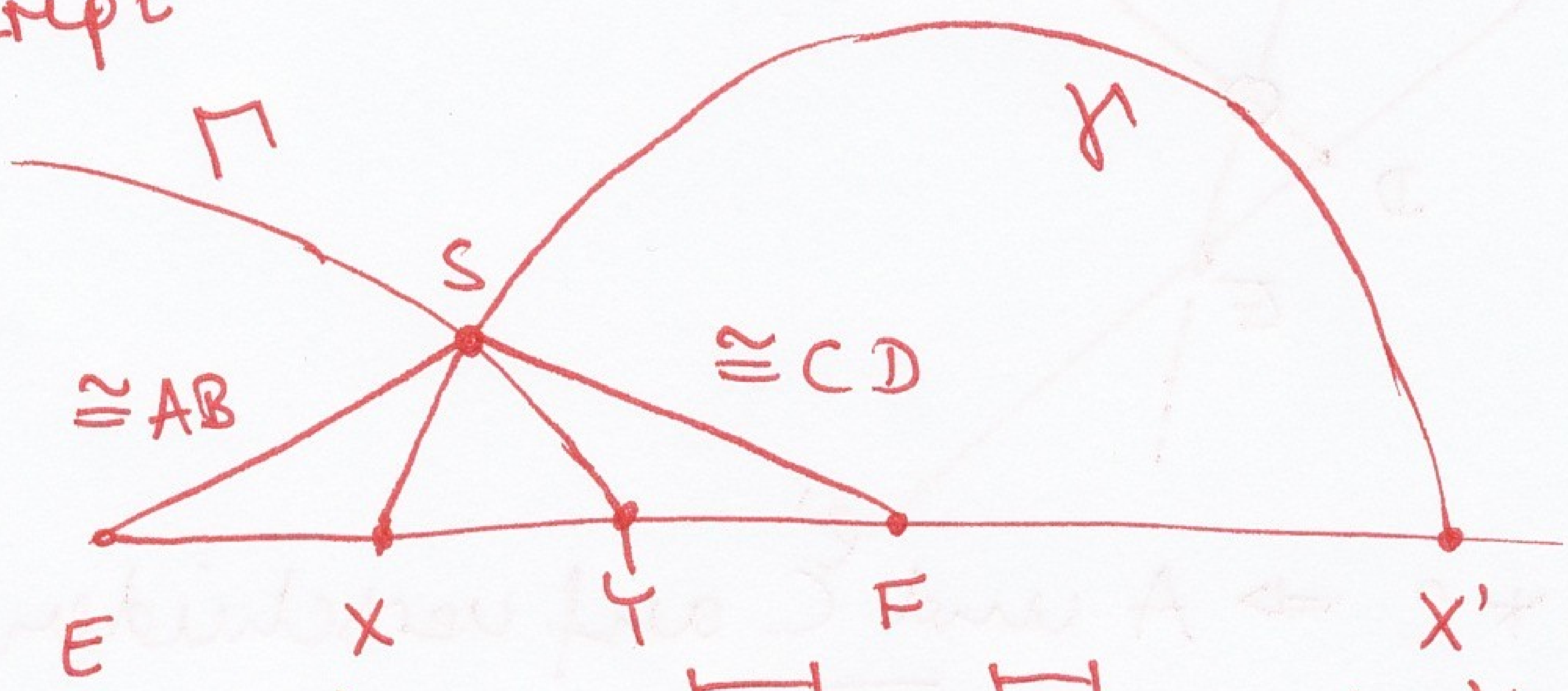
Gegeben sei eine Hilbertebene, in der das Axiom (E) des Kreis-Kreis-Schnittes gilt.

(i) Geben Sie das Axiom (E) an.

(ii) Seien A, B, C, D, E, F Punkte mit $AB, CD < EF < AB + CD$. Konstruieren Sie ein Dreieck $\triangle(EXF)$, so dass $EX \cong AB$ und $XF \cong CD$. Begründen Sie Ihre Konstruktion! Achten Sie darauf, alle Voraussetzungen zu benutzen.

(i) Skript

(ii)



Sei $Y \in \overrightarrow{EF}$ mit $\overline{EY} \cong \overline{AB}$ und $X \in \overrightarrow{FE}$ mit $\overline{FX} \cong CD$.

Aus $AB, CD < EF$ folgt $E * X * F$, $E * Y * F$.

Aus $AB + CD > EF$ folgt $E * X * Y$, $X * Y * F$.

Daraus folgt $E * X * Y * F$.

Sei $\Gamma = \mathcal{S}(E, Y)$, $\gamma = \mathcal{S}(F, X)$

Aus $E * X * Y * F$ folgt X im Inneren von Γ.

Sei X' mit $\gamma \cap \overline{EF} = \{X, X'\}$. Dann ist X' außerhalb von Γ.

Nach (E) schneiden sich Γ und γ. Sei $S \in \Gamma \cap \gamma$. Dann hat $\Delta(ESF)$ die ges. Eigenschaft

$\square$