

# Geometrie

Martin Aigner

Freie Universität Berlin

Fachbereich Mathematik und Informatik

Sommersemester 1978

**Einleitung** Mit unserer geometrischen Anschauung verbinden wir vielerlei Begriffe wie Verbinden und Schneiden, Parallelität, Projizieren, Anordnen, Messen, Strecke, Winkel, Inhalt, Fläche. Ausgehend von den einfachsten Axiomen des Verbindens und Schneidens wollen wir unseren Anschauungsraum Schritt für Schritt zusammensetzen. Auf jeder Stufe fragen wir, in wie weit der zugrundeliegende Koordinatisierungsbereich schon bestimmt ist und wie die Menge der strukturerhaltenden Abbildungen beschaffen ist. Den Abschluß bilden zwei Kapitel über unseren Anschauungsraum  $\mathbb{R}^3$ .

Die Vorlesung folgt dem Hilbert'schen Aufbau des Axiomensystems und will ähnlich wie die Bücher von Coxeter oder Hilbert-Cohn-Vossen Geometrie als gesamtes näherbringen. An Voraussetzungen werden Grundkenntnisse in Algebra und Topologie benötigt.

Neben den erwähnten Büchern

Coxeter, Introduction to Geometry, 1961,

Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Teubner, 1899,

Hilbert-Cohn-Vossen, Geometry and the Imagination, Chelsea, 1952

seien empfohlen:

**Kapitel 1** : Crapo-Rota, Combinatorial Geometries, MIT Press, 1970

**2,3** : Artin, Geometric Algebra, Interscience, 1957

**4,5** : Lenz, Grundlagen der Elementarmathematik, DVW, 1975

**6** : Grünbaum, Convex Polytopes, Interscience 1967

**7** : Ringel, Map Color Theorem, Springer, 1974



## **Inhaltsverzeichnis**

<b>1</b>	<b>Inzidenzgeometrie</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Affine Geometrie</b>	<b>25</b>
<b>3</b>	<b>Projektive Geometrie</b>	<b>57</b>
<b>4</b>	<b>Geordnete Geometrie</b>	<b>71</b>
<b>5</b>	<b>Absolute Geometrie</b>	<b>93</b>
<b>6</b>	<b>Konvexe Geometrie</b>	<b>125</b>
<b>7</b>	<b>Topologie der Fachen</b>	<b>155</b>



# 1 Inzidenzgeometrie

Grundlage für alles weitere ist die folgende

**Definition.** Es sei  $\mathcal{P}$  eine nichtleere Menge und  $\mathcal{G} \subseteq 2^{\mathcal{P}}$ ,  $\mathcal{E} \subseteq 2^{\mathcal{P}}$  zwei nichtleere Familien von Untermengen von  $\mathcal{P}$ . Das Tripel  $G = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{E})$  heißt ein *Inzidenzraum*, wenn die folgenden 3 Axiome erfüllt sind:

- I.1** i)  $\forall P \neq Q \in \mathcal{P} : \exists_1 g \in \mathcal{G}$  mit  $\{P, Q\} \subseteq g$ .  
 ii)  $g \in \mathcal{G} \Rightarrow |g| \geq 2$ .
- I.2** i)  $\forall P, Q, R \in \mathcal{P}$  nicht auf einem  $g \in \mathcal{G} : \exists_1 \alpha \in \mathcal{E}$  mit  $\{P, Q, R\} \subseteq \alpha$ .  
 ii)  $\alpha \in \mathcal{E} \Rightarrow \alpha$  enthält 3 Punkte, welche auf keinem  $g \in \mathcal{G}$  liegen.
- I.3**  $\forall P \neq Q \in \mathcal{P} \alpha \in \mathcal{E} : \{P, Q\} \subseteq \alpha \Rightarrow \overline{PQ} \subseteq \alpha$ , wobei  $\overline{PQ}$  die nach I.1 i) bestimmte  $\mathcal{G}$ -Menge ist, welche  $P, Q$  enthält.

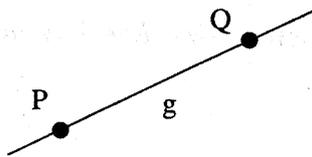


Abbildung 1: Axiom I.1

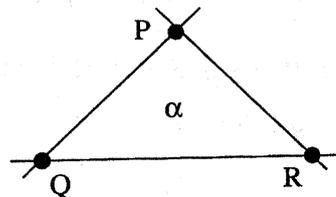


Abbildung 2: Axiom I.2

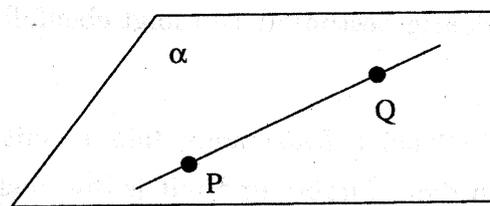


Abbildung 3: Axiom I.3

Einige Bezeichnungen: Die Elemente aus  $\mathcal{P}$  heißen *Punkte*, die Mengen aus  $\mathcal{G}$  *Geraden*, die Mengen aus  $\mathcal{E}$  *Ebenen*. Punkte werden mit  $P, Q, R, \dots$ , Ge-

raden mit  $g, h, k, \dots$  und Ebenen mit  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  bezeichnet.  $P, Q, R$  heißen *kollinear*, falls  $\{P, Q, R\} \subseteq g \in \mathcal{G}$ ;  $P, Q, R, S$  heißen *komplanar*, falls  $\{P, Q, R, S\} \subseteq \alpha \in \mathcal{E}$ . Die von zwei verschiedenen Punkten  $P \neq Q$  bestimmte Gerade wird mit  $\overline{PQ}$  bezeichnet; die von 3 nichtkollinearen Punkten  $P, Q, R$  bestimmte Ebene wird mit  $\overline{PQR}$  bezeichnet. Unter einem *Dreieck* verstehen wir 3 nichtkollineare Punkte.

Einige einfachste Folgerungen aus den Axiomen.

### Satz 1.1

- (i) Seien  $g \neq h \in \mathcal{G}$ . Dann ist  $|g \cap h| = 0$  oder 1.
- (ii) Seien  $g \in \mathcal{G}, \alpha \in \mathcal{E}, g \not\subseteq \alpha$ . Dann ist  $|g \cap \alpha| = 0$  oder 1.
- (iii)  $P \in \mathcal{P}, g \in \mathcal{G}, P \notin g$ . Dann existiert genau eine Ebene  $\alpha$  mit  $P \cup g \subseteq \alpha$ .
- (iv) Seien  $g \neq h \in \mathcal{G}, |g \cap h| = 1$ . Dann existiert genau eine Ebene  $\alpha$  mit  $g \cup h \subseteq \alpha$ .

**Beweis.** (i) folgt aus I.1, (ii) aus I.3. Sei  $P \notin g, Q \neq R \in g$ . Dann sind  $P, Q, R$  nicht kollinear, also existiert ein  $\alpha \in \mathcal{E}$  mit  $\{P, Q, R\}$  aufgrund von I.2 i) und  $\alpha$  ist eindeutig bestimmt. (iv) folgt ebenfalls aus I.2 i).  $\square$

**Definition.**  $U \subseteq \mathcal{P}$  heißt *Unterraum*, falls  $U$  mit je zwei Punkten die ganze Gerade durch diese Punkte und mit je drei nichtkollinearen Punkten die ganze Ebene durch diese Punkte enthält.

Offenbar sind  $\emptyset$ , die Punkte, die Geraden und die Ebenen (nach I.3) und ganz  $\mathcal{P}$  Unterräume. Falls  $U$  nicht ganz in einer Geraden liegt, genügt es natürlich, nur die Bedingung bezüglich der Ebenen zu fordern.

**Satz 1.2**

- (i) Der Durchschnitt von Unterräumen ist ein Unterraum.
- (ii) Jede Menge  $A \subseteq \mathcal{P}$  ist in einem kleinsten Unterraum  $\bar{A}$  enthalten, nämlich  $\bar{A} = \bigcap_{i \in I} U_i$ ,  $U_i \supseteq A$  Unterraum.
- (iii) Die Abbildung  $A \mapsto \bar{A}$  ist ein Abschluß, d.h. es gilt für alle  $A, B \subseteq \mathcal{P}$ :
- (a)  $A \subseteq \bar{A}$
  - (b)  $A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$
  - (c)  $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$
  - (d)  $\bar{A} = \bigcup_{B \subseteq A, |B| < \infty} \bar{B}$ .

**Beweis.** (i) folgt direkt aus der Definition und (ii) und die Abschlußeigenschaften in (iii) aus (i). Zum Nachweis, daß  $A \mapsto \bar{A}$  finitär ist, ist zu zeigen, daß  $C = \bigcup_{B \subseteq A, |B| < \infty} \bar{B}$  Unterraum ist. Sind  $P \neq Q \in C$ ,  $P \in \bar{B}_1$ ,  $Q \in \bar{B}_2$ , so gilt  $\{P, Q\} \subseteq \overline{B_1 \cup B_2}$ , somit  $\overline{PQ} \subseteq \overline{B_1 \cup B_2}$ , und da  $|B_1 \cup B_2| < \infty$ , folgt  $B_1 \cup B_2 \subseteq A$ , also  $\overline{PQ} \subseteq C$ . Analog schließt man  $\{P, Q, R\} \subseteq C \Rightarrow \overline{PQR} \subseteq C$ .  $\square$

Offensichtlich ist der Abschluß zweier Punkte  $P \neq Q$  genau die Gerade  $\overline{PQ}$ , also stimmen die Bezeichnungen überein; analog für die Ebene  $\overline{PQR}$  durch drei nichtkollineare Punkte. Als Folgerung haben wir:

**Satz 1.3** Die Unterräume eines Inzidenzraumes  $G$  bilden einen vollständigen Verband  $\mathcal{L}(G)$ , wobei für  $A, B \in \mathcal{L}(G)$  gilt:

$$A \wedge B = A \cap B$$

$$A \vee B = \overline{A \cup B}.$$

**Definition.** Sei  $A \subseteq \mathcal{P}$ . Der Unterraum  $\overline{A}$  heißt der von  $A$  erzeugte oder *aufgespannte* Unterraum und  $A$  ein *Erzeugendensystem* von  $\overline{A}$ .  $A$  heißt *unabhängig*, falls  $P \notin \overline{A - P}$  für alle  $P \in A$ , andernfalls *abhängig*.  $P \in \mathcal{P}$  heißt *abhängig von*  $A \subseteq \mathcal{P}$ , falls  $P \in \overline{A}$ . Eine *Basis* eines Unterraums ist eine unabhängige Teilmenge, die den Unterraum aufspannt.

Z.B. sind also je zwei verschiedene Punkte  $P, Q$  eine Basis der Geraden  $\overline{PQ}$  und je drei nichtkollineare Punkte  $P, Q, R$  eine Basis der Ebene  $\overline{PQR}$ .

Wir nehmen nun ein weiteres Axiom hinzu:

**Definition.** Ein Inzidenzraum  $G = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{C})$  heißt *planar*, falls

$$\text{I.4 } \forall \alpha, \beta \in \mathcal{E} : \alpha \cup \beta \subseteq \overline{PQRS} \Rightarrow |\alpha \cap \beta| \neq 1.$$

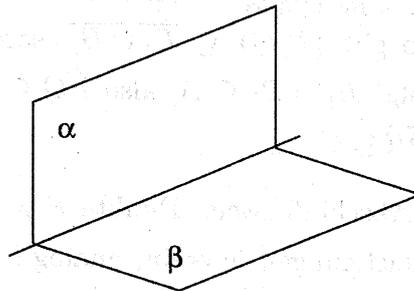
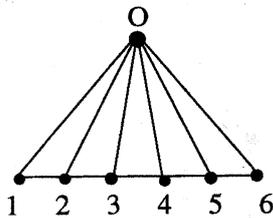


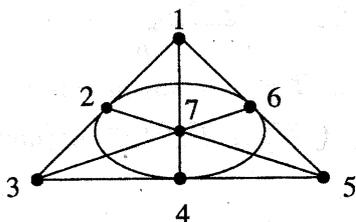
Abbildung 4: Axiom I.4

Das heißt: Liegen zwei Ebenen im Erzeugnis von 4 Punkten, so sind sie disjunkt oder sie schneiden sich in mindestens 2 Punkten und damit in einer Geraden (nach I.3).

Beispiele.

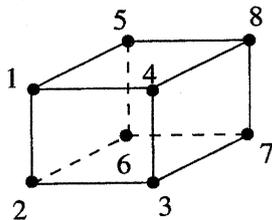


$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \{0, 1, \dots, 6\}, \\ \mathcal{G} &= \{01, 02, \dots, 06, 123456\}, \\ \mathcal{E} &= \{\mathcal{P}\}.\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \{1, \dots, 7\}, \\ \mathcal{G} &= \{123, 156, 147, 246, 257, 345, 367\}, \\ \mathcal{E} &= \{\mathcal{P}\}.\end{aligned}$$

(Fano-Ebene)



$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \{1, \dots, 8\}, \\ \mathcal{G} &= \{12, 13, \dots, 78\}, \\ \mathcal{E} &= \{1234, 5678, 1256, 3478, 1458, 2367, 1278, \\ &\quad 3456, 1357, 2468, 1467, 2358, 1368, 2457\}.\end{aligned}$$

In einem planaren Inzidenzraum lassen sich die Unterräume mittels der Ebenen beschreiben (daher der Name planar).

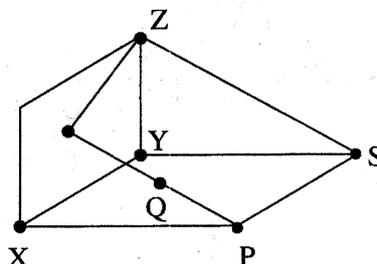
**Satz 1.4** Sei  $G$  ein planarer Inzidenzraum,  $A \subseteq \mathcal{P}$  und  $P \in A$ .  $A$  ist genau dann Unterraum, wenn  $\overline{PQR} \subseteq A$  für alle Paare  $\{Q, R\} \subseteq A$ .

**Beweis.** Nur eine Richtung ist zu zeigen.  $A$  enthält sicherlich durch je 2 Punkte die Gerade. Seien  $X, Y, Z \in A$  nichtkollinear; zu zeigen ist  $\overline{XYZ} \subseteq A$ .

$A$ , wobei wir annehmen können  $P \neq X, Y, Z$ .

Fall i)  $P \in \overline{XYZ}$ . Dann gilt o.B.d.A.  $\overline{PXY} = \overline{XYZ}$ , also nach Voraussetzung  $\overline{XYZ} \subseteq A$ .

Fall ii)  $P \notin \overline{XYZ}$ . Angenommen,  $\overline{XYZ} \not\subseteq A$  und  $Q \in \overline{XYZ} - A$ . Die Ebenen  $\overline{PXY}$  und  $\overline{PZQ}$  liegen in dem Erzeugnis der 4 Punkte  $X, Y, Z, P$ . Nach Axiom I.4 folgt, daß  $\overline{PXY} \cap \overline{PZQ} = \overline{PS}$ ,



wobei  $S \in \overline{PS} \subseteq \overline{PXY} \subseteq A$ , also  $S \in A$ .  $S \notin \overline{PZ}$ , da ansonsten  $z \in \overline{PS} \subseteq \overline{PXY}$ , also  $P \in \overline{XYZ}$ . Somit haben wir  $\overline{PZQ} = \overline{PZS} \subseteq A$  (nach Voraussetzung über  $A$ ), also  $Q \in A$ , Widerspruch.  $\square$

**Satz 1.5** Sei  $G$  planarer Inzidenzraum,  $A$  und  $B$  Unterräume und  $P \in A \cap B$ . Dann ist

$$A \vee B = \bigcup_{X \in A, Y \in B} \overline{PXY}.$$

**Beweis.** Sei  $C = \bigcup_{X \in A, Y \in B} \overline{PXY}$ . Wir müssen zeigen, daß  $C$  ein Unter-  
raum ist, d.h. daß aus  $\{R, S\} \subseteq C$  folgt  $\overline{PRS} \subseteq C$ . Sei also  $T \in \overline{PRS}$ ,  
 $R \in \overline{PX_1Y_1}$ ,  $S \in \overline{PX_2Y_2}$  mit  $\{X_1, X_2\} \subseteq A$ ,  $\{Y_1, Y_2\} \subseteq B$ .

Fall i)  $R \in A$ . Ist  $S \in A$ , so  $T \in \overline{PRS} \subseteq A \subseteq C$ ; ist  $S \in B$ , so  $T \in \overline{PRS} \subseteq C$ . Also können wir  $S \notin A \cup B$  annehmen. Ist  $X_2 \in \overline{PR}$ , so gilt  $S \in \overline{PX_2Y_2} \subseteq \overline{PRY_2}$ , also  $T \in \overline{PRS} \subseteq \overline{PRY_2} \subseteq C$ . Ist  $T \in \overline{PY_2}$ , so ist  $T \in B \subseteq C$ . Also können wir annehmen, daß  $\overline{PRX_2}$  und  $\overline{PTY_2}$  Ebenen sind. Aus Axiom I.4 folgt die Existenz von  $P' \neq P$  mit  $\overline{PP'} \subseteq \overline{PRX_2} \cap \overline{PTY_2} \subseteq A$ . Falls  $Y_2 \in \overline{PP'}$ , so haben wir  $S \in \overline{PX_2Y_2} \subseteq \overline{PP'X_2} \subseteq A$ , im Widerspruch

zur Annahme. Also ist  $\overline{PP'Y_2}$  eine Ebene und somit  $\overline{PP'Y_2} = \overline{PTY_2}$ , d.h.  $T \in \overline{PP'Y_2} \subseteq C$ . Die Fälle  $R \in B$  oder  $S \in A \cup B$  werden analog erledigt.

Fall ii)  $R, S \notin A \cup B$ .  $\overline{PRX_2}$  ist dann eine Ebene, ebenso  $\overline{PTY_2}$ . Wiederum existiert  $P' \neq P$  mit  $\overline{PP'} \subseteq \overline{PRX_2} \cap \overline{PTY_2}$ . Falls  $Y_2 \in \overline{PP'}$ , so haben wir  $Y_2 \in \overline{PRX_2}$ , also  $R \in \overline{PX_2Y_2}$ , somit  $T \in \overline{PRS} \subseteq \overline{PX_2Y_2} \subseteq C$ . Wir können also annehmen, daß  $\overline{PP'Y_2}$  eine Ebene und somit  $\overline{PTY_2} = \overline{PP'Y_2}$  ist. Da  $P' \in \overline{PRX_2} \subseteq C$  (nach Fall i)), folgt  $T \in \overline{PP'Y_2} \subseteq C$  wiederum nach Fall i).  $\square$

Mit diesen Vorbereitungen können wir nun als wichtigste Folgerung der Axiome I.1 bis I.4 die Existenz von Basen und ihre Gleichmächtigkeit nachweisen. Zunächst ein

**Hilfssatz.** Sei  $B \subseteq \mathcal{P}$  unabhängig und  $Q \notin B$ . Dann ist  $B \cup \{Q\}$  genau dann unabhängig, wenn  $Q \notin \overline{B}$ .

Die Notwendigkeit ist klar. Sei nun  $Q \notin \overline{B}$ . Wir müssen nachweisen, daß  $R \notin \overline{(B - R) \cup Q}$  für alle  $R \in B$ . Falls  $B = \{R\}$  ist, sind wir fertig. Sei nun  $P \in B - \{R\}$ . Nach Satz 1.5 haben wir  $\overline{(B - R) \cup Q} = \overline{B - R} \vee \overline{PQ} = \bigcup_{X \in \overline{B - R}} \overline{PXQ}$ . Wäre  $R \in \overline{PXQ}$  für ein  $X \in \overline{B - R}$ , so hätten wir  $Q \in \overline{PRX} \subseteq \overline{B}$ , Widerspruch.  $\square$

**Satz 1.6** Sei  $G$  ein planarer Inzidenzraum. Jeder Unterraum besitzt eine Basis und je zwei Basen haben die gleiche Mächtigkeit.

**Beweis.** Die Behauptung ist klar für  $\emptyset$ , Punkte, Geraden und Ebenen. Sei  $A$  ein Unterraum. Eine Basis von  $A$ , wenn sie existiert, muß natürlich eine maximal unabhängige Untermenge von  $A$  sein. Die Existenz maximal unabhängiger Untermengen weist man wie üblich mittels des Zorn'schen Lem-

mas nach. Dazu sei  $\mathcal{L}$  das System aller unabhängigen Teilmengen in  $A$ , geordnet durch Inklusion. Jede Kette  $\mathcal{K} = \{B_i : i \in I\}$  hat eine obere Schranke in  $\mathcal{L}$ , nämlich  $\bigcup_{i \in I} B_i \subseteq \mathcal{L}$ . Daß  $\bigcup_{i \in I} B_i$  unabhängig ist, folgt sofort aus Satz 1.2 (iii.d) (S. 7). Sei  $B$  ein maximales Element in  $\mathcal{L}$ . Wäre  $P \notin \bar{B}$  so wäre  $B \cup P$  nach dem Hilfssatz unabhängig, was unmöglich ist. Beim Nachweis der Gleichmächtigkeit der Basen beschränken wir uns auf endlich erzeugte Unterräume; der allgemeine Fall folgt dann wie für Vektorräume. Es sei  $A$  ein Unterraum und  $B \subseteq A$  Basis von  $A$  mit  $|B| < \infty$ . Sei  $C \subseteq A$  beliebige unabhängige Menge; wir müssen zeigen  $|C| \leq |B|$ . Falls  $C \subseteq B$ , ist nichts zu beweisen. Sei nun  $P_1 \in C - B$ . Dann gilt  $P_1 \in \bar{B}$ ,  $P_1 \notin \overline{C - P_1}$  also  $B \not\subseteq \overline{C - P_1}$ . Für  $Q_1 \in B - \overline{C - P_1}$  gilt  $Q_1 \notin \overline{C - P_1}$  also ist nach dem Hilfssatz  $C_1 = (C - P_1) \cup Q_1$  unabhängig. Für  $C$  gilt nun  $|C_1| = |C|$ ,  $|C_1 \cap B| > |C \cap B|$ . Nach endlich vielen Schritten erhalten wir somit  $C_t \subseteq B$  mit  $|C_t| = |C| \leq |B|$ .  $\square$

**Bemerkung:** Wir haben gleichzeitig gezeigt, daß die Basen eines Unterraumes  $A$  genau die maximal unabhängigen Mengen in  $A$  und ebenfalls genau die minimalen Erzeugendensysteme in  $A$  sind. Daraus folgt, daß jede unabhängige Menge zu einer Basis erweitert werden kann und jedes Erzeugendensystem zu einer Basis verkleinert werden kann.

**Definition.** Sei  $A$  Unterraum eines planaren Inzidenzraumes  $G$ . Die *Dimension* von  $A$  ist  $\dim A := |B| - 1$ , wobei  $B$  Basis von  $A$  ist. Hat  $\mathcal{P}$  die endliche Dimension  $n$ , so heißt  $G$  *n-dimensional*. Die  $(n - 1)$ -dimensionalen Unterräume heißen *Hyperebenen*.

Insbesondere ist also  $\dim \emptyset = -1$ , die Punkte sind die 0-dimensionalen Unterräume, die Geraden die 1-dimensionalen und die Ebenen die 2-dimensionalen.

**Satz 1.7** *Jeder Unterraum ist Durchschnitt der ihn enthaltenden Hyperebenen.*

**Beweis.** Sei  $A$  Unterraum. Angenommen  $A \subsetneq \bigcap_i H_i$ , wobei  $H_i$  alle Hyperebenen  $H_i \supseteq A$  durchläuft. Sei  $P \in \bigcap_{i \in I} H_i - A$ . Ist  $B$  Basis von  $A$ , so ist  $B \cup \{P\}$  unabhängig, also können wir  $B \cup \{P\}$  zu einer Basis  $B \cup \{P\} \cup B'$  von  $\mathcal{P}$  erweitern.  $H = \overline{B \cup B'}$  ist dann Hyperebene mit  $A \subseteq H$ ,  $P \notin H$ , Widerspruch.  $\square$

**Satz 1.8** *Sei  $G$  planarer Inzidenzraum,  $A$  und  $B$  endlich-dimensionale Unterräume mit  $A \cap B \neq \emptyset$ . Dann gilt  $\dim(A \wedge B) + \dim(A \vee B) = \dim A + \dim B$ .*

**Beweis.** Es sei  $P \in A \cap B$  und  $C$  eine Basis von  $A \cap B$  mit  $P \in C$ . Wir erweitern  $C$  zu einer Basis  $D$  von  $A$  und ebenso zu einer Basis  $E$  von  $B$ . Zu zeigen ist  $\dim(A \vee B) = |D| + |E| - |C| = |D \cup E|$ .  $D \cup E$  ist sicherlich ein Erzeugendensystem von  $A \vee B$ , da  $A \cup B = \overline{D \cup E} \subseteq \overline{D \cup E}$ . Es sei  $F \subseteq D \cup E$  eine Basis von  $A \vee B$  mit  $C \subseteq F$ . Wäre  $F \subsetneq D \cup E$  und  $Q \in (D \cup E) - F$ ,  $Q \in D$ , so hätten wir  $A \vee B = \overline{D - Q \vee E} = \bigcup_{X \in \overline{D - Q}, Y \in \overline{E}} \overline{PXY}$  nach Satz 1.5 (S. 10). Daraus folgt  $Q \in \overline{PXY}$ ,  $X \in \overline{D - Q}$ ,  $Y \in \overline{E} = B$  und wegen  $Q \notin \overline{PX}$  auch  $Y \in \overline{PXQ} \subseteq \overline{D} = A$ , d.h.  $Y \in A \cap B \subseteq \overline{D - Q}$  wegen  $Q \notin C$ . Wir schließen somit  $Q \in \overline{PXY} \subseteq \overline{D - Q}$ , Widerspruch.  $\square$

In unseren Anschauungsräumen  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  lassen sich die Punkte als *Ortsvektoren*  $a$  des Vektorraumes  $\mathbb{R}^2$  (bzw.  $\mathbb{R}^3$ ), die Geraden als Vektormengen  $a + \langle u \rangle$ , wobei  $\langle u \rangle$  der von  $u \neq 0$  erzeugte 1-dimensionale lineare Teilraum ist und die Ebenen als Vektormengen  $a + \langle u_1 \rangle + \langle u_2 \rangle$  darstellen, wobei  $u_1, u_2$  linear unabhängig sind. Da wir Punkte und Ortsvektoren identifizieren, werden wir meist die Buchstaben  $a, b, c, u, v, w$  für die Punkte verwenden. Die

Bezeichnungen  $g$  für Geraden und  $\alpha$  für Ebenen werden beibehalten. Sei  $V$  Vektorraum, dann bezeichnen wir mit  $\langle A \rangle$  den von  $A \subseteq V$  aufgespannten *linearen Unterraum* von  $V$ .

Dies gibt Anlaß zu folgender allgemeiner

**Definition.** Sei  $K$  Schiefkörper und  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum über  $K$ ,  $n \geq 2$ ,  $\mathcal{L}(V)$  der Verband der linearen Unterräume von  $V$ . Ein *affiner Unterraum* von  $V$  ist jede Menge  $A = a + U$ ,  $U \in \mathcal{L}(V)$ , und die leere Menge  $\emptyset$ . Die Familie der affinen Unterräume wird mit  $\mathcal{A}(V)$  bezeichnet.

**Satz 1.9** Sei  $A = a + U \in \mathcal{A}(V)$  und  $b \in A$ . Dann gilt:

$$(i) \quad A = b + U$$

$$(ii) \quad \text{Falls } A = a + W, \text{ dann } U = W.$$

**Beweis.**  $A$  ist eine Nebenklasse der abelschen Gruppe  $V/U$ , also durch jeden Repräsentanten bestimmt. Zu (ii) haben wir  $U = A - a = W$ .  $\square$

Jeder affine Unterraum  $A$  bestimmt also einen *eindeutigen* linearen Unterraum  $L(A)$ , so daß  $A = a + L(A)$  für jedes  $a \in A$ , und es gilt  $L(A) = A - A := \{a - a' : a, a' \in A\}$ .

**Definition.** Sei  $A \in \mathcal{A}(V)$ . Die *Dimension* von  $A$  ist  $\dim A := \dim_V L(A)$ , wobei  $\dim_V L(A)$  die gewöhnliche Vektorraumdimension ist. Zusätzlich setzen wir  $\dim \emptyset := -1$ . Wie vorhin sind die 0-dimensionalen Unterräume  $a + \langle 0 \rangle = a \in V$  die (affinen) *Punkte*, die 1-dimensionalen Unterräume  $a + \langle u \rangle$ ,  $u \neq 0$ , die (affinen) *Geraden* und die 2-dimensionalen Unterräume  $a + \langle u_1 \rangle + \langle u_2 \rangle$ ,  $u_1, u_2$  linear unabhängig, die (affinen) *Ebenen*.

Wir wollen nachweisen, daß die so definierten Punkte, Geraden, Ebenen die Axiome I.1 - I.4 erfüllen, also ein Modell eines planaren Inzidenzraumes sind, den wir in Vorwegnahme des nächsten Kapitels als *affinen Raum*  $AG(V)$  bezeichnen.

**Satz 1.10**  $AG(V)$  ist ein Inzidenzraum und die Unterräume sind genau die affinen Unterräume.

**Beweis.**

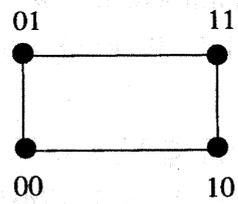
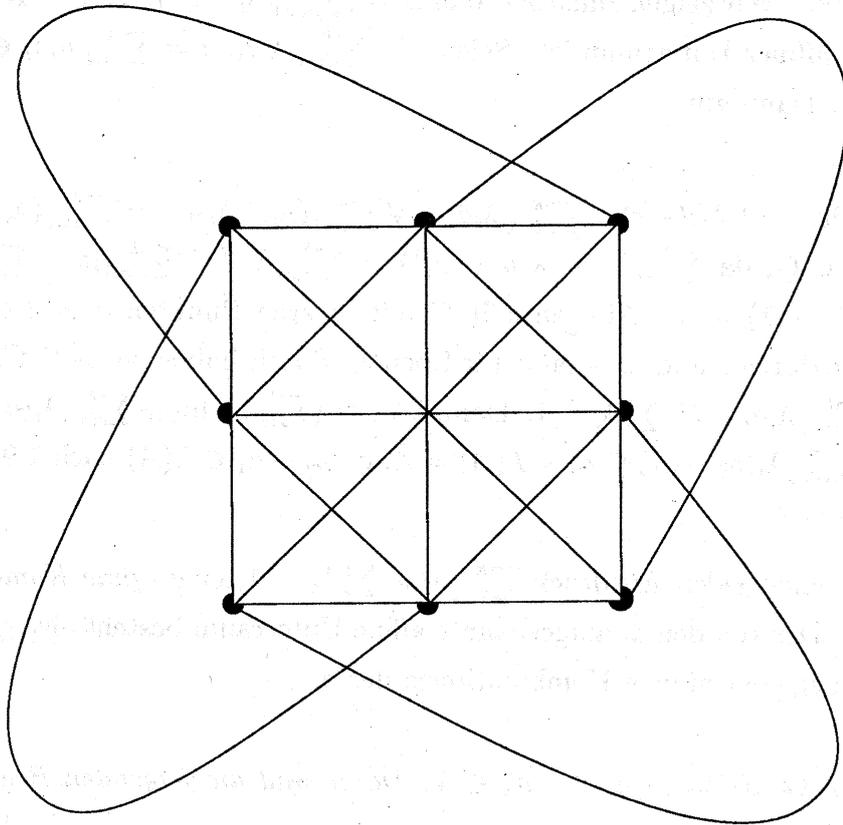
I.1 Sei  $a \neq b \in V$ .  $a$  und  $b$  sind enthalten in der Geraden  $a + \langle b - a \rangle$ . Sei  $\{a, b\} \subseteq a + \langle u \rangle$ , dann ist  $b = a + \lambda u$ , also  $\langle b - a \rangle = \langle u \rangle$ . Jede Gerade  $a + \langle u \rangle$  enthält  $a \neq a + u$ .

I.2 Seien  $a, b, c$  nicht auf einer Geraden, d.h.  $c \notin a + \langle b - a \rangle$ . Dann sind  $\{a, b, c\} \subseteq a + \langle b - a \rangle + \langle c - a \rangle$ . Aus  $\{a, b, c\} \subseteq a + \langle u_1 \rangle + \langle u_2 \rangle$  folgt  $b = a + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ ,  $c = a + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ , somit  $\langle b - a \rangle + \langle c - a \rangle \subseteq \langle u_1 \rangle + \langle u_2 \rangle$ , also  $\langle b - a \rangle + \langle c - a \rangle = \langle u_1 \rangle + \langle u_2 \rangle$ , da  $\dim(\langle b - a \rangle + \langle c - a \rangle) = 2$  ist (denn sonst hätten wir  $c - a \in \langle b - a \rangle$ ). Jede Ebene  $a + \langle u_1 \rangle + \langle u_2 \rangle$  enthält drei nichtkollineare Punkte, z.B.  $a, a + u_1, a + u_2$ .

I.3 Seien  $a \neq b$  und  $\{a, b\} \subseteq a + \langle u_1 \rangle + \langle u_2 \rangle$ . Dann ist  $b \in a + \langle u_1 \rangle + \langle u_2 \rangle$ , also  $b - a \in \langle u_1 \rangle + \langle u_2 \rangle$  und somit die Gerade  $a + \langle b - a \rangle \subseteq a + \langle u_1 \rangle + \langle u_2 \rangle$ .

Es sei  $A = a + L(A)$ . Wir müssen zeigen, daß  $A$  mit je zwei Punkten  $a_0, a_1 \in A$  die gesamte affine Gerade enthält, analog für Ebenen. Die Gerade durch  $a_0, a_1$  ist  $a_0 + \langle a_1 - a_0 \rangle \subseteq a_0 + L(A) = A$ . Die Ebene durch  $a_0, a_1, a_2$  ist  $a_0 + \langle a_1 - a_0 \rangle + \langle a_2 - a_0 \rangle \subseteq a_0 + L(A) = A$ . Es sei  $A \neq \emptyset$  ein Unterraum,  $a_0 \in A$ . Zu zeigen ist, daß  $A - a_0$  ein linearer Unterraum von  $V$  ist. Sei  $u_1 \in A - a_0$ ,  $u_2 \in A - a_0$ ,  $u_1 = a_1 - a_0$ ,  $u_2 =$

$a_2 - a_0, \lambda_1, \lambda_2 \in K$ . dann gilt  $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \lambda_1(a_1 - a_0) + \lambda_2(a_2 - a_0) \in A - a_0$ , da  $A$  die Ebene durch  $a_0, a_1, a_2$  enthält.  $\square$

**Beispiele.**Abbildung 5:  $AG(GF(2)^2)$ Abbildung 6:  $AG(GF(3)^2)$

Das dritte Beispiel  $AG(GF(2)^3)$  ist die Abbildung von Beispiel 3 (S. 9).

Entsprechend dem bisherigen untersuchen wir nun unabhängige und abhängige Mengen, Basis und Abschluß, die wir jeweils mit dem "affin" versehen.

**Satz 1.11** Sei  $A = \{a_1, \dots, a_k\} \subseteq V$ ,  $p \in V$ . Dann gilt  $p \in \bar{A}$  genau dann, wenn  $p = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i$  mit  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ . Insbesondere ist also  $A \subseteq V$  ein affiner Unterraum genau dann, wenn  $A$  mit  $a_1, \dots, a_n$  auch stets  $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$  für  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ ,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ , enthält.

**Beweis.** Wir zeigen zunächst, daß  $C = \{\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i : \lambda_1, \dots, \lambda_k \in K, \sum \lambda_i = 1\}$  ein affiner Unterraum ist. Seien  $c = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i$ ,  $d = \sum_{i=1}^k \mu_i a_i \in C$ , und  $\lambda \in K$ . Dann gilt

**Beweis.**  $c + \lambda(d - c) = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i + \lambda(\sum_{i=1}^k (\mu_i - \lambda_i) a_i) = \sum_{i=1}^k (\lambda_i + \lambda(\mu_i - \lambda_i)) a_i \in C$ , da  $\sum_{i=1}^k (\lambda_i + \lambda(\mu_i - \lambda_i)) = \sum_{i=1}^k \lambda_i + \lambda(\sum_{i=1}^k \mu_i - \sum_{i=1}^k \lambda_i) = 1 + \lambda(1 - 1) = 1$ . Also enthält  $C$  mit je zwei Punkten  $c \neq d$  die ganze Gerade durch  $c$  und  $d$ . Analog für Ebenen. Somit haben wir  $\bar{A} \subseteq C$ . Sei nun  $c = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i \in C$ ,  $\sum \lambda_i = 1$ . Dann ist  $c = (\sum_{i=1}^k \lambda_i) a_1 + \sum_{i=1}^k \lambda_i (a_i - a_1) = a_1 + \sum_{i=1}^k \lambda_i (a_i - a_1) \subseteq a_1 + L(\bar{A}) = \bar{A}$ , da  $a_i - a_1 \in L(\bar{A})$  nach 1.9 (S. 14), also  $C = \bar{A}$ .  $\square$

Wir nennen jeden Ausdruck  $\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i$ ,  $\sum \lambda_i = 1$ , eine *affine Kombination* der  $a_i$ . Der von den  $a_i$  aufgespannte affine Unterraum besteht also genau aus der Menge der affinen Kombinationen der  $a_i$ .

**Satz 1.12** Seien  $a_0, a_1, \dots, a_k \in V$ . Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent

(i)  $\{a_0, a_1, \dots, a_k\}$  ist affin unabhängig.

(ii)  $\{a_0 - a_r, \dots, a_{r-1} - a_r, a_{r+1} - a_r, \dots, a_k - a_r\}$  ist linear unabhängig für jedes  $r$ .

(iii)  $\sum_{i=0}^k \lambda_i a_i = 0, \sum \lambda_i = 0$ , impliziert  $\lambda_i = 0$  für alle  $i$ .

(iv)  $\sum_{i=0}^k \lambda_i a_i = \sum_{i=0}^k \mu_i a_i$  mit  $\sum_{i=0}^k \lambda_i = \sum_{i=0}^k \mu_i = 1$  impliziert  $\lambda_i = \mu_i$  für alle  $i$

### Beweis.

i)  $\Rightarrow$  ii). Sei  $a_j - a_r \in \langle a_0 - a_r, \dots, a_{r-1} - a_r, a_{r+1} - a_r, \dots, a_k - a_r \rangle$ . Dann gilt  $a_j = a_r + \sum_{i \neq r, j} \lambda_i (a_i - a_r) = \sum_{i \neq r, j} \lambda_i a_i + (1 - \sum_{i \neq r, j} \lambda_i) a_r$ , also ist  $a_j \in \overline{\{a_0, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_k\}}$ .

ii)  $\Rightarrow$  iii). Sei  $\sum_{i=0}^k \lambda_i a_i = 0$  mit  $\sum \lambda_i = 0$  und  $\lambda_r \neq 0$ . Dann haben wir  $\lambda_r = -\sum_{i \neq r} \lambda_i$ , also  $\sum_{i \neq r} \lambda_i (a_i - a_r) = 0$ .

iii)  $\Rightarrow$  iv). Unmittelbar klar.

iv)  $\Rightarrow$  i). Ist  $a_r \in \overline{\{a_0, \dots, a_{r-1}, a_{r+1}, \dots, a_k\}}$ ,  $a_r = \sum_{i \neq r} \lambda_i a_i$ ,  $\sum_{i \neq r} \lambda_i = 1$ , so haben wir zwei verschiedene affine Kombinationen der  $a_0, \dots, a_k$ , wobei einmal der Koeffizient von  $a_r$  1 ist, das andere Mal 0.  $\square$

Sei  $\{a_0, a_1, \dots, a_k\}$  eine affine Basis des affinen Unterraumes  $A$ . Satz 1.12 (iv) besagt, daß jeder Punkt in  $A$  auf genau eine Weise als affine Kombination der Basispunkte dargestellt werden kann. Ferner ersieht man aus 1.12(i) und 1.12(ii), daß jede Basis eines endlich erzeugten affinen Unterraumes gleich viele Elemente enthält und daß  $\dim A = \dim_V L(A)$  (als linearer Unterraum).

Wir haben nun eine bequeme Darstellung von Geraden und Ebenen.

Seien  $a \neq b \in V$ . Dann ist die Gerade  $\overline{ab} = \{\lambda a + (1-\lambda)b : \lambda \in K\}$  und jeder Punkt auf  $\overline{ab}$  korrespondiert zu genau einem  $\lambda \in K$ . Seien  $a, b, c \in V$  nicht kollinear, dann ist die Ebene  $\overline{abc} = \{\lambda a + \mu b + (1-\lambda-\mu)c : \lambda, \mu \in K\}$  und zu jedem Punkt auf der Ebene  $\overline{abc}$  korrespondiert genau ein Paar  $(\lambda, \mu) \in K^2$ .

**Beispiel.** Sei  $K = \text{GF}(q)$  und  $\dim V = n$ . Dann enthält jede Gerade  $q$  Punkte, jede Ebene  $q^2$  Punkte und allgemein jeder  $k$ -dimensionale affine Unterraum  $q^k$  Punkte. Durch jeden Punkt gehen  $\frac{q^n-1}{q-1}$  Geraden, durch jede Gerade  $\frac{q^n-q}{q^2-q}$  Ebenen.

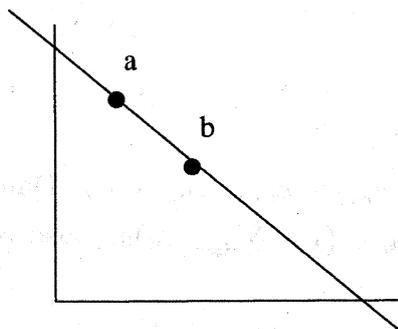


Abbildung 7: Figur 1.4

Um nochmals den Unterschied zwischen linearer und affiner Unabhängigkeit aufzuzeigen: „Linear unabhängig“ impliziert affin unabhängig und somit enthält das lineare Erzeugnis stets das affine Erzeugnis. Seien  $a, b \in \mathbb{R}^2$  linear unabhängig, dann ist  $\langle a, b \rangle = \mathbb{R}^2$ , aber  $\overline{ab}$  die Gerade durch  $a, b$ .

Wir wissen, daß in  $\mathcal{L}(V)$  die modulare Gleichung für Unterräume erfüllt ist, d.h.  $\dim_V(A \wedge B) + \dim_V(A \vee B) = \dim_V A + \dim_V B$  für  $A, B \in \mathcal{L}(V)$ . Wir wollen dies auf affine Räume übertragen.

**Satz 1.13** Seien  $A, B \in \mathcal{A}(V)$ .

$$(i) \quad A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \cap B = a + (L(A) \cap L(B)), \quad a \in A \cap B.$$

$$(ii) \quad A \vee B = a + L(A) + L(B) + \langle b - a \rangle, \quad a \in A, \quad b \in B.$$

$$(iii) \quad \dim(A \vee B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B), \quad \text{falls } A \cap B \neq \emptyset \\ \dim(A \vee B) = \dim(L(A) + L(B)) + 1, \quad \text{falls } A \cap B = \emptyset.$$

**Beweis.**

- (i) Sei  $L = L(A) \cap L(B)$ . Dann ist  $a + x \in A \cap B$  für alle  $x \in L$ , also  $a + L \subseteq A \cap B$ . Für  $y \in A \cap B$  gilt  $y - a \in L(A) \cap L(B)$ , somit  $y \in a + L$ , d.h.  $A \cap B \subseteq a + L$ .
- (ii)  $C = a + L(A) + L(B) + \langle b - a \rangle$  ist ein affiner Unterraum mit  $A \vee B \subseteq C$ . Zur Umkehrung zeigen wir  $L(C) \subseteq L(A \vee B)$ . Wir haben  $L(A) + L(B) \subseteq L(A \vee B)$ ,  $\langle b - a \rangle \subseteq L(A \vee B)$ , also  $L(C) = L(A) + L(B) + \langle b - a \rangle \subseteq L(A \vee B)$ .
- (iii) Es sei  $A \cap B \neq \emptyset$ ,  $c \in A \cap B$  und  $a \in A$ ,  $b \in B$ . Dann haben wir  $c = a + u = b + v$ ,  $u \in L(A)$ ,  $v \in L(B)$ , also  $b - a = u - v \in L(A) + L(B)$ . Nach (ii) gilt somit  $A \vee B = a + L(A) + L(B)$ , woraus  $\dim(A \vee B) = \dim_V(L(A) + L(B)) = \dim_V L(A) + \dim_V L(B) - \dim_V(L(A) \cap L(B)) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$  folgt. Falls  $A \cap B = \emptyset$ , so folgt nach demselben Schluß  $b - a \notin L(A) + L(B)$ , also  $L(A \vee B) = L(A) + L(B) + \langle b - a \rangle$  und somit  $\dim(A \vee B) = \dim_V(L(A) + L(B)) + 1$ .  $\square$

Als unmittelbare Folgerung von Satz 1.13 (iii) haben wir:

**Satz 1.14**  $AG(V)$  ist ein planarer Inzidenzraum.

**Beispiele** Es seien  $g = a + \langle u \rangle$ ,  $h = b + \langle v \rangle$  zwei Geraden in  $AG(V)$ .

- (i)  $\langle u \rangle = \langle v \rangle$ ,  $b - a \in \langle u \rangle$ . Dann ist  $b \in a + \langle u \rangle$ , also  $b + \langle u \rangle \subseteq a + \langle u \rangle$ , das heißt, die Geraden sind *gleich*,  $g = h$ .
- (ii)  $\langle u \rangle = \langle v \rangle$ ,  $b - a \notin \langle u \rangle$ . Nach 1.13 (i) spannen  $g$  und  $h$  die Ebene  $g \vee h = a + \langle u \rangle + \langle b - a \rangle$  auf. außerdem gilt  $g \cap h = \emptyset$ , da aus  $c = a + \lambda u = b + \mu u$  folgen würde  $b - a \in \langle u \rangle$ . Geraden, die in einer Ebene liegen und disjunkt sind, nennen wir *parallel*,  $g \parallel h$ .

- (iii)  $\langle u \rangle \neq \langle v \rangle$ ,  $b-a \in \langle u \rangle + \langle v \rangle$ . Nach 1.13 (ii) gilt  $g \vee h = a + \langle u \rangle + \langle v \rangle$ , die Geraden liegen also in einer Ebene. Sei  $b-a = \lambda u + \mu v$ , dann gilt  $c = a + \lambda u = b - \mu v \in g \cap h$ . Die Geraden *schneiden* einander also in einem (eindeutigen) Punkt.
- (iv)  $\langle u \rangle \neq \langle v \rangle$ ,  $b-a \notin \langle u \rangle + \langle v \rangle$ . Wir haben  $g \vee h = a + \langle u \rangle + \langle v \rangle + \langle b-a \rangle$ , also  $\dim(g \vee h) = 3$ . Aus 1.13 (iii) folgt, daß  $g \cap h = \emptyset$ . In diesem Fall sagen wir, die Geraden stehen *windschief* zueinander.

### Aufgaben

1. Sei  $G$  planarer Inzidenzraum,  $A \subseteq \mathcal{P}$ . Zeige:  $P \notin \overline{A}$ ,  $P \in \overline{A \cup Q} \Rightarrow Q \in \overline{A \cup P}$ .
2. Sei  $V = K^n$ . Zeige,  $A = \{(a_1, \dots, a_n) : \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i + \beta\}$  eine Hyperebene ist für jede Wahl  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \beta$ , und daß umgekehrt jede Hyperebene so beschrieben werden kann.
3. Sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$  mit  $\text{char } K \neq 2$ . Zeige, daß dann  $A = \emptyset$  ein Unterraum ist, genau dann, wenn  $\lambda a + (1-\lambda)b \in A$  für alle  $a, b \in A$ ,  $\lambda \in K$ . Das heißt, in diesem Fall ist  $A$  ein Unterraum, wenn  $A$  mit je zwei Punkten die Gerade enthält (auf die Ebenen-Bedingung kann in diesem Fall verzichtet werden).
4. Zeige an Hand von  $AG(GF(2)^3)$  (Abbildung von Beispiel 3 auf S. 9), daß auf die Bedingung  $\text{char } K \neq 2$  in 3. nicht verzichtet werden kann.
5. Sei  $V = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] : \text{Grad}(f(x)) \leq n-1\}$  und  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  verschiedene reelle Zahlen  $\beta_1, \dots, \beta_k$  beliebig in  $\mathbb{R}$ . Sei  $A_i := \{f \in V : f(\alpha_i) = \beta_i\}$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $A = \bigcap_{i=1}^k A_i$ . Zeige:
  - (a)  $A_i$  ist eine Hyperebene mit  $L(A_i) = \{f \in V : f(\alpha_i) = 0\}$ .

- (b)  $A$  ist  $(n - k)$ -dimensionaler affiner Unterraum mit  $L(A) = a + \bigcap_{i=1}^k L(A_i)$ ,  $a \in A$ .



## 2 Affine Geometrie

Sei  $G = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{E})$  ein Inzidenzraum. Entsprechend dem Beispiel für Geraden in  $AG(V)$  gegeben wir folgende

**Definition.** Zwei Geraden  $g, h$  eines Inzidenzraumes heißen *parallel*, wenn  $g = h$  oder wenn  $g$  und  $h$  in einer Ebene liegen und disjunkt sind. Wir schreiben dann  $g \parallel h$ .

**Definition.** Ein planer Inzidenzraum  $G = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{E})$  heißt ein *affiner Raum*, wenn zusätzlich das folgende Axiom erfüllt ist:

$$\forall P \in \mathcal{P}, g \in \mathcal{G}: \exists_1 h \in \mathcal{G} \text{ mit } P \in h, h \parallel g$$

Axiom II heißt *Parallelenaxiom*

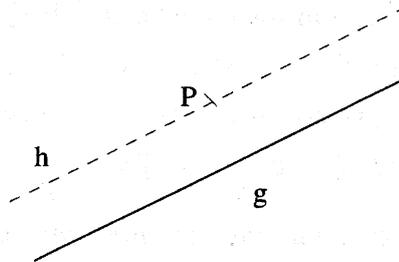


Abbildung 8:

**Satz 2.1** Die Parallelität ist eine Äquivalenzrelation auf  $G$ .

**Beweis.** Die Reflexivität und Symmetrie sind klar. Seien nun  $g \parallel h$  und  $h \parallel k$ , wobei wir annehmen können, daß alle drei Geraden verschieden

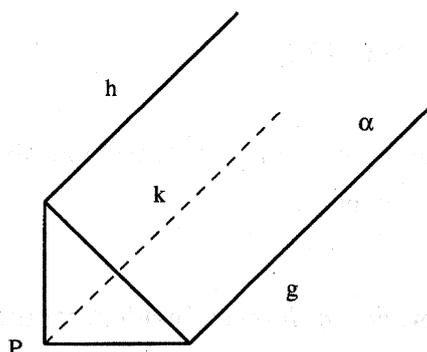


Abbildung 9:

sind. Liegen  $g, h, k$  in einer Ebene  $\alpha$  und ist  $P \in g \cap h$ , so wären  $g$  und  $k$  zwei verschiedene Parallelen zu  $h$  durch  $P$ , im Widerspruch zu II. Es sei nun  $\alpha = \overline{gh}$  und  $P \in k, P \notin \alpha$ . Wir bezeichnen mit  $\beta, \gamma$  die Ebenen  $\beta = \overline{gP}, \gamma = \overline{hP}$ . Da  $\beta \cup \gamma \subseteq \overline{\alpha P}$  ist, folgt aus I.4, daß  $\beta \cap \gamma = \ell \in \mathcal{G}$ . Hätten  $g$  und  $\ell$  einen Schnittpunkt  $Q$ , so müßte  $\ell$  auch  $h$  schneiden, da ansonsten  $g$  und  $\ell$  zwei verschiedene Parallelen zu  $h$  durch  $Q$  wären. Dann läge aber  $\ell \subseteq \overline{g \cup h} = \alpha$  und somit  $P \in \alpha$ . Also ist  $g \cap \ell = \emptyset$  und analog  $h \cap \ell = \emptyset$ . Aus II folgt nun  $\ell = k$ , da ansonsten  $k$  und  $\ell$  verschiedene Parallelen zu  $h$  durch  $P$  wären. Da  $g \cup k \subseteq \beta$  ist, folgt  $g \parallel h$ .  $\square$

Das Parallelenaxiom ergibt eine interessante unmittelbare Folgerung.

**Satz 2.2** *In einem affinen Raum  $G$  haben je zwei Geraden gleiche Mächtigkeit.*

**Beweis.** Seien  $g \neq h \in \mathcal{G}$ . Wir nehmen zunächst an, daß  $g$  und  $h$  in einer Ebene  $\alpha$  liegen. Es sei  $P \in g, P \notin h$  und  $Q \in h, Q \notin g$ , und  $k = \overline{PQ}$ . Jede zu  $k$  parallele Gerade  $k'$  in  $\alpha$  schneidet  $g$  und  $h$  in je einem Punkt (wegen 2.1) oder in dem eventuell vorhandenen Schnittpunkt von  $g$  und  $h$ . Also ist

$|g| = |h|$ . Sind  $g$  und  $h$  nicht in einer Ebene, so gibt es eine Gerade, die mit  $g$  in einer Ebene liegt und ebenso mit  $h$  (z.B. jede Verbindungsgerade von Punkten auf  $g$  und  $h$ ).  $\square$

**Bemerkung.** Ist  $|g| = n$  endlich für  $g \in \mathcal{G}$ , so heißt  $n$  die *Ordnung* des affinen Raumes. Ist  $\dim G \geq 3$ , so werden wir sehen, daß  $n$  eine Primzahlpotenz sein muß. Ob dies auch stets für affine Ebenen zutrifft, ist ein ungelöstes Problem.

**Satz 2.3** Sind  $g$  und  $h$  sowie  $g'$  und  $h'$  schneidene Geraden und gilt  $g \parallel g'$ ,  $h \parallel h'$ , so sind die Ebenen  $\overline{gh}$  und  $\overline{g'h'}$  gleich oder disjunkt.

**Beweis.** Sei  $P \in \overline{gh} \cap \overline{g'h'}$  und  $k$  Parallele zu  $g$  durch  $P$  und  $\ell$  Parallele zu  $h$  durch  $P$ . Dann ist nach 2.1  $k \parallel g'$ ,  $\ell \parallel h'$  und  $k \cup \ell \subseteq \overline{gh}$ ,  $k \cup \ell \subseteq \overline{g'h'}$  also  $\overline{gh} = \overline{g'h'}$ .  $\square$

**Satz 2.4** Satz von Desargues. Es sei  $G$  ein affiner Raum der Dimension  $\geq 3$ .  $PQR$  und  $P'Q'R'$  seien Dreiecke (alle 6 Punkte verschieden). Gilt  $\overline{PQ} \parallel \overline{P'Q'}$ ,  $\overline{PR} \parallel \overline{P'R'}$  und sind die (verschiedenen) Geraden  $\overline{PP'}$ ,  $\overline{QQ'}$ ,  $\overline{RR'}$  entweder parallel oder sie schneiden sich in einem Punkt, so gilt auch  $\overline{QR} \parallel \overline{Q'R'}$ .

**Beweis.** Wir nehmen zunächst an  $PQR$  und  $P'Q'R'$  liegen in verschiedenen Ebenen.  $Q, R, Q', R'$  liegen nach Voraussetzung in einer Ebene. Nach 2.3 gilt  $\overline{QR} \cap \overline{Q'R'} = \emptyset$ , da die Ebenen  $\overline{PQR}$ ,  $\overline{P'Q'R'}$  verschieden sind, also ist  $\overline{QR} \parallel \overline{Q'R'}$ . Es seien nun  $PQR, P'Q'R'$  in einer Ebene und  $O = \overline{PP'} \cap \overline{QQ'} \cap \overline{RR'}$  gemeinsamer Schnittpunkt (der Fall  $\overline{PP'} \parallel \overline{QQ'} \parallel \overline{RR'}$  geht analog). Nach Voraussetzung existiert  $Z \notin \overline{PQR}$ . Die zu  $\overline{ZP}$  parallele

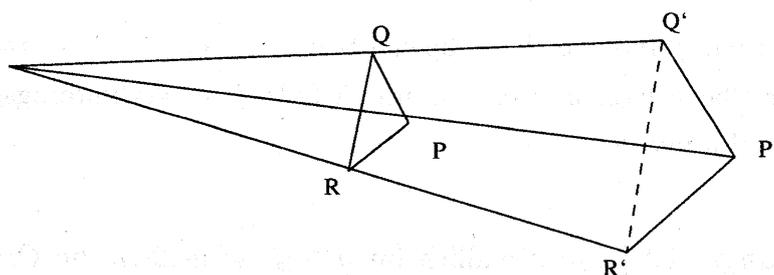


Abbildung 10:

Gerade  $g$  durch  $P'$  schneidet  $\overline{OZ}$  in einem Punkt  $Z'$ , da aus  $\overline{OZ} \parallel g$  folgt  $\overline{OZ} \parallel \overline{Z'P}$ , Widerspruch. Die Dreiecke  $PQZ$ ,  $P'Q'Z'$  liegen in verschiedenen Ebenen, also folgt nach dem ersten Teil des Beweises  $\overline{ZQ} \parallel \overline{Z'Q'}$ . Ebenso liegen die Dreiecke  $PRZ$ ,  $P'R'Z'$  in verschiedenen Ebenen, also  $\overline{ZR} \parallel \overline{Z'R'}$ . Schließlich liegen die Dreiecke  $QRZ$ ,  $Q'R'Z'$  in verschiedenen Ebenen, also gilt  $\overline{QR} \parallel \overline{Q'R'}$ .  $\square$

**Bemerkung.** In affinen Ebenen braucht der Satz von Desargues nicht zu gelten. Das Studium dieser nichtdesargues'schen Ebenen ist eines der Hauptprobleme der affinen Geometrie. Die kleinste nichtdesargues'sche Ebene hat 81 Punkte. Ein Beispiel einer unendlichen nichtdesargues'schen Ebene ist in der Aufgabe enthalten.

Wie schon der vorweggenommene Name affiner Raum  $AG(V)$  besagt, erfüllen die Räume  $AG(V)$  das Parallellaxiom.

**Satz 2.5**  $AG(V)$  ist ein affiner Raum.

**Beweis.** Laut dem Beispiel am Ende von Kapitel 1 sind Geraden  $g = a + \langle u \rangle$ ,  $h = b + \langle v \rangle$  parallel genau dann, wenn  $\langle u \rangle = \langle v \rangle$ . Sei  $g = a + \langle u \rangle$



(iii) Die Parallelität ist eine Äquivalenzrelation auf Unterräumen gleicher Dimension.

**Beweis.** Falls  $A \parallel B$ , z.B.  $L(A) \subseteq L(B)$  und  $c \in A \cap B$  dann gilt  $A = c + L(A) \subseteq c + L(B) = B$ . Seien  $A, B$  Hyperebenen. Sind  $A, B$  nicht parallel, so haben wir  $V = L(A) + L(B)$ . Sei  $a \in A, b \in B$ , dann ist  $b - a = u + v$ ,  $u \in L(A), v \in L(B)$ , also ist  $a + u = b - v \in A \cap B$ . III) ist klar, da parallele affine Räume gleicher Dimension denselben linearen Unterraum haben.  $\square$

Wir wenden uns den strukturerhaltenden Abbildungen zu.

**Definition.** Sei  $G = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{E})$  ein Inzidenzraum. Eine *Kollineation* von  $G$  ist eine bijektive Abbildung  $\varphi$  von  $\mathcal{P}$  auf sich, die Geraden auf Geraden abbildet und Ebenen auf Ebenen. Das heißt,  $\varphi g \in \mathcal{G}$  für  $g \in \mathcal{G}$  und  $\varphi \alpha \in \mathcal{E}$  für  $\alpha \in \mathcal{E}$ .

**Satz 2.7** Die Kollineationen eines Inzidenzraumes  $G$  bilden mit der Komposition eine Gruppe  $\text{Koll}(G)$ . Eine Kollineation bildet Unterräume auf Unterräume ab und es gilt  $\varphi \bar{A} = \overline{\varphi A}$  für  $A \subseteq \mathcal{P}$ .

**Beweis.** Klarerweise ist mit  $\psi, \varphi \in \text{Koll}(G)$  auch  $\psi\varphi \in \text{Koll}(G)$ . Sei  $h \in \mathcal{G}$  und  $P \neq Q \in \varphi^{-1}h$ . Die Gerade  $g = \overline{PQ}$  wird dann durch  $\varphi$  auf die Gerade  $\overline{\varphi P \varphi Q} = h$  abgebildet, also ist  $\varphi^{-1}h = g \in \mathcal{G}$ . Ebenso beweist man  $\alpha \in \mathcal{E} \Rightarrow \varphi^{-1}\alpha \in \mathcal{E}$ . Daraus folgt sofort, daß das Bild eines Unterraums wieder ein Unterraum ist und umgekehrt. Da wegen der Bijektivität trivialerweise  $\varphi(A \cap B) = \varphi(A) \cap \varphi(B)$  und  $A, B \subseteq \mathcal{L}(G)$  gilt, folgt  $\varphi \bar{A} = \varphi(\bigcap A_i) = \bigcap \varphi A_i = \overline{\varphi A}$ .  $\square$

**Beispiel.** Betrachten wir die Fano-Ebene  $F$  in Figur ?? . Eine Kollineation ist eindeutig durch das Bild des Dreiecks  $\{1, 3, 5\}$  bestimmt und als Bild von  $\{1, 3, 5\}$  kann jedes Dreieck genommen werden. Also ist  $|\text{Koll}(F)| = 7 \cdot 6 \cdot 4 = 168$ .

**Satz 2.8** Sei  $G = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{E})$  Inzidenzraum. Eine Bijektion  $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  ist genau dann eine Kollineation, wenn  $\varphi$  Geraden auf Geraden abbildet und parallele Geraden in parallele Geraden überführt.

**Beweis.** Kollineationen erhalten die Parallelität. Denn aus  $g, h \subseteq \alpha, g \cap h = \emptyset$  folgt  $\varphi g, \varphi h \subseteq \varphi \alpha$  und  $\varphi g \cap \varphi h = \emptyset$ . Zum Beweis der Umkehrung sei  $E$  Ebene. Angenommen  $\varphi E$  enthält 4 unabhängige Punkte  $\varphi P, \varphi Q, \varphi R, \varphi S$ . Dann sind die Geraden  $\overline{\varphi P \varphi Q}, \overline{\varphi R \varphi S}$  disjunkt, also deren Urbilder  $\overline{PQ}, \overline{RS} \subseteq E$  parallel und somit auch  $\overline{\varphi P \varphi Q}, \overline{\varphi R \varphi S}$  parallel im Widerspruch zur Dimension 3.  $\varphi E$  liegt also in einer Ebene  $F$ . Aus derselben Überlegung folgt nun  $\varphi^{-1} F \subseteq E$ , da  $\varphi^{-1} F$  das Dreieck  $P, Q, R \subseteq E$  enthält, somit  $F = \varphi E$ .  $\square$

Auf die Forderung, daß  $\varphi$  die Parallelität erhält, kann nicht verzichtet werden. Z.B. ist im affinen Raum aus Abbildung 10(iii) jede Bijektion geradenerhaltend, aber die Abbildung, welche 4 und 8 vertauscht und den Rest festläßt, keine Kollineation.

Wir setzen von nun an voraus, daß der Raum  $G = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{E})$  affin ist, und spezialisieren die Kollineationen zu jenen, die jede Gerade in eine parallele Gerade überführen.

**Definition.** Sei  $G = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{E})$  affiner Raum. Eine Bijektion  $\delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  heißt *Dehnung*, falls  $\delta g \parallel g$  für alle  $g \in \mathcal{G}$ . Eine fixpunktfreie Dehnung heißt *Translation*.

Dehnungen und Translationen erhalten die Parallelität von Geraden und sind somit nach 2.8 Kollineationen des Raumes.

**Satz 2.9**

(i) Ist  $O$  Fixpunkt einer Dehnung  $\delta$  und  $P \neq O$ , so ist  $\delta P \in \overline{OP}$ .

(ii) Ist  $\tau$  Translation,  $\tau \neq 1$ , so gilt  $\overline{P\tau P} \parallel \overline{Q\tau Q}$  für  $P, Q \in \mathcal{P}$ .

**Beweis.** Aus  $\delta O = O$  folgt  $\overline{\delta O \delta P} = \overline{O \delta P} \parallel \overline{OP}$ , also  $\overline{O \delta P} = \overline{OP}$  und somit  $\delta P \in \overline{OP}$ . Sei nun  $\tau \neq 1$  Translation. Falls  $\tau P \in \overline{PQ}$ , so ist wegen  $\overline{\tau P \tau Q} \parallel \overline{PQ}$  auch  $\tau Q \in \overline{PQ}$ , also liegen alle Punkte  $P, Q, \tau P, \tau Q$  auf einer Geraden, woraus trivialerweise  $\overline{P\tau P} \parallel \overline{Q\tau Q}$  folgt. Sei nun  $\tau P \notin \overline{PQ}$ . Falls  $Z \in \overline{P\tau P} \cap \overline{Q\tau Q}$ , so ist  $\tau Z \in \overline{P\tau P} \cap \overline{Q\tau Q}$ , da die Gerade  $\overline{P\tau P}$  in sich übergeht, ebenso  $\overline{Q\tau Q}$ , somit  $\tau Z = Z$ . Widerspruch.  $\square$

2.9 (ii) kann man auch so ausdrücken, daß für alle  $P \neq Q \in \mathcal{P}$  und  $\tau P \notin \overline{PQ}$  die 4 Punkte  $P, Q, \tau P, \tau Q$  die Ecken eines Parallelogramms sind. Anschaulich

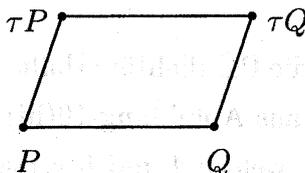


Abbildung 12:

gesprochen verschiebt also  $\tau$  jeden Punkt in derselben Richtung. Dies gibt Anlaß zu folgender

**Definition.** Zwei Translationen  $\tau \neq 1, \sigma \neq 1$  heißen *parallel*, falls  $O, \tau O, \sigma O$  kollinear sind für einen Punkt  $O$ .

Nach 2.9 (ii) ist diese Definition unabhängig von der Wahl des Punktes  $O$ , und die Parallelität ist offenbar eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Translationen  $\neq 1$ . Wir sprechen daher von *Parallelklassen* von Translationen.

**Satz 2.10**

- (i) Eine Dehnung  $\delta$  ist durch einen Fixpunkt  $O$  und einen Punkt  $P \neq O$  und dessen Bildpunkt  $\delta P$  eindeutig bestimmt. Insbesondere folgt, daß nur  $\delta = 1$  zwei Fixpunkte hat.
- (ii) Eine Translation  $\tau$  ist durch einen Punkt  $P$  und seinen Bildpunkt  $\tau P$  eindeutig bestimmt.

**Beweis.** Sei zunächst  $A \notin \overline{OP}$ . Dann muß nach 2.9 (i)  $\delta A$  der Schnittpunkt der Geraden  $\overline{OA}$  mit der Parallelen zu  $\overline{AP}$  durch  $\delta P$  sein. Sei nun  $B \in \overline{OP}$ . Dann ist nach demselben Schluß  $\delta B$  der Schnittpunkt von  $\overline{OB}$  mit der Parallelen zu  $\overline{AB}$  durch  $\delta A$ . Sei  $\tau$  Translation. Ist  $\tau P = P$ , so muß  $\tau = 1$  sein. Sei nun  $\tau \neq 1$  und  $A \notin \overline{P\tau P}$ . Nach 2.9 (ii) muß  $\tau A$  dann der vierte Punkt des von  $P, \tau P, A$  aufgespannten Parallelogramms sein. Für  $B \in \overline{P\tau P}$  schließt man mit  $A$  anstelle  $P$ .  $\square$

Wir können eine erste Übersicht über die Gruppen geben.

**Satz 2.11** Sei  $G$  ein affiner Raum.

- (i) Die Dehnungen bilden eine Gruppe  $\text{Deh}(G)$ .
- (ii) Die Translationen bilden eine Gruppe  $\text{Tra}(G)$  und jede Parallelklasse von Translationen bildet zusammen mit 1 eine Untergruppe von  $\text{Tra}(G)$ .

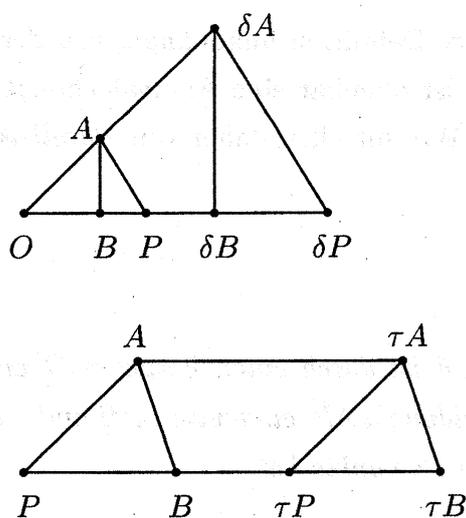


Abbildung 13:

(iii)  $\text{Tra}(G)$  ist ein Normalteiler von  $\text{Deh}(G)$  und ebenso ist jede Parallelklasse von Translationen zusammen mit 1 ein Normalteiler von  $\text{Deh}(G)$  (und damit auch von  $\text{Tra}(G)$ ).

**Beweis.** (i) ist klar. Hat  $\tau$  keinen Fixpunkt so offenbar auch nicht  $\tau^{-1}$ . Seien  $\sigma, \tau$  Translationen und  $\tau\sigma P = P$ . Dann gilt  $\sigma P = \tau^{-1}P$ , also  $\sigma = \tau^{-1}$  und damit  $\tau\sigma = 1$  nach 2.10 (ii). Also ist  $\tau\sigma$  fixpunktfrei oder 1, also in jedem Fall eine Translation. Die zweite Behauptung in (ii) folgt aus  $\sigma O \in \overline{O\tau O} \Rightarrow \tau\sigma O \in \overline{\tau O \tau^2 O} = \overline{O\tau O}, \tau^{-1}O \in \overline{O\tau O}$ . Sei  $\tau \in \text{Tra}(G), \delta \in \text{Deh}(G)$  beliebig und  $\delta^{-1}\tau\delta P = P$ . Dann gilt  $\tau(\delta P) = \delta P$ , also  $\tau = 1$ , da  $\delta P$  Fixpunkt ist.  $\delta^{-1}\tau\delta$  ist somit fixpunktfrei oder 1, also in jedem Fall in  $\text{Tra}(G)$ . Zum Nachweis der letzten Behauptung müssen wir zeigen, daß für  $\tau \neq 1$  stets  $\delta^{-1}\tau\delta$  parallel zu  $\tau$  ist. Dazu schließen  $\overline{O\tau O} \parallel \overline{\delta O \tau \delta O} \parallel \overline{O\delta^{-1}\tau\delta O}$  also  $\delta^{-1}\tau\delta O \in \overline{O\tau O}$ .  $\square$

**Satz 2.12** *Wenn nichtparallele Translationen existieren, so ist die Gruppe  $\text{Tra}(G)$  abelsch.*

**Beweis.** Es seien  $\sigma, \tau$  nichtparallele Translationen,  $O \in \mathcal{P}$ . Dann ist die vierte Ecke des von  $O, \tau O, \sigma O$  aufgespannten Parallelogramms  $\tau\sigma O$ , aber auch  $\sigma\tau O$  nach 2.9(ii). Also ist  $\tau\sigma = \sigma\tau$  nach 2.10(ii). Es seien  $\sigma, \tau$  parallele Translationen und  $\rho$  nicht parallel zu  $\sigma, \tau$ . Nach 2.11(ii) ist dann  $\rho^{-1}$  nicht parallel zu  $\sigma$ . Ebenso ist  $\tau\rho$  nicht parallel zu  $\sigma$ , da ansonsten nach 2.11(ii)  $\rho$  parallel zu  $\tau^{-1}\sigma$  ist. Nach dem oben Bewiesenen schließen wir

$$\tau\sigma = \tau\rho(\rho^{-1}\sigma) = (\tau\rho)\sigma\rho^{-1} = \sigma\tau\rho\rho^{-1} = \sigma\tau.$$

□

**Bemerkung.** Es gibt unendliche affine Ebenen mit nur einer Parallelklasse, deren Translationsgruppe nicht abelsch ist. Ob dies auch im endlichen möglich ist, ist eine offene Frage.

Nach diesen allgemeinen Sätzen wenden wir uns der Frage nach der *Existenz* von Dehnungen und Translationen zu. Hierbei wird der Satz von Desargues eine große Rolle spielen. Verlangen wir in 2.4 nur die Version, wo die Geraden  $\overline{PP'}$ ,  $\overline{QQ'}$ ,  $\overline{RR'}$  parallel sind, so sprechen wir vom "*kleinen*" Satz von Desargues. Verlangen wir nur den Fall, wo  $\overline{PP'}$ ,  $\overline{QQ'}$ ,  $\overline{RR'}$  sich in einem Punkt  $O$  treffen, so sprechen wir von der *Punktinversion*.

**Satz 2.13** *Sei  $G$  ein affiner Raum. Dann existiert zu je zwei Punkten  $P, P'$  eine Translation mit  $\tau P = P'$  genau dann, wenn der kleine Desargues'sche Satz für jede Wahl von  $P, Q, R, P', Q', R'$  wie in 2.4 gilt.*

**Beweis.** Angenommen, alle Translationen existieren und  $P, Q, R, P', Q', R'$  sind 6 Punkte mit den Voraussetzungen des kleinen Desargues'schen Satzes. Die Translation  $\tau$  sei durch  $\tau P = P'$  definiert. Nach 2.9(ii) ist  $Q' = \tau Q, R' = \tau R$  und somit  $\overline{Q'R'} = \overline{\tau Q \tau R} \parallel \overline{QR}$ . Es gelte nun umgekehrt der kleine Desargues und es seien  $P \neq P' \in \mathcal{P}, Q \notin \overline{PP'}$ . Wir definieren  $\tau : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  durch folgende Festsetzung:

$$\tau R := \begin{cases} 4. \text{ Ecke des Parallelogramms erzeugt von } P, P', R, & \text{falls } R \notin \overline{PP'} \\ 4. \text{ Ecke des Parallelogramms erzeugt von } Q, \tau Q, R, & \text{falls } R \in \overline{PP'}. \end{cases}$$

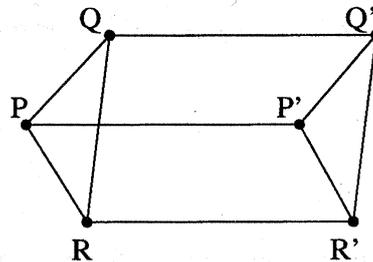


Abbildung 14: Zum Beweis von Satz 2.13

$\tau$  ist klarerweise bijektiv mit  $\tau P = P'$ . Es bleibt zu zeigen, daß  $\tau$  Geraden auf parallele Geraden abbildet. Dies ist sicherlich der Fall für jede zu  $\overline{PP'}$  parallele Gerade, da diese in sich übergeht. Es sei  $g$  nicht parallel zu  $\overline{PP'}$  und  $R, S \in g, R, S \notin \overline{PP'}$ . Nach dem kleinen Desargues ist  $\overline{\tau R \tau S} \parallel \overline{RS}$ . Jeder weitere Punkt  $X \in g, X \notin \overline{PP'}$  liegt aus demselben Grund auf der Parallelen zu  $g$  durch  $\tau R$  also auf  $\overline{\tau R \tau S}$ . Sei schließlich  $T \in g \cap \overline{PP'}$ . Falls der Bezugspunkt  $Q$  auf  $g$  liegt, ist nach Definition  $\tau T \in \overline{\tau R \tau S}$ . Ist  $Q \notin g$  so folgt aus dem kleinen Desargues der Reihe nach  $\overline{\tau Q \tau R} \parallel \overline{QR}, \overline{RT} \parallel \overline{\tau R \tau T}$ , also wegen  $\overline{RT} = g \parallel \overline{\tau R \tau S}$  auch  $\tau T \in \overline{\tau R \tau S}$ .  $\square$

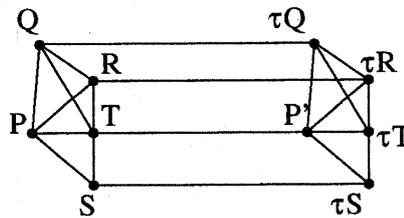


Abbildung 15: Zum Beweis von Satz 2.13

Mit genau derselben Überlegung beweist man

**Satz 2.14** Sei  $G$  ein affiner Raum. Dann existiert zu je 3 Punkten  $O, P, P'$  eine Dehnung  $\delta$  mit  $\delta O = O$ ,  $\delta P = P'$  genau dann, wenn die Punktinverson des Satzes von Desargues in 2.4 für jede Wahl von  $O, P, Q, R, P', Q', R'$  gilt.

**Satz 2.15** Sei  $G$  ein affiner Raum. Existieren alle Dehnungen mit Fixpunkt, so auch alle Translationen. Äquivalent dazu impliziert also die Punktinverson des Satzes von Desargues den kleinen Desargues und damit den vollen Satz von Desargues.

**Beweis.** Sei  $P \neq P'$  und  $O$  ein dritter Punkt auf  $\overline{PP'}$ . Nach Voraussetzung existiert  $\delta \in \text{Deh}(G)$  mit  $\delta O = O$ ,  $\delta P = P'$ . Es sei  $Q \notin \overline{PP'}$  und  $Q'$  die 4. Ecke des Parallelogramms erzeugt von  $P, P', Q$ . Nach Voraussetzung existiert  $\delta' \in \text{Deh}(G)$  mit  $\delta' P' = P'$ ,  $\delta'(\delta Q) = Q'$ .  $\delta'\delta$  bildet  $P$  auf  $P'$  ab und kann keinen Fixpunkt haben, denn ein solcher müßte nach 2.9(i) auf  $\overline{PP'} \cap \overline{QQ'}$  liegen, was unmöglich ist. Der eben durchgeführte Schluß funktioniert nicht, falls  $\overline{PP'}$  und damit nach 2.2 jede Gerade nur 2 Punkte enthält. In diesem Fall ist aber der kleine Desargues trivialerweise gültig, also existieren alle Translationen.  $\square$

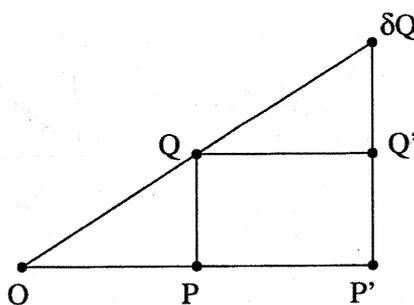


Abbildung 16: Zum Beweis von Satz 2.15

Aus 2.4 folgern wir somit:

**Satz 2.16** *In einem affinen Raum der Dimension  $\geq 3$  existieren alle möglichen Dehnungen.*

Eine affine Ebene, in der alle möglichen Translationen (aber nicht notwendig alle Dehnungen mit Fixpunkt) existieren, heißt *Translationsebene*.

Wie sieht es nun mit den affinen Räumen  $AG(V)$  aus und speziell mit den affinen Ebenen über einem 2-dimensionalen Vektorraum? Seien  $v \neq v' \in V, w = v' - v$ . Die Abbildung  $\tau_w : V \rightarrow V, \tau_w(x) = x + w$  ist bijektiv mit  $\tau_w v = v'$  und führt eine Gerade  $a + \langle u \rangle$  in die parallele Gerade  $a + w + \langle u \rangle$  über. Für  $w \neq 0$  hat  $\tau_w$  keinen Fixpunkt. Also existieren alle Translationen. Seien  $a, v, v' \in V$ . Seien gemäß der Figur ??  $a, v, v'$  und  $a, x, x'$  kollinear,  $x \notin \overline{av}, v' = a + \lambda(v - a), x' = a + \mu(x - a)$ . Damit  $\overline{xv} \parallel \overline{x'v'}$  ist, muß  $x' - v' = \nu(x - v)$  sein, also  $\mu x - \lambda v - (\mu - \lambda)a = \nu x - \nu v$ . Da  $a, v, x$  affin unabhängig sind, folgt  $\mu = \lambda$ . Die Abbildung  $\delta_{a,\lambda} : V \rightarrow V, \delta_{a,\lambda}(x) = a + \lambda(x - a), a \in V, 0 \neq \lambda \in K$ , ist bijektiv mit  $\delta_{a,\lambda}(a) = a, \delta_{a,\lambda}(v) = v'$  und führt die Gerade  $b + \langle u \rangle$  in die parallele Gerade  $a + \lambda(b - a) + \langle u \rangle$  über. Also existieren alle Dehnungen. Nach 2.15 haben wir somit

**Satz 2.17** In den affinen Räumen  $AG(V)$  gilt der Satz von Desargues. Insbesondere sind alle affinen Ebenen  $AG(V)$  Desargues'sch.

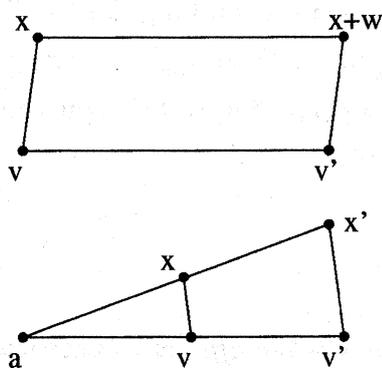


Abbildung 17: Zum Beweis von Satz 2.17

Der folgende Satz, einer der Hauptsätze der affinen Geometrie, besagt, daß die Räume  $AG(V)$  genau die Desargues'schen affinen Räume sind. Vor dem Beweis wollen wir unseren Weg plausibel machen. Ist  $G$  ein Desargues'scher affiner Raum, dann müssen wir den Vektorraum  $V$  und den Schiefkörper  $K$  konstruieren können. Wie dies getan wird, zeigen unsere eben gemachten Überlegungen. In  $AG(V)$  entspricht jeder Vektor  $v \in V$  bijektiv der Translation  $\tau_v$ . Der Vektorsumme  $v + w$  entspricht dabei die Translation  $\tau_v \tau_w$ . Sei  $a = 0$ . Jedem Element  $\lambda \in K$  entspricht bijektiv die Drehung  $\delta_\lambda := \delta_{0,\lambda}$ , wobei für  $\lambda = 0$  die Abbildung

$$\delta_0 : V \longrightarrow V, \delta_0 x = 0 \quad \text{für alle } x \in V$$

zusätzlich definiert wird, die wir auch Dehnung nennen wollen. Dem Produkt  $\lambda\mu$  entspricht die Dehnung  $\delta_\lambda \delta_\mu$ , da  $\delta_\lambda \delta_\mu(x) = \delta_\lambda(\mu x) = \lambda\mu x$ . Dem Produkt  $\lambda v$  mit  $\lambda \in K$  und  $v \in V$  müssen wir eine Translation zuordnen. Wir wissen aus 2.11 (iii) (Seite 34), daß  $\delta_\lambda \tau_v \delta_\lambda^{-1} \in \text{Tra}(V)$ , also lassen wir  $\lambda v$  zu

$\delta_\lambda \tau_v \delta_\lambda^{-1} = \tau_{\lambda v}$  korrespondieren. Am schwierigsten ist es, die Addition  $\lambda + \mu$  nachvollziehen. Es muß möglich sein, die Dehnung  $\delta_{\lambda+\mu}$  nur mit Hilfe von Abbildungen (denn nur diese stehen uns in  $G$  zur Verfügung) zu definieren. Dazu nimmt man für  $\lambda, \mu \neq 0$  jene Abbildung  $\delta$ , so daß  $\delta \tau_v \delta^{-1} = \delta_\lambda \tau_v \delta_\lambda^{-1} \delta_\mu \tau_v \delta_\mu^{-1}$ . Dies gibt wegen  $\delta_\lambda \tau_v \delta_\lambda^{-1} \delta_\mu \tau_v \delta_\mu^{-1} = \tau_{\lambda v} \tau_{\mu v} = \tau_{(\lambda+\mu)v}$  das richtige; natürlich muß noch die Unabhängigkeit dieser Definition von  $v \in V$  gezeigt werden.

**Satz 2.18** *Die Desargues'schen affinen Räume sind bis auf Isomorphie (d.h. bis auf eine Geraden und Ebenen erhaltende Bijektion) genau die Räume  $AG(V)$ . Insbesondere ist also jeder affine Raum mit Dimension  $\geq 3$  isomorph zu einem  $AG(V)$ .*

**Beweis.** Sei  $G$  ein Desargues'scher affiner Raum. Nach 2.14 (Seite 37) und 2.15 (Seite 37) existieren alle Dehnungen und Translationen. Wir wählen ein für alle Mal einen festen Punkt  $O \in \mathcal{P}$ . Die Translation, die durch  $O \mapsto P$  festgelegt ist, bezeichnen wir mit  $\tilde{P}$  für alle  $P \in \mathcal{P}$  und setzen  $V := \{\tilde{P} : P \in \mathcal{P}\}$ . Die Dehnungen, die  $O$  als Fixpunkt haben, bezeichnen wir mit  $\lambda, \mu, \nu, \dots$ . 1 bezeichnet die Identität. Zusätzlich erklären wir die uneigentliche Dehnung  $O$ , die ganz  $\mathcal{P}$  auf  $O$  abbildet.  $K$  sei die Menge dieser Dehnungen. Wir definieren nun geeignete Operatoren auf  $V$  und  $K$ , so daß  $V$  ein Linksvektorraum über  $K$  wird und zeigen dann, daß  $G \cong AG_K(V)$  unter der Abbildung  $P \mapsto \tilde{P}$ . Um Verwechslungen auszuschließen, werden die Addition im Vektorraum mit  $\oplus$ , die Skalarmultiplikation mit  $*$  und die Operation in  $K$  mit  $+$ ,  $\cdot$  bezeichnet. Multiplikation von Abbildungen soll

wie stets die Komposition sein.

$$\begin{array}{ll}
 V \times V \xrightarrow{\oplus} V & \tilde{P} \oplus \tilde{Q} := \tilde{P}\tilde{Q} \\
 K \times V \xrightarrow{*} V & \lambda * \tilde{P} := \lambda\tilde{P}\lambda^{-1} \quad \text{für } \lambda \neq 0 \\
 & 0 * \tilde{P} := \tilde{O} \\
 K \times K \longrightarrow K & \lambda \cdot \mu := \lambda\mu \quad \text{für } \lambda, \mu \neq 0 \\
 & \lambda \cdot 0 = 0 \cdot \lambda := 0 \quad \text{für } \lambda \in K \\
 K \times K \xrightarrow{+} K & \lambda + \mu := \kappa \quad \text{wobei } \kappa\tilde{P}\kappa^{-1} = \lambda\tilde{P}\lambda^{-1}\mu\tilde{P}\mu^{-1} \text{ für} \\
 & \lambda + \mu := 0 \quad \tilde{P} \neq \tilde{O} \text{ falls } \lambda, \mu \neq 0 \text{ und die} \\
 & \lambda + 0 = 0 + \lambda := \lambda \quad \text{rechte Seite } \neq \tilde{O} \text{ ist, falls } \lambda, \mu \neq 0 \\
 & \quad \quad \quad \text{und die rechte Seite } = \tilde{O} \text{ für } \lambda \in K
 \end{array}$$

(i)  $V^{\oplus}$  ist eine abelsche Gruppe mit  $\tilde{O}$  als Nullelement nach 2.12 (Seite 34).

(ii)  $K \setminus \{0\}$  ist eine Gruppe nach 2.11(i).

(iii)  $\lambda * \tilde{P} \in V$  für alle  $\lambda \in K$ ,  $\tilde{P} \in V$  nach 2.11 (iii).

$$\begin{aligned}
 (\lambda\mu) * \tilde{P} &= (\lambda\mu)\tilde{P}(\lambda\mu)^{-1} \\
 &= \lambda(\mu\tilde{P}\mu^{-1})\lambda^{-1} \\
 &= \lambda * (\mu * \tilde{P}) \\
 \lambda * (\tilde{P} \oplus \tilde{Q}) &= \lambda(\tilde{P}\tilde{Q})\lambda^{-1} \\
 &= (\lambda\tilde{P}\lambda^{-1})(\lambda\tilde{Q}\lambda^{-1}) \\
 &= (\lambda * \tilde{P}) \oplus (\lambda * \tilde{Q})
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 (0\mu) * \tilde{P} &= 0 * \tilde{P} = \tilde{O} \\
 &= 0 * (\mu * \tilde{P}) \quad ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\lambda 0) * \tilde{P} &= O * \tilde{P} = \tilde{O} \\
&= \lambda \tilde{O} \lambda^{-1} \\
&= \lambda * \tilde{O} \\
&= \lambda * (0 * \tilde{P}) \quad , \\
0 * (\tilde{P} \oplus \tilde{O}) &= \tilde{O} = \tilde{O} \oplus \tilde{O} \\
&= (0 * \tilde{P}) \oplus (0 * \tilde{Q}) .
\end{aligned}$$

Schließlich haben wir für alle  $\tilde{P} \in V$

$$1 * \tilde{P} = 1\tilde{P}1^{-1} = \tilde{P} \quad .$$

Bemerkung: Falls  $\lambda * \tilde{P} \neq \tilde{O}$  ist, dann ist

$$(\lambda * \tilde{P})^{-1} = (\lambda \tilde{P} \lambda^{-1})^{-1} = \lambda \tilde{P}^{-1} \lambda^{-1} = \lambda * \tilde{P}^{-1} .$$

Ferner ist  $\lambda * \tilde{O} = \lambda \tilde{O} \lambda^{-1} = \tilde{O}$  für alle  $\lambda \neq 0$ .

- (iv) Wir zeigen, daß  $\lambda + \mu$  eindeutig definiert ist. Zunächst gilt: Sei  $\tilde{P} \neq \tilde{O}$  und  $\lambda \neq 0$ , dann durchläuft  $\lambda * \tilde{P}$  die Parallelklasse von  $\tilde{P}$ . Klarerweise sind nach 2.18 (iii) alle  $\lambda * \tilde{P}$  und  $0 \neq \lambda \in K$ , verschieden, und nach 2.11 (iii) parallel zu  $\tilde{P}$ . Wir definieren  $\lambda \in K$  durch  $\lambda(0) = 0, \lambda(P) = Q$ . Dann gilt

$$\lambda \tilde{P} \lambda^{-1}(0) = \lambda \tilde{P}(0) = \lambda(P) = Q$$

und somit

$$\tilde{Q} = \lambda \tilde{P} \lambda^{-1} = \lambda * \tilde{P}$$

nach 2.10(ii). Daraus folgt, daß zu  $\tilde{P} \neq \tilde{Q}$  ein eindeutiges  $\kappa \in K$  existiert, wie es in der Definition von  $\lambda + \mu$  verlangt wird, nämlich

$$\kappa * \tilde{P} = (\lambda * \tilde{P}) (\mu * \tilde{P}) \quad ,$$

wobei  $\kappa = 0$  ist, falls  $(\lambda * \tilde{P}) (\mu * \tilde{P}) = \tilde{O}$ .

Wir müssen zeigen, daß für jedes  $\tilde{Q} \neq \tilde{O}$  dasselbe  $\kappa$  herauskommt. Sei  $\tilde{Q} \neq \tilde{P}$  nicht parallel zu  $\tilde{P}$  und es sei  $(\lambda * \tilde{P}) (\mu * \tilde{P}) \neq \tilde{O}$ . Aus

$$(\lambda * \tilde{P}\tilde{Q}) (\mu * \tilde{P}\tilde{Q}) = (\lambda\tilde{P}\lambda^{-1}) (\lambda\tilde{Q}\lambda^{-1}) (\mu\tilde{P}\mu^{-1}) (\mu\tilde{Q}\mu^{-1})$$

und der Nichtparallelität von  $\tilde{P}$  und  $\tilde{Q}$  folgt

$$(\lambda * \tilde{P}\tilde{Q}) (\mu * \tilde{P}\tilde{Q}) \neq \tilde{O}.$$

Sei  $\sigma \in K$ , so daß

$$\sigma * \tilde{P}\tilde{Q} = (\lambda * \tilde{P}\tilde{Q}) (\mu * \tilde{P}\tilde{Q}).$$

Dann haben wir

$$(\sigma * \tilde{P}) (\sigma * \tilde{Q}) = (\lambda * \tilde{P}) (\mu * \tilde{Q}) (\mu * \tilde{P}) (\mu * \tilde{Q}),$$

also

$$(\sigma * \tilde{Q}) (\lambda * \tilde{Q}^{-1}) (\mu * \tilde{Q}^{-1}) = (\sigma * \tilde{P}^{-1}) (\lambda * \tilde{P}) (\mu * \tilde{P}).$$

Wegen der Nichtparallelität von  $\tilde{P}$  und  $\tilde{Q}$  folgt, daß beide Seite =  $\tilde{O}$  sind und somit

$$\sigma * \tilde{Q} = (\lambda * \tilde{Q}) (\mu * \tilde{Q}), \quad \sigma * \tilde{P} = (\lambda * \tilde{P}),$$

d.h., wir erhalten wegen der Eindeutigkeit dasselbe  $\sigma$  für  $\tilde{P}$  und  $\tilde{Q}$ . Mit  $\tilde{Q}$  anstelle  $\tilde{P}$  folgt, daß auch für alle Translationen parallel zu  $\tilde{P}$  dasselbe  $\sigma$  resultiert. Ebenso folgt nun aus

$$(\lambda * \tilde{P}) (\mu * \tilde{P}) = \tilde{O}$$

auch

$$(\lambda * \tilde{Q}) (\mu * \tilde{Q}) = \tilde{O}$$

für alle  $\tilde{Q} \neq \tilde{O}$ .

Bemerkung: Es gilt daher

$$\lambda * \tilde{P}^{-1} = -\lambda * \tilde{P} \text{ für alle } \tilde{P} \neq \tilde{O} .$$

- (v)  $K^+$  ist Schiefkörper. Daß  $K^+$  eine abelsche Gruppe ist, folgt aus der entsprechenden Tatsache für  $V^\oplus$ . Wir verifizieren nur die Existenz des additiven Inversen. Sei  $\lambda \neq 0$ ,  $\tilde{P} \neq \tilde{O}$ . Da  $\tilde{P}$  und  $\tilde{P}^{-1}$  parallel sind, existieren ein eindeutiges  $\mu \neq 0$  mit  $\lambda * \tilde{P} = \mu * \tilde{P}^{-1}$ , d.h.,

$$(\lambda * \tilde{P}) (\mu * \tilde{P}) = \tilde{O} .$$

Es bleiben noch die Distributivgesetze. Seien  $\kappa, \lambda, \mu \in K$ ,  $\tilde{P} \neq \tilde{Q}$ .

Für  $\mu = 0$  haben wir

$$(\kappa + \lambda) \mu * \tilde{P} = \tilde{P} * \tilde{P} = \tilde{O} = (\kappa\mu + \lambda\mu) * \tilde{P}$$

Für  $\mu \neq 0$  haben wir

$$\begin{aligned} (\kappa + \lambda)\mu * \tilde{P} &= (\kappa + \lambda) * (\mu * \tilde{P}) \\ &= (\kappa * (\mu * \tilde{P})) (\lambda * (\mu * \tilde{P})) \\ &= (\kappa\mu * \tilde{P}) (\lambda\mu * \tilde{P}) \\ &= (\kappa\mu + \lambda\mu) * \tilde{P} \end{aligned}$$

also

$$(\kappa + \lambda)\mu = \kappa\mu + \lambda\mu .$$

Ebenso verifiziert man

$$\mu(\kappa + \lambda) = \mu\kappa + \mu\lambda .$$

(vi)  $V$  ist ein Vektorraum über  $K$ . Bis auf

$$(\lambda + \mu) * \tilde{P} = (\lambda * \tilde{P}) \oplus (\mu * \tilde{P})$$

haben wir bereits alle Verknüpfungsgesetze in 2.18 (iii) gezeigt. Dieses letzte Gesetz ist aber gerade der Inhalt der Definition von  $\lambda + \mu$ .

(vii)  $\phi : \mathcal{P} \rightarrow V$ ,  $\phi P = \tilde{P}$  ist ein Isomorphismus von  $G$  auf  $AG(V)$ .  $\phi$  ist nach Definition bijektiv. Seien  $P \neq Q \in \mathcal{P}$ ,  $P \neq 0$  und  $g = \overline{PQ}$ . Wir müssen zeigen, daß  $\phi g$  genau die affine Gerade durch  $\tilde{P}, \tilde{Q}$  ist.

**Fall a.**  $O \in \overline{PQ}$ . Die Parallelklasse, welche  $\tilde{P}$  enthält, besteht dann genau aus  $\{\tilde{R} : O \neq R \in \overline{PQ}\} = \phi g \setminus \{\tilde{O}\}$ . Nach 2.18 (iv) haben wir daher

$$\phi g = \{\lambda * \tilde{P} : \lambda \in K\}$$

und dies ist genau die affine Gerade durch  $\tilde{O}, \tilde{P}$  und  $\tilde{Q}$ .

**Fall b.**  $O \notin \overline{PQ}$ . Dann ist

$$\overline{PQ} = \overline{\tilde{P}O\tilde{Q}O} \parallel \overline{\tilde{P}\tilde{Q}^{-1}O, O}.$$

Also ist  $\overline{\tilde{P}\tilde{Q}^{-1}O, O}$  die Parallele zu  $\overline{PQ}$  durch  $O$ . Nach Fall a. ist

$$\overline{\tilde{P}\tilde{Q}^{-1}O, O} = \{\lambda * \tilde{P}\tilde{Q}^{-1}O : \lambda \in K\}.$$

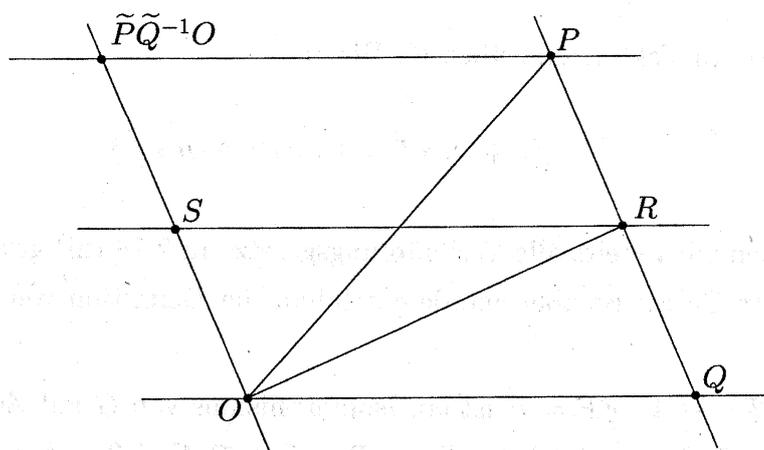


Abbildung 18:

Wenden wir nun die Translation  $\tilde{Q}$  an, so erhalten wir wieder  $\overline{PQ}$  und somit

$$\overline{PQ} = \{(\lambda * \tilde{P}\tilde{Q}^{-1}) \tilde{Q}O : \lambda \in K\}$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned} \phi g &= \{(\lambda * \tilde{P}\tilde{Q}^{-1}) \tilde{Q} : \lambda \in K\} \\ &= \{(\lambda * \tilde{P}) (\lambda * \tilde{Q}^{-1}) \tilde{Q} : \lambda \in K\} \\ &= \{(\lambda * \tilde{P}) \oplus (-\lambda * \tilde{Q}) \oplus \tilde{Q} : \lambda \in K\} \\ &= \{(\lambda * \tilde{P}) \oplus ((1 - \lambda) * \tilde{Q}) : \lambda \in K\}, \end{aligned}$$

also genau die affine Gerade durch  $\tilde{P}$  und  $\tilde{Q}$ . Wir müssen noch zeigen, daß  $\phi$  die Ebenen von  $G$  auf die Ebenen von  $AG(V)$  abbildet. Nach 2.8 genügt dazu der Nachweis, daß  $\phi$  und  $\phi^{-1}$  die Parallelität von Geraden erhalten. Seien  $g \parallel h$  in  $G$ . Dann existiert eine Translation  $\tilde{R}$  mit  $\tilde{R}g = h$ . Seien  $P \neq Q \in g$ , dann ist

$$g = \{(\lambda * \tilde{P} \oplus (1 - \lambda) \tilde{Q}) O : \lambda \in K\}$$

und somit

$$h = \tilde{R}g = \{(\lambda * \tilde{P} \oplus (1 - \lambda) \tilde{Q} \oplus \tilde{R}) O : \lambda \in K\}$$

also

$$\phi h = \phi g \oplus \tilde{R}, \text{ d.h., } \phi h \parallel \phi g.$$

Aus derselben Überlegung folgt, daß  $\phi^{-1}$  die Parallelität erhält, und der Beweis ist vollständig.  $\square$

Wir wollen unsere Diskussion über Kollineationen ergänzen und abschließen durch eine algebraische Beschreibung in den affinen Räumen  $AG(V)$ , was ja ab Dimension 3 keine Einschränkung bedeutet.

**Definition.** Sei  $V$  Vektorraum über  $K$ . Eine Abbildung  $f : V \rightarrow V$  heißt *semilinear*, falls ein Automorphismus  $\sigma$  von  $K$  existiert, so daß

$$f(v + w) = f(v) + f(w), \quad f(\lambda v) = \lambda^\sigma f(v) \text{ für alle } v, w \in V, \lambda \in K$$

wobei das Bild von  $\lambda$  unter  $\sigma$  mit  $\lambda^\sigma$  bezeichnet wird.

**Satz 2.19** Sei  $\dim V \geq 2$ . Die bijektiven semilinearen Abbildungen  $f : V \rightarrow V$  sind genau die Kollineationen von  $AG(V)$ , welche  $O \in V$  als Fixpunkt haben.

**Beweis.** Sei  $f$  semilinear und bijektiv mit dem Automorphismus  $\sigma \in K$ . Die Gerade

$$g = \{a + \lambda u : \lambda \in K\}$$

geht in

$$\begin{aligned} f(g) &= \{f(a) + f(\lambda u) : \lambda \in K\} \\ &= \{f(a) + \lambda^\sigma f(u) : \lambda \in K\} \\ &= f(a) + \langle f(u) \rangle \end{aligned}$$

über, also wieder in eine Gerade. Daraus folgt auch, daß  $f$  die Parallelität erhält, also nach 2.8 eine Kollineation ist. Es sei umgekehrt  $f \in \text{Koll}(V)$  mit  $f(0) = 0$ .

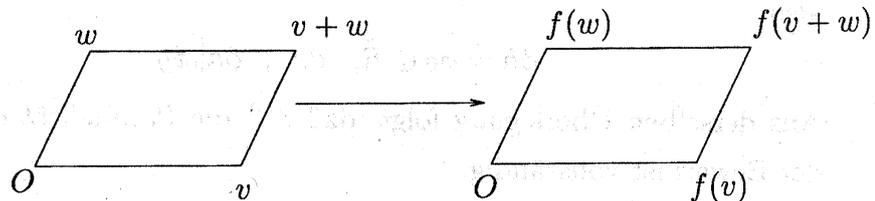


Abbildung 19:

Seien  $v, w \in V$  linear unabhängig. Das Parallelogramm  $0, v, w, v+w$  geht über in das Parallelogramm  $f(0) = 0, f(v), f(w), f(v+w)$ . Andererseits ist aber  $f(v) + f(w)$  die 4. Ecke des von  $0, f(v), f(w)$  aufgespannten Parallelogramms, also  $f(v+w) = f(v) + f(w)$ . Es seien  $v, w$  linear abhängig. Falls  $v = 0$  oder  $w = 0$ , dann gilt klarerweise  $f(v+w) = f(v) + f(w)$ . Sei nun  $v \neq 0, w \neq 0, z \notin \langle v \rangle$ . Die Paare  $v+w, z; v, w+z; w, z$  sind dann linear unabhängig, somit

$$\begin{aligned} f(v+w) + f(z) &= f((v+w) + z) = f(v + (w+z)) \\ &= f(v) + f(w+z) = f(v) + f(w) + f(z), \end{aligned}$$

also wieder  $f(v+w) = f(v) + f(w)$ .

Es seien wieder  $v, w$  linear unabhängig. Da jedes  $\lambda v \in \overline{0v}$  ist, folgt daß

$$f(\lambda v) \in \overline{0f(v)}, \text{ also } f(\lambda v) = \lambda^\sigma f(v)$$

für eine gewisse Bijektion  $\sigma : K \rightarrow K$ , die möglicherweise von  $v$  abhängt. Sei  $\tau$  die entsprechende Bijektion für  $w$  mit  $f(\lambda w) = \lambda^\tau f(w)$ . Für  $\lambda \neq 0$  haben wir  $\overline{\lambda v, \lambda w} \parallel \overline{vw}$ , also

$$\overline{f(\lambda v), f(\lambda w)} = \overline{\lambda^\sigma f(v), \lambda^\tau f(w)} \parallel \overline{f(v)f(w)}, \text{ d.h.,}$$

$$\lambda^\sigma f(v) - \lambda^\tau f(w) = \gamma(f(v) - f(w))$$

und somit  $\lambda^\sigma = \lambda^\tau$  für alle  $\lambda \in K$ . Falls  $v, w$  linear unabhängig ist, wählen wir  $z \notin \langle v \rangle$  und wiederholen das eben Gesagte. Es bleibt zu zeigen, daß  $\sigma$  Automorphismus von  $K$  ist.

(i)  $(\lambda + \mu)^\sigma = \lambda^\sigma + \mu^\sigma$ . Sei  $v \neq 0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)^\sigma f(v) &= f((\lambda + \mu)v) = f(\lambda v + \mu v) \\ &= f(\lambda v) + f(\mu v) = \lambda^\sigma f(v) + \mu^\sigma f(v) = (\lambda^\sigma + \mu^\sigma)f(v), \end{aligned}$$

$$\text{also } (\lambda + \mu)^\sigma = \lambda^\sigma + \mu^\sigma.$$

(ii)  $(\lambda\mu)^\sigma = \lambda^\sigma \mu^\sigma$ . Sei  $v \neq 0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} (\lambda\mu)^\sigma f(v) &= f((\lambda\mu)v) = f(\lambda(\mu v)) \\ &= \lambda^\sigma f(\mu v) = \lambda^\sigma \mu^\sigma f(v), \end{aligned}$$

$$\text{also } (\lambda\mu)^\sigma = \lambda^\sigma \mu^\sigma \quad \square$$

**Satz 2.20** Die bijektiven semilinearen Abbildungen von  $V$  bilden mit der Komposition eine Gruppe  $S(V) \leq \text{Koll}(V)$ . Die allgemeine lineare Gruppe  $GL(V)$  ist ein Normalteiler von  $S(V)$  mit  $S(V)/GL(V) \cong \text{Aut}K$ .

**Beweis.** Die erste Behauptung ist eine unmittelbare Folgerung von Satz 2.19 (S. 47). Sei  $f \in S(V)$  mit  $f(\lambda v) = \lambda^\sigma f(v)$ ,  $f^{-1}(\lambda v) = \lambda^\tau f^{-1}(v)$ . Dann haben wir  $\lambda v = f^{-1}f(\lambda v) = f^{-1}(\lambda^\sigma f(v)) = \lambda^{\sigma\tau} f^{-1}f(v) = \lambda^{\sigma\tau} v$ , also  $\lambda^{\sigma\tau} = \lambda$  für alle  $\lambda \in K$ , d.h.  $\tau = \sigma^{-1}$ . Für  $f, g \in S(V)$  mit  $f(\lambda v) = \lambda^\sigma f(v)$ ,  $g(\lambda v) = \lambda^\tau g(v)$  haben wir  $gf(\lambda v) = g(\lambda^\sigma f(v)) = \lambda^{\sigma\tau} gf(v)$ . In Zusammenhang sehen wir, daß die Abbildung, welche jedem  $f \in S(V)$  dem Automorphismus  $\sigma \in \text{Aut}(K)$  mit  $f(\lambda v) = \lambda^\sigma f(v)$  zuordnet, ein Epimorphismus ist mit  $\text{Kern}GL(V)$ .  $\square$

**Satz 2.21** Die Kollineationen eines affinen Raumes  $AG(V)$  sind genau die Kompositionen  $f = \tau_v \bar{f}$  mit  $\bar{f} \in S(V)$ ,  $\tau_v \in \text{Tra}(V)$ . Also  $\text{Koll}(V) = \text{Tra}(V) \cdot S(V)$ , wobei jede Kollineation eindeutig als Produkt aus einer Translation und einer semilinearen Abbildung dargestellt werden kann. Ferner ist  $\text{Tra}(V)$  Normalteiler in  $\text{Koll}(V)$  mit  $\text{Koll}(V)/\text{Tra}(V) \cong S(V)$ .

**Beweis.** Klarerweise ist  $\tau_v \bar{f} \in \text{Koll}(V)$  für alle  $\bar{f} \in S(V)$ ,  $\tau_v \in \text{Tra}(V)$ . Umgekehrt sei  $f \in \text{Koll}(V)$ ,  $f(O) = v$ . Dann ist  $\bar{f} = \tau_{-v} f \in S(V)$  nach 2.19 (S. 47), also  $f = \tau_v \bar{f}$ . Aus  $f = \tau_v \bar{f} = \tau_w \bar{f}_1$  folgt  $\tau_v \bar{f}(O) = v = \tau_w \bar{f}_1(O) = w$  also  $v = w$ ,  $\tau_v = \tau_w$  und somit  $\bar{f} = \tau_{-v} f = \bar{f}_1$ . Wir betrachten die Abbildung von  $\text{Koll}(V)$  nach  $S(V)$ , die jedem  $f = \tau_v \bar{f} \in \text{Koll}(V)$  die Abbildung  $\bar{f} \in S(V)$  zuordnet. Sei  $g = \tau_w \bar{g}$ , dann haben wir  $gf(x) = g(\tau_v \bar{f}(x)) = g(\bar{f}(x) + v) = g\bar{f}(x) + g(v) = (\tau_w \bar{g})\bar{f}(x) + g(v) = \tau_w(\bar{g}\bar{f}(x)) + g(v) = \bar{g}\bar{f}(x) + w + g(v)$  und somit aus der Eindeutigkeit der Zerlegung  $\bar{g}\bar{f} = \bar{g}\bar{f}$ . Die Abbildung  $f \mapsto \bar{f}$  ist surjektiv da jedes  $\bar{f} \in S(V)$  auf sich selbst abgebildet wird und der Kern ist  $\{f = \tau_v \bar{f} : \bar{f} = 1\} = \{f = \tau_v : v \in V\} = \text{Tra}(V)$ .  $\square$

Wir überlegen uns zum Abschluß, wie jene Kollineationen charakterisiert sind, deren semilinearer Teil sogar linear ist. Obwohl wir in der affinen Geometrie noch keine Längenbegriffe zur Verfügung haben, so können wir doch mehrere Sätze, die scheinbar der metrischen Geometrie angehören, bereits jetzt formulieren.

**Satz 2.22** Seien  $v \neq w \in V$ ,  $x \in \overline{vw}$ ,  $x \neq w$ . Dann existiert ein eindeutiges  $\lambda \in K$ ,  $\lambda \neq 1$ , so daß  $v - x = \lambda(w - x)$ . Umgekehrt existiert zu  $1 \neq \lambda \in K$  genau ein  $x \in \overline{vw}$  mit  $v - x = \lambda(w - x)$ .

**Beweis.** Ist  $x = y$  dann gilt  $v - x = O(w - x)$ . Andernfalls habe wir  $\langle v - x \rangle = \langle w - x \rangle$  also existiert  $\lambda \in K$  mit  $v - x = \lambda(w - x)$ . Zum Beweis

der Umkehrung sei  $x = -\frac{1}{\lambda-1}v + \frac{\lambda}{\lambda-1}w \in \overline{vw}$ , dann ist  $v-x = \frac{\lambda}{\lambda-1}v - \frac{\lambda}{\lambda-1}w = \lambda w - \lambda x$ .  $\square$

**Definition.** Seien  $v \neq w \in V$ ,  $x \neq w$ ,  $x \in \overline{vw}$ . Das nach Satz 2.22 eindeutige Element  $\lambda = \lambda(v, w : x) \in K$  mit  $v-x = \lambda(w-x)$  heißt das *Streckenverhältnis* der drei Punkte  $v, w, x$  in  $AG(V)$ . Laut 2.22 gilt dann  $x = -\frac{1}{\lambda-1}v + \frac{\lambda}{\lambda-1}w$ . Von der Anschauung motiviert, können wir den Vektor  $x$  mit  $\lambda(v, w : x) = -1$  den *Mittelpunkt* der "Strecke"  $v, w$  nennen, falls  $\text{char}K \neq 2$ , da dann  $x = \frac{1}{2}(v+w)$  ist. Ein Beispiel wie das Streckenverhältnis in  $AG(V)$  angewendet werden kann, ist der folgende Satz, andere sind in den Aufgaben enthalten.

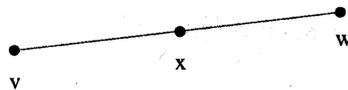


Abbildung 20:

**Satz 2.23** Sei  $v_1, v_2, v_3 \in V$  ein Dreieck,  $x \in \overline{v_1v_2}$ ,  $y \in \overline{v_1v_3}$ ,  $x \neq v_1, v_2$ ,  $y \neq v_1, v_3$ . Dann gilt  $\overline{xy} \parallel \overline{v_2v_3} \iff \lambda(v_1, v_2 : x) = \lambda(v_1, v_3 : y)$ .

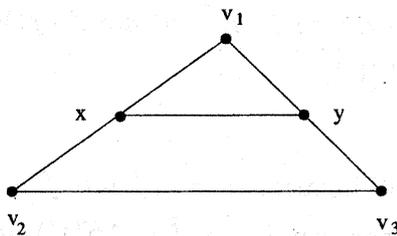


Abbildung 21:

**Beweis.** Sei  $\lambda_1 = \lambda(v_1, v_2 : x)$ ,  $\lambda_2 = \lambda(v_1, v_3 : y)$ , also  $x = -\frac{1}{\lambda_1-1}v_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_1-1}v_2$ ,  $y = -\frac{1}{\lambda_2-1}v_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_2-1}v_3$ . Dann gilt  $\overline{xy} \parallel \overline{v_2v_3} \iff \exists \gamma \in K$  mit  $x - y = \gamma(v_2 - v_3) \iff \exists \gamma \in K$  mit  $x = y + \gamma(v_2 - v_3) \iff \exists \gamma \in K$  mit  $x = -\frac{1}{\lambda_2-1}v_1 + \gamma v_2 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2-1} - \gamma\right)v_3 = -\frac{1}{\lambda_1-1}v_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_1-1}v_2 \iff \lambda_1 = \lambda_2$ ,  $\gamma = \frac{\lambda_1}{\lambda_1-1}$  (da  $v_1, v_2, v_3$  affin unabhängig sind)  $\iff \lambda_1 = \lambda_2$ .  $\square$

**Definition.** Eine Kollineation  $f$  von  $AG(V)$  heißt eine *Affinität*, falls  $f$  alle Streckenverhältnisse erhält, d.h. falls  $v-x = \lambda(w-x)$  impliziert  $f(v)-f(x) = \lambda(f(w)-f(x))$  für alle  $v \neq w \in V$ ,  $x \neq w$ ,  $\lambda \in K$ .

**Satz 2.24** (i) Die Affinitäten von  $AG(V)$  bilden mit der Komposition eine Gruppe, bezeichnet  $Aff(V)$ .

(ii) Jede Translation ist eine Affinität.

(iii) Jede bijektive lineare Abbildung ist eine Affinität.

**Beweis.** (i) ist klar. Sei  $\tau_u \in \text{Tra}(V)$ ,  $v-x = \lambda(w-x)$ . Dann gilt  $\tau_u(v) - \tau_u(x) = v+u-x-u = v-x = \lambda(w+u-x-u) = \lambda(\tau_u(w) - \tau_u(x))$ . (iii) ist unmittelbar einsichtig.  $\square$

**Satz 2.25** Die Affinitäten von  $AG(V)$  sind genau die Kollineationen  $f = \tau_v \bar{f}$ , deren  $\bar{f}$ -Anteil linear ist. Es gilt die  $Aff(V) = \text{Tra}(V) \cdot GL(V)$  und  $Aff(V)/\text{Tra}(V) \cong GL(V)$ .

**Beweis.** Daß jede Kollineation  $f = \tau_v \bar{f}$  mit  $\bar{f} \in GL(V)$  eine Affinität ist, folgt aus 2.24. Umgekehrt sei  $f = \tau_u \bar{f} \in \text{Aff}(V)$  und  $v-x = \lambda(w-x)$ . Es sei  $\sigma \in \text{Aut}K$  der zu  $\bar{f}$  gehörende Automorphismus.  $\bar{f} = \tau_{-u} f$  ist ebenfalls Affinität nach 2.24, woraus  $f(v) - f(x) = \lambda(f(w) - f(x)) = \lambda^\sigma(f(w) - f(x))$ , also  $\sigma = 1$ , resultiert, da  $\lambda$  beliebig sein kann.  $\square$

Die Sätze 2.20, 2.21 und 2.25 können wir übersichtlich mit exakten Sequenzen darstellen, wobei wie üblich das Bild einer Abbildung gleich dem Kern der nächsten ist und inj Injektion bedeutet.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 1 & \rightarrow & \text{Tra}(V) & \rightarrow & \text{Aff}(V) & \rightarrow & \text{GL}(V) \rightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 1 & \rightarrow & \text{Tra}(V) & \rightarrow & \text{Koll}(V) & \rightarrow & S(V) \rightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \text{Aut}K & & \text{Aut}K & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & 1 & & 
 \end{array}$$

### Aufgaben

1. Sei  $E = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$  eine endliche affine Ebene. Wir wissen aus 2.2, daß je zwei Geraden dieselbe Anzahl  $n$  von Punkten enthalten.  
Zeige:
  - (a)  $|\mathcal{P}| = n^2$ ,  $|\mathcal{G}| = n^2 + n$ .
  - (b) Jeder Punkt liegt auf genau  $n + 1$  Geraden
  - (c) Jede Parallelklasse enthält genau  $n$  Geraden.
2. Bestimme genau die Struktur der Kollineationsgruppe der Fano Ebene.
3. Sei  $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ . Wir definieren Geraden  $\mathcal{G}$  auf 2 Arten:
  - (a) Jede Gerade  $\{(x, y) : y = mx + b\}$  in  $AG(\mathbb{R}^2)$  mit  $m \leq 0$  und jede vertikale Gerade  $\{(x, y) : x = a\}$  in  $AG(\mathbb{R}^2)$ .

- (b) Jede Untermenge von  $\mathbb{R}^2$  der Form  $\{(x,y) : y = mx + b, y < 0\} \cup \{(x,y) : \frac{1}{2}mx + b, y \geq 0\}$  falls  $m > 0$ .

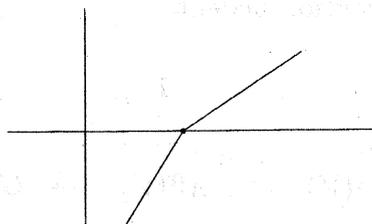


Abbildung 22:

Zeige, daß  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  eine nichtdesargues'sche affine Ebene ist.

4. Sei  $G$  Desargues'scher affiner Raum und  $O, P, Q, R, P', Q', R'$  7 Punkte, so daß  $O = \overline{PP'} \cap \overline{QQ'} \cap \overline{RR'}$ .  
 Zeige: Schneiden sich die Geradenpaare  $\overline{PQ}, \overline{P'Q'}$ ;  $\overline{PR}, \overline{P'R'}$ ;  $\overline{QR}, \overline{Q'R'}$  jeweils in einem Punkt, so sind diese 3 Schnittpunkte kollinear.
5. Zeige die Umkehrung von 4.

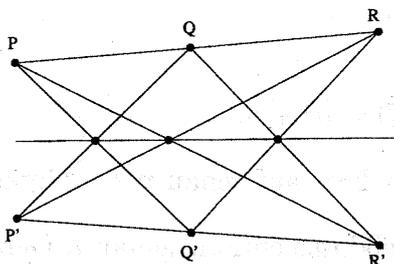


Abbildung 23:

6. Der Satz von Pappos besagt das folgende: Seien  $P, Q, R$  kollinear und ebenso  $P', Q', R'$ , alle Punkte und Geraden verschieden. Schneiden sich

die Geradenpaare  $\overline{PQ'}$ ,  $\overline{QP'}$ ;  $\overline{PR'}$ ,  $\overline{RP'}$ ;  $\overline{QR'}$ ,  $\overline{RQ'}$  in 3 verschiedenen Punkten, so sind diese Punkte kollinear.

Zeige: In  $AG_K(V)$  gilt der Satz von Pappos für jede Wahl von Punkten und Geraden genau dann, wenn  $K$  kommutativ, d.h. ein Körper ist.

7. Satz von Ceva. Seien  $v_1, v_2, v_3, r_1, r_2, r_3$  6 verschiedene Punkte in  $AG(V)$ ,  $v_1, v_2, v_3$  affin unabhängig,  $r_1 \in \overline{v_1v_2}$ ,  $r_2 \in \overline{v_1v_3}$ ,  $r_3 \in \overline{v_1v_2}$  und  $\lambda_1 = \lambda(v_2, v_3 : r_1)$ ,  $\lambda_2 = \lambda(v_3, v_1 : r_2)$ ,  $\lambda_3 = \lambda(v_1, v_2 : r_3)$ .

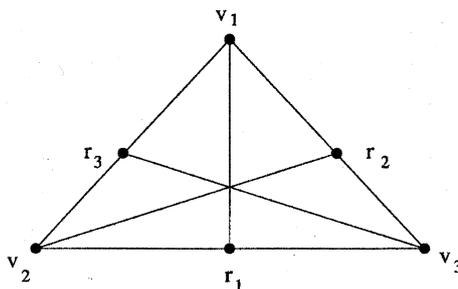


Abbildung 24:

Zeige: Es gilt  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -1 \iff \overline{v_1r_1} \parallel \overline{v_2r_2} \parallel \overline{v_3r_3}$  oder  $\overline{v_1r_1}$ ,  $\overline{v_2r_2}$ ,  $\overline{v_3r_3}$  schneiden in einem Punkt. Folgere daraus den Schwerpunktsatz für Dreiecke.

8. Satz von Menelaus. Seien  $v_1, v_2, v_3, r_1, r_2, r_3$  wie in 7.  
Zeige, daß  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \iff r_1, r_2, r_3$  sind kollinear.

Die Abbildung  $\sigma$  ist eine Spiegelung an der Ebene  $E$ .  
 Die Abbildung  $\sigma$  ist eine Spiegelung an der Ebene  $E$ .  
 Die Abbildung  $\sigma$  ist eine Spiegelung an der Ebene  $E$ .

Die Abbildung  $\sigma$  ist eine Spiegelung an der Ebene  $E$ .  
 Die Abbildung  $\sigma$  ist eine Spiegelung an der Ebene  $E$ .  
 Die Abbildung  $\sigma$  ist eine Spiegelung an der Ebene  $E$ .



Abbildung 56.17

Die Abbildung  $\sigma$  ist eine Spiegelung an der Ebene  $E$ .  
 Die Abbildung  $\sigma$  ist eine Spiegelung an der Ebene  $E$ .  
 Die Abbildung  $\sigma$  ist eine Spiegelung an der Ebene  $E$ .

Die Abbildung  $\sigma$  ist eine Spiegelung an der Ebene  $E$ .  
 Die Abbildung  $\sigma$  ist eine Spiegelung an der Ebene  $E$ .

### 3 Projektive Geometrie

Das Axiom I.4 der Inzidenzgeometrie besagt, daß der Durchschnitt zweier Ebenen, die in einem 3-dimensionalen Raum liegen, nicht gerade ein Punkt ist. Wählen wir die analoge Aussage eine Dimension niedriger, so erhalten wir die Axiome der projektiven Geometrie.

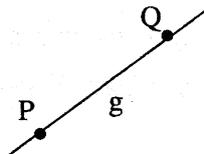
**Definition.** Es sei  $\mathcal{P}$  eine nichtleere Menge und  $\mathcal{G} \subseteq 2^{\mathcal{P}}$  nicht leer. Das Paar  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  heißt ein *projektiver Raum*, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

III.1 i)  $\forall P \neq Q \in \mathcal{P}: \exists_1 g \in \mathcal{G}$  mit  $\{P, Q\} \subseteq g$

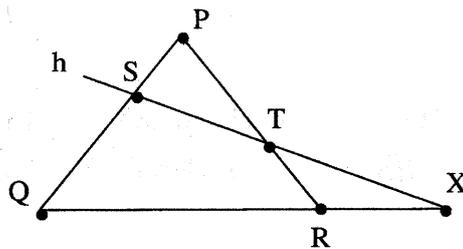
ii)  $g \in \mathcal{G} \Rightarrow |g| \geq 3$

III.2  $\forall P, Q, R \in \mathcal{P}$  nicht kollinear  $\forall h \in \mathcal{G}$ :

$(h \cap \overline{PQ} = S \notin \{P, Q, R\}, h \cap \overline{PR} = T \notin \{P, Q, R\}) \Rightarrow h \cap \overline{QR} \neq \emptyset$



III.1



III.2

**Bemerkung.** Axiom III.2 besagt nichts anderes, als daß zwei Geraden, die in einer Ebene liegen, stets einen Schnittpunkt haben. Man wählt diese Form, um den undefinierten Begriff "Ebene" entbehrlich zu machen. Laut III.1(ii) enthält jede Gerade mindestens drei Punkte. Diese Verschärfung gegenüber I.1(ii) ist unwesentlich. Würde man nur I.1(ii) fordern, so erhielte man direkte Produkte von projektiven Räumen.

**Beispiel.** Die Fano-Ebene auf S.9 ist die kleinste projektive Ebene und ist als solche bis auf Isomorphie eindeutig.

Die Untersuchung der projektiven Räume vollzieht sich nun völlig analog zu Kapitel 1.  $U \subseteq \mathcal{P}$  heißt *Unterraum*, falls  $U$  mit je zwei Punkten stets die ganze Gerade enthält. Der Durchschnitt von Unterräumen ist wieder Unterraum, also besitzt jede Menge  $A \subseteq \mathcal{P}$  einen eindeutigen *Abschluß*  $\overline{A}$  und es gilt wiederum  $\overline{A} = \bigcup_{B \subseteq A, |B| < \infty} \overline{B}$ . Entsprechend werden nun die Begriffe *Erzeugnis*, *unabhängig*, *abhängig* und *Basis* übernommen. Der zu 1.5 analoge Satz lautet nun:

**Satz 3.1** Sei  $G = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$  projektiver Raum,  $A$  Unterraum und  $Q \notin A$ . Dann ist  $A \vee Q = \bigcup_{X \in A} \overline{XQ}$ . Das heißt,  $A \vee Q$  ist die Vereinigung aller Verbindungsgeraden von  $Q$  nach  $A$ .

**Beweis.** Wir müssen zeigen, daß  $C = \bigcup_{X \in A} \overline{XQ}$  Unterraum ist, d.h. daß  $R, S \in C \Rightarrow \overline{RS} \subseteq C$ . Jede Gerade  $\overline{XQ}$  hat mit  $A$  genau  $X$  gemeinsam.

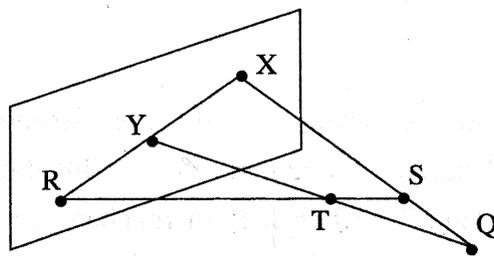


Abbildung 25:

Fall i)  $R \in A$ . Falls  $S \in A$  oder  $S \in \overline{QR}$ , so ist  $\overline{RS} \subseteq A \subseteq C$  bzw.  $\overline{RS} = \overline{QS} \subseteq C$ . Sei also  $S \notin A$ ,  $S \notin \overline{QR}$  und  $X = A \cap \overline{QS}$ . Sei  $T \in \overline{RS}$ ,  $T \neq R$ ,  $T \neq S$ . Nach Axiom III.2 hat  $\overline{QT}$  mit  $\overline{RX}$  einen Schnittpunkt  $Y \in A$ , also ist  $T \in \overline{YQ} \subseteq C$ .

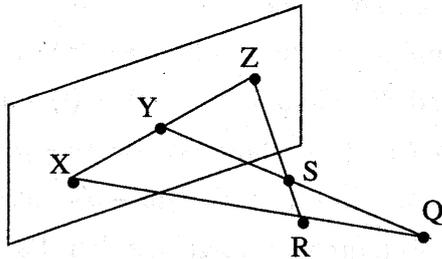


Abbildung 26:

Fall ii)  $R \notin A, S \notin A$ . Seien  $X = \overline{RQ} \cap A, Y = \overline{SQ} \cap A$ .

Nach Axiom III.2 hat die Gerade  $\overline{RS}$  mit  $\overline{XY}$  einen Schnittpunkt  $Z \in A$ .

Nach Fall i) ist dann  $\overline{ZR} = \overline{RS} \subseteq C$ .

□

Mit 3.1 können wir nun den Beweis des Hilfssatzes vor 1.6 und 1.6 selber wörtlich übernehmen.

**Satz 3.2** Sei  $G = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$  ein projektiver Raum. Jeder Unterraum besitzt eine Basis und je zwei Basen haben dieselbe Mächtigkeit.

Wie in Kapitel 1 definieren wir als die *Dimension* eines Unterraumes  $A$ ,  $\dim A := |B| - 1$ ,  $B$  Basis von  $A$ , und ebenso *Punkte*, *Geraden*, *Ebenen*, *Hyperebenen*.

Die Standardbeispiele projektiver Räume ergeben sich wieder aus den Vektorräumen.

**Satz 3.3** Sei  $K$  Schiefkörper und  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum über  $K$ ,  $n \geq 3$ . Sei  $\mathcal{P}$  die Menge der 1-dimensionalen linearen Unterräume und  $\mathcal{G}$  die Menge der 2-dimensionalen linearen Unterräume von  $V$ . Dann ist  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  ein projektiver Raum der Dimension  $n - 1$  (wobei  $P \in g$  bedeuten soll, daß der 1-dimensionale Unterraum  $P$  ganz im 2-dimensionalen Unterraum  $g$  enthalten ist) und die Unterräume von  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  sind genau die linearen Unterräume von  $V$ . Wir bezeichnen diesen Raum mit  $PG(V)$ .

**Beweis.**  $\langle u \rangle \neq \langle v \rangle \in \mathcal{P}$  sind in der eindeutigen Geraden  $\langle u \rangle + \langle v \rangle \in \mathcal{G}$  enthalten. Jede Gerade  $\langle u \rangle + \langle v \rangle$  enthält mindestens die Punkte  $\langle u \rangle$ ,  $\langle v \rangle$  und  $\langle u + v \rangle$ . Seien  $u, v, w$  linear unabhängig und die Gerade  $h = \langle s \rangle + \langle t \rangle$  mit  $s \in \langle u \rangle + \langle v \rangle$ ,  $t \in \langle u \rangle + \langle w \rangle$ ,  $s \notin \langle u \rangle, \langle v \rangle$ ,  $t \notin \langle u \rangle, \langle w \rangle$ . Dann ist  $s = \lambda u + \mu v$ ,  $t = \rho u + \sigma w$  mit  $\lambda, \mu, \rho, \sigma \neq 0$ . Daraus folgt  $\rho \lambda^{-1} s - t = \rho \lambda^{-1} \mu v - \sigma w$ , also  $(\langle s \rangle + \langle t \rangle) \cap (\langle v \rangle + \langle w \rangle) \neq \{0\}$ . Die letzte Behauptung folgt aus dem Satz der Linearen Algebra, daß  $U \subseteq V$  linearer Unterraum ist genau dann, wenn  $u, v \in U$  impliziert  $\langle u \rangle + \langle v \rangle \subseteq U$ .  $\square$

**Bemerkung.** Unabhängige bzw. abhängige Mengen im Raum  $PG(V)$  sind also genau linear unabhängige bzw. abhängige Mengen von Vektoren im Sinne der Linearen Algebra. Da die projektiven Punkte  $\langle u \rangle$  bis auf skalare Vielfache bestimmt sind, spricht man hier von *homogenen Koordinaten*.

Projektive Räume sind also Beispiele von Inzidenzräumen, in denen je zwei komplanare Geraden einen Schnittpunkt haben, d.h. in denen es überhaupt keine Parallelen gibt. Betrachten wir die kleinste affine und projektive Ebene:

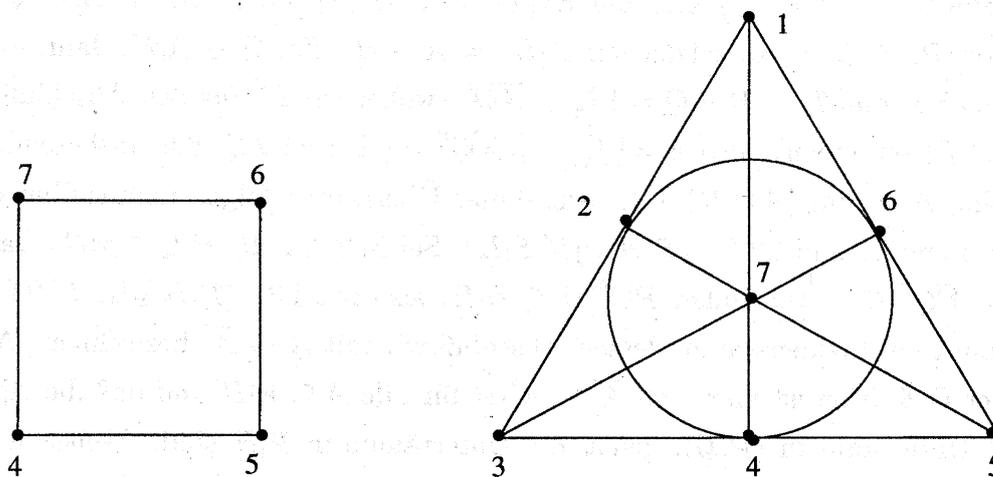


Abbildung 27:

Wir sehen, daß durch Weglassen der Geraden  $\{1, 2, 3\}$  aus der projektiven Ebene die affine Ebene erhalten wird. Umgekehrt müssen wir zu je zwei Parallelen  $\{4, 7\}$ ,  $\{5, 6\}$ ;  $\{4, 5\}$ ,  $\{6, 7\}$ ;  $\{4, 6\}$ ,  $\{5, 7\}$  neue Schnittpunkte im "Unendlichen" hinzufügen, um die projektive Ebene zu erhalten. Wir zeigen, daß dieser Sachverhalt allgemein gilt.

**Satz 3.4** Sei  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  projektiver Raum der Dimension  $n \geq 2$  und  $H$  eine Hyperebene. (Hyperebenen existieren nach 3.2 stets; sei  $B$  Basis von  $\mathcal{P}$ ,  $P \in B$ , dann ist  $\overline{B - P}$  Hyperebene.) Das Tripel  $(\mathcal{P}|H, \mathcal{G}|H, \mathcal{E}|H)$  mit  $\mathcal{P}|H := \mathcal{P} - H$ ,  $\mathcal{G}|H := \{g - H : g \in \mathcal{G}, g \not\subseteq H\}$ ,  $\mathcal{E}|H := \{\alpha - H : \alpha \text{ Ebene in } (\mathcal{P}, \mathcal{G}), \alpha \not\subseteq H\}$  mit der induzierten Inzidenz ist dann ein affiner Raum der Dimension  $n$ . Umgekehrt kann jeder affine Raum  $(\mathcal{P}', \mathcal{G}', \mathcal{E}')$  durch Hinzunahme einer geeigneten Menge  $H$  von "uneigentlichen" Punkten zu einem projektiven Raum  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  erweitert werden, so daß  $\mathcal{P}' = \mathcal{P}|H$ ,  $\mathcal{G}' = \mathcal{G}|H$ ,  $\mathcal{E}' = \mathcal{E}|H$  gilt.

**Beweis.** Sei  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  und die Hyperebene  $H$  gegeben. Ist  $A$  Unterraum von  $\mathcal{P}$ ,  $A \not\subseteq H$ , so setzen wir  $A|H := A - H$ . Sei  $Q \in A|H$ , dann folgt aus 3.1, daß  $\mathcal{P} = H \vee Q = \bigcup_{X \in H} \overline{XQ}^p$  (wobei wir  $\overline{B}^p$  für den Abschluß in  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  schreiben), also  $A = \bigcup_{X \in A \cap H} \overline{XQ}^p = (A \cap H) \vee Q$ , d.h. insbesondere  $\dim_p A = \dim_p(A \cap H) + 1$ . Aus dieser Überlegung folgen unmittelbar die Axiome I.1 und I.2 für  $(\mathcal{P}|H, \mathcal{G}|H, \mathcal{E}|H)$ . Sei  $\alpha|H \in \mathcal{E}|H$ ,  $P, Q \in \alpha|H$ . Dann ist  $\overline{PQ}^p \subseteq \alpha$  und daher  $\overline{PQ}^p|H \subseteq \alpha|H$ , also gilt I.3.  $(\mathcal{P}|H, \mathcal{G}|H, \mathcal{E}|H)$  ist somit ein Inzidenzraum, dessen Abschluß wir mit  $A \mapsto \overline{A}^a$  bezeichnen. Aus der Definition ist klar, daß  $\overline{A}^a = \overline{A}^p|H$  für alle  $A \subseteq \mathcal{P}|H$  und daß die  $A|H$ ,  $A$  Unterraum in  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ , genau die Unterräume in  $\mathcal{P}|H$  sind. Weiter folgt daraus  $A|H = B|H \Leftrightarrow A = B$  für alle Unterräume  $A, B \subseteq \mathcal{P}$ , da  $A$  aus  $A|H$  durch Hinzufügen aller Punkte  $X \in g \cap H$  mit  $g|H \subseteq A|H$  entsteht. Um I.4 zu zeigen, seien  $\alpha|H, \beta|H \in \mathcal{E}|H$  mit  $\alpha|H \cup \beta|H \subseteq \overline{PQRS}^a$ , also  $\alpha \cup \beta \subseteq \overline{PQRS}^p$ . Aus der eingangs angestellten Überlegung folgt, daß  $\alpha \cap H, \beta \cap H$  Geraden und  $\overline{PQRS}^p \cap H$  eine Ebene in  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  sind. Nach Axiom III.2 haben daher  $\alpha \cap H, \beta \cap H$  einen Schnittpunkt  $X \in \overline{PQRS}^p \cap H$ . Ist nun  $R \in \alpha|H \cap \beta|H$ , so gilt  $\overline{RX}^p \subseteq \alpha \cap \beta$ , also  $\overline{RX}^a \subseteq \alpha|H \cap \beta|H$ , d.h. I.4. Wir zeigen schließlich das Parallelenaxiom. Seien  $P \in \mathcal{P}|H, g \in \mathcal{G}|H$  mit  $P \notin g|H$  und  $P \cup g|H \subseteq \alpha|H \in \mathcal{E}|H$ . Wir wissen, daß  $h = \alpha \cap H \in \mathcal{G}$  und daß je zwei projektive Geraden in  $\alpha$  einen Schnittpunkt haben. Sei  $X = g \cap h$ . Jede Gerade durch  $P$ , die in  $\alpha$  liegt, trifft  $g$  in einem eindeutigen Punkt  $Y$ . Ist  $Y \notin H$ , d.h.  $Y \neq X$ , so ist dieser Schnittpunkt auch in der neuen Punktmenge  $\mathcal{P}|H$ . Es existiert daher genau eine Gerade aus  $\alpha|H$ , welche  $g|H$  nicht trifft und daher parallel ist, nämlich  $\overline{PX}^p|H$ . Aus  $\overline{A}^a = \overline{A}^p|H$  für alle  $A \subseteq \mathcal{P}|H$  folgt  $\overline{A}^a \subseteq \overline{A}^p$  und somit  $A \subseteq \mathcal{P}|H$  "projektive unabhängig"  $\Rightarrow A$  ist "affin unabhängig". Ist umgekehrt  $A \subseteq \mathcal{P}|H$  affin unabhängig und  $P \in A$ , so haben wir  $\overline{A - P}^p = \overline{A - P}^a \cup (\overline{A - P}^a \cap H)$ , also  $P \notin \overline{A - P}^p$ , d.h.  $A$  ist auch projektive unabhängig. Ist  $B$  affine Basis des Unterraumes  $A|H$ , so gilt  $\overline{B}^a = A|H$ , also  $\overline{B}^p = A$ , d.h.  $B$  ist projektive

Basis von  $A$  und wir haben insbesondere  $\dim_a A|H = \dim_p A$  für alle Unterräume  $A$  in  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ .

Sei nun umgekehrt ein affiner Raum  $(\mathcal{P}', \mathcal{G}', \mathcal{E}')$  gegeben. Unter einem uneigentlich Punkt  $\hat{B}$  verstehen wir eine Äquivalenzklasse  $\mathcal{B}$  paralleler Geraden;  $H$  sei die Menge der uneigentlichen Punkte. Wir sagen  $\hat{B}$  liegt auf der Geraden  $g \in \mathcal{G}'$  falls  $g \in \mathcal{B}$ , und  $\hat{B}$  liegt auf der Ebene  $\alpha \in \mathcal{E}'$  falls eine  $\hat{B}$  enthaltende Gerade ganz in  $\alpha$  liegt. Unter einer uneigentlichen Geraden verstehen wir die Menge der uneigentlichen Punkte einer Ebene. Unter einer eigentlichen Geraden die Menge aller eigentlichen und uneigentlichen Punkte einer Geraden aus  $\mathcal{G}'$ . Es sei nun  $\mathcal{P} := \mathcal{P}' \cup H$  und  $\mathcal{G}$  die Familie der eigentlichen und uneigentlichen Geraden, dann prüft man leicht nach, daß  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  mit der eben erklärten Inzidenz ein projektiver Raum ist mit  $\mathcal{P}' = \mathcal{P}|H$ ,  $\mathcal{G}' = \mathcal{G}|H$ ,  $\mathcal{E}' = \mathcal{E}|H$ .  $\square$

Bei unseren Standardbeispielen  $PG(V)$ ,  $AG(V)$  vollzieht man die Konstruktion aus 3.4 meist folgendermaßen. Es sei  $V = K^{n+1}$ , wobei wir die Vektoren  $v \in V$  mit  $(v_0, v_1, \dots, v_n)$  bezeichnen. Wir wählen als uneigentliche Hyperebene  $H = \{\langle (x_0, \dots, x_n) \rangle : x_0 = 0\}$ . Jeder projektive Punkt  $\langle v \rangle \notin H$  hat dann  $v_0 \neq 0$ , wobei wir durch Multiplizieren  $v_0 = 1$  erreichen können. Die Menge  $\mathcal{P}|_H$  der eigentlichen Punkte kann dann eindeutig als die Menge  $\mathcal{P}|_H = \{(1, x_1, \dots, x_n) : x_i \in K\}$  aufgefaßt werden, und wir erhalten  $AG(K^n)$ .

Nach 3.4 ist also die Theorie der projektiven Räume völlig äquivalent der der affinen Räume. Als Beispiel erhalten wir den zu 2.18 entsprechenden Koordinatisierungssatz: Die Desargues'schen Räume sind bis auf Isomorphie genau die Räume  $PG(V)$ . Insbesondere ist jeder projektive Raum mit Dimension  $\geq 3$  isomorph zu einem  $PG(V)$ . Daß man beide Theorien nebeneinander behandelt, hat neben historischen Gründen auch zweckmäßige. In

der projektiven Geometrie lassen sich die meisten Konfigurationssätze einfacher formulieren, da man zwischen schneidenden und parallelen Geraden nicht unterscheiden muß. So lautet zum Beispiel der Satz von Desargues nun: Sei  $O \in \overline{PP'} \cap \overline{QQ'} \cap \overline{RR'}$  und  $S = \overline{PQ} \cap \overline{P'Q'}$ ,  $T = \overline{PR} \cap \overline{P'R'}$ ,  $U = \overline{QR} \cap \overline{Q'R'}$  dann sind  $S, T, U$  kollinear. Umgekehrt ist aber die Handhabung der Koordinaten in den affinen Räumen  $AG(V)$  einfacher und übersichtlicher, als die der homogenen Koordinaten in  $PG(V)$ .

Man kann nun die Diskussion der Kollineationen und Affinitäten aus Kapitel 2 auf projektive Räume übertragen. Eine Kollineation von  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  ist eine Bijektion  $\pi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ , welche Geraden auf Geraden abbildet. Die Menge der Kollineationen bildet unter Komposition eine Gruppe, welche man im Raum  $PG(V)$  mit  $PS(V)$  bezeichnet. Den Dehnungen entsprechen die Perspektivitäten (auch axiale Kollineationen genannt). Eine *Perspektivitäten*  $\pi$  des projektiven Raumes  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  ist eine Kollineation, welche eine Hyperebene  $H$  punktweise festläßt.  $H$  heißt die *Achse* der Perspektivität. Ebenso kann man die Sätze 2.19 bis 2.25 übertragen. Sei  $PG(V)$ ,  $\dim V \geq 3$ , gegeben. Jede bijektive, semilineare Abbildung  $f : V \rightarrow V$  induziert eine Kollineation  $\varphi = \hat{f}$  von  $PG(V)$  durch die Festsetzung  $\varphi \langle u \rangle := \langle f(u) \rangle$ ,  $u \neq 0$ . Der folgende Satz ist das Analogon von 2.19.

**Satz 3.5** Sei  $V$  Vektorraum über  $K$  mit  $\dim V \geq 3$ . Zu jeder Kollineation  $\varphi$  von  $PG(V)$  existiert eine bijektive semilineare Abbildung  $f$  von  $V$  mit  $\varphi = \hat{f}$ . Ist  $g$  eine weitere bijektive semilineare Abbildung von  $V$  mit  $\varphi = \hat{g}$  und sind  $\sigma$  und  $\tau$  die zu  $f$  und  $g$  gehörenden Automorphismen von  $K$ , so gilt  $g(v) = f(\lambda v)$  für  $v \in V$  und ein festes  $0 \neq \lambda \in K$  und  $\mu^\tau = (\lambda \mu \lambda^{-1})^\sigma$  für  $\mu \in K$ . Umgekehrt ist  $\hat{g} = \varphi$  für jedes solche  $g$ .

**Beweis.** Wir zeigen die letzte Behauptung. Sei  $\varphi = \hat{f} = \hat{g}$ . Die semilineare Abbildung  $f^{-1}g$  bildet dann jeden Vektor  $v \neq 0$  auf ein Vielfaches von  $v$  ab.

Seien  $v, w$  linear unabhängig und  $f^{-1}g(v) = \alpha v, f^{-1}g(w) = \beta w, f^{-1}g(v + w) = \gamma(v + w)$ . Wir haben nun  $f^{-1}g(v + w) = f^{-1}g(v) + f^{-1}g(w) = \alpha v + \beta w$ , also  $\gamma = \alpha = \beta$ , da  $v, w$  linear unabhängig sind und somit  $g(v) = f(\alpha v), g(w) = f(\alpha w)$ . Sind  $v, w \neq 0$  linear abhängig, so wählen wir  $u \notin \langle v \rangle$  und schließen wie eben, also ist  $g(v) = f(\lambda v)$  für ein festes  $\lambda \in K$  und alle  $v \in V$ . Sei nun  $\mu \in K$ . Dann haben wir  $g(\mu v) = f(\lambda \mu v) = f(\lambda \mu \lambda^{-1} \cdot \lambda v) = (\lambda \mu \lambda^{-1})^\sigma f(\lambda v) = g(v) = f(\lambda v)$ , so haben wir  $g(v) = f(\lambda v) = \lambda^\sigma f(v)$ , d.h.  $\langle g(v) \rangle = \langle f(v) \rangle$  für alle  $v \in V$ .  $\square$

Als Folgerung haben wir:

**Satz 3.6** Sei  $\dim V \geq 3$  und  $PS(V)$  die Kollineationsgruppe von  $PG(V)$ . Wir bezeichnen mit  $i : K^x \rightarrow S(V)$  die Abbildung, die jedem  $\lambda \in K^x$  die semilineare Abbildung  $v \mapsto \lambda v$  zuordnet und mit  $p : S(V) \rightarrow PS(V)$  die Abbildung, die jedem  $f \in S(V)$  die Kollineation  $\hat{f}$  zuordnet. Dann ist  $1 \rightarrow K^x \xrightarrow{i} S(V) \xrightarrow{p} PS(V) \rightarrow 1$  eine exakte Sequenz.

**Beweis.**  $i$  und  $p$  sind klarerweise Homomorphismen,  $i$  ist injektiv und  $p$  surjektiv nach 3.5. Ferner ist  $f \in \ker(p) \Leftrightarrow \hat{f} = \text{id} \Leftrightarrow f(v) = \lambda v$  für alle  $v \in V$  und festem  $\lambda \in K^x$ .  $\square$

Entsprechend Kapitel 2 überlegen wir uns zum Schluß, wie jene Kollineationen  $\varphi = \hat{f}$  aussehen, für die  $f \in GL(V)$  ist. Man könnte analog zu Kapitel 2 den Begriff des Streckenverhältnisses auf die projektive Geometrie übertragen. Wir geben hier die folgende Charakterisierung.

**Definition.** Sei  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  ein projektiver Raum. Die *Projektivitäten* von  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  sind jene Kollineationen, die Produkte von endlich vielen Perspektivitäten sind.

**Satz 3.7** Sei  $\dim V \geq 3$ . Die Menge der Kollineationen  $\varphi \in PS(V)$  mit  $\varphi = \hat{f}$  für ein  $f \in GL(V)$  bildet eine Untergruppe  $PGL(V) \leq PS(V)$  (projective general linear group) und  $PGL(V)$  besteht genau aus den Projektivitäten von  $PG(V)$ .

**Beweis.**  $PGL(V)$  ist klarerweise eine Gruppe. Sei  $\varphi$  eine Perspektivität, welche die Hyperebene  $h$  punktweise festhält,  $\varphi = \hat{f}$ . Da  $f(v) = \alpha v$  für  $v \in H$  folgt wie in 3.5 durch Betrachtung linear unabhängiger Vektoren, daß  $f(v) = \lambda v$  für alle  $v \in H$  und festem  $0 \neq \lambda \in K$ . Nach 3.5 gilt für  $g \in S(V)$  mit  $g(v) = f(\lambda^{-1}v)$ ,  $v \in V$ , daß ebenfalls  $\varphi = \hat{g}$ .  $g$  erfüllt nun  $g(v) = v$  für alle  $v \in H$ . Sei  $\sigma$  der zu  $g$  gehörende Automorphismus von  $K$ . Für  $0 \neq v \in H$  haben wir dann  $g(\mu v) = \mu^\sigma g(v) = \mu^\sigma v$  und  $g(\mu v) = \mu v$ . Daraus folgt nun  $\mu^\sigma = \mu$  für alle  $\mu \in K$ , also  $\sigma = 1$ . Jede Perspektivität ist somit in  $PGL(V)$  und damit auch jede Projektivität. Sei nun umgekehrt  $\varphi = \hat{f}$ ,  $f \in GL(V)$ . Aus der Linearen Algebra wissen wir, daß  $f$  durch eine Dreiecksmatrix in bezug auf eine gewisse Basis  $B_0 = \{e_1, \dots, e_n\}$  dargestellt werden kann, das heißt, wir können annehmen, daß  $B_i = \{f(e_1), \dots, f(e_i), e_{i+1}, \dots, e_n\}$  eine Basis ist für jedes  $i$ . Sei nun  $g_i \in GL(V)$  jene Abbildung, welche  $B_{i-1}$  auf  $B_i$  abbildet, das heißt,  $g_i(f(e_j)) = f(e_j)$  für  $j = 1, \dots, i-1$ ,  $g_i(e_j) = e_j$  für  $j = i+1, \dots, n$  und  $g_i(e_i) = f(e_i)$ . Jedes  $\hat{g}_i$  ist eine Perspektivität, und wir haben  $f = g_n \dots g_2 g_1$ , das heißt,  $\hat{f} = \hat{g}_n \dots \hat{g}_1$ .  $\square$

**Satz 3.8** Sei  $\dim V \geq 3$ . Dann ist  $PGL(V) \trianglelefteq PS(V)$  mit  $PS(V)/PGL(V) \cong \text{Aut}K/\text{Inn}K$ , wobei  $\text{Inn}K$  der Normalteiler der inneren Automorphismen  $\mu \mapsto \lambda\mu\lambda^{-1}$  ist. Weiter haben wir die exakte Sequenz  $1 \rightarrow Z^x \xrightarrow{i} GL(V) \xrightarrow{p} PGL(V) \rightarrow 1$ , wobei  $Z$  das Zentrum von  $K$  ist.

**Beweis.** Die Einschränkung von  $p : S(V) \rightarrow PS(V)$  aus 3.6 auf  $GL(V)$  hat als Kern die linearen Abbildungen  $f : v \mapsto \lambda v$ . Das heißt,  $f(\mu v) =$

$\lambda\mu v = \mu f(v) = \mu\lambda v$ , also  $\lambda\mu = \mu\lambda$  für alle  $\mu \in K$  und somit  $\lambda \in Z^x$ . Sei  $\varphi = \hat{f} \in PS(V)$  und  $\sigma$  der zu  $f$  gehörende Automorphismus. Aus 3.5 wissen wir, daß die Zuordnung  $\varphi \mapsto \sigma$  das Bild modulo  $\text{Inn}K$  determiniert, und man sieht leicht, daß  $t : PS(V) \rightarrow \text{Aut}K/\text{Inn}K$ ,  $t(\varphi) = \sigma \text{Inn}K$  Homomorphismus ist.  $\varphi$  ist in  $\text{kert}$ , falls ein zu  $\varphi$  gehörender Automorphismus die Identität ist, das heißt, falls  $\varphi \in PGL(V)$  ist.  $\square$

Wir können als Abbildungen in einem Diagramm exakter Sequenzen zusammenfassen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \rightarrow & Z^x & \rightarrow & GL(V) & \rightarrow & PGL(V) & \rightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 1 & \rightarrow & K^x & \rightarrow & S(V) & \rightarrow & PS(V) & \rightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 1 & \rightarrow & \text{Inn}K & \rightarrow & \text{Aut}K & \rightarrow & \text{Aut}K/\text{Inn}K & \rightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & & 
 \end{array}$$

Besitzt ein Körper  $K$  nur den identischen Automorphismus, wie zum Beispiel  $\mathbb{Q}$  oder  $\mathbb{R}$ , so fallen die Gruppen  $GL(V) = S(V)$  und  $PGL(V) = PS(V)$  zusammen. Jede Kollineation ist dann eine Projektivität. Für einen Vektorraum über  $\mathbb{C}$  haben wir stets eine Kollineation  $\varphi$  zu, die nicht Projektivität ist, zum Beispiel  $\varphi = \hat{f}$  mit  $f(x_1, \dots, x_n) = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ , wo  $\bar{x}_i$  die konjugiert komplexe Zahl zu  $x_i$  ist. Denn wäre  $\varphi \in PGL(V)$ , so hätten wir laut dem Diagramm  $x \mapsto \bar{x} = 1$ , da wegen der Kommutativität von  $\mathbb{C}$   $\text{Inn}\mathbb{C} = \{1\}$  ist.

## Aufgaben

1. Sei  $E = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$  eine endliche projektive Ebene. Zeige: Es existiert  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , so daß

(a)  $|\mathcal{P}| = |\mathcal{G}| = n^2 + n + 1$ .

(b) Jeder Punkt liegt auf genau  $n + 1$  Geraden, und jede Gerade enthält genau  $n + 1$  Punkte.

$n$  heißt die Ordnung von  $E$ . Was ist die Ordnung von  $\mathcal{P}(V)$ ,  $V = GF(q)^3$ ?

2. Seien  $A, B$  Unterräume des projektiven Raumes  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ . Dann gilt  $\dim(A \wedge B) + \dim(A \vee B) = \dim A + \dim B$ . Falls  $\dim A = \dim B$ , so existiert ein Unterraum  $C$  mit  $A \vee C = B \vee C = \mathcal{P}$  und  $A \wedge C = B \wedge C = \emptyset$ .

3. Beweise mit Hilfe von 2. den räumlichen Desargues'schen Satz.

4. Vervollständige den Beweis in 3.4.

5. Sei  $\pi$  eine Perspektivität mit Achse  $H$ . Zeige:

(a) Falls  $\pi(P) = P$ ,  $\pi(Q) = Q$  für  $P \neq Q$ ,  $P, Q \notin H$ , dann ist  $\pi = 1$ .

(b)  $\pi$  ist vollständig determiniert durch die Bilder  $\pi(P)$ ,  $\pi(Q)$ ;  $P, Q \notin H$ .

(c) Ist  $\pi \neq 1$ , so existiert ein eindeutiger Punkt  $P_0$ , so daß  $\pi(g) = g$  für jede Gerade  $g$  mit  $P_0 \in g$ .  $P_0$  heißt das *Zentrum der Perspektivität*.  $\pi$  heißt *Homologie*, falls  $P_0 \notin H$  und *Elation*, falls  $P_0 \in H$ . (Ist es klar, daß diese Begriffe den Dehnungen mit Fixpunkt und den Translationen entsprechen?)

(d) Eine Elation  $\pi$  ist durch das Bild  $\pi(P)$  eines Punktes  $P \notin H$  vollständig bestimmt.

6. Sei  $\dim V = n \geq 3$  und  $\{P_0, \dots, P_n\}, \{Q_0, \dots, Q_n\}$  Punkte in  $PG(V)$ , so daß in jeder Menge je  $n$  unabhängig sind. Zeige, daß eine Kollineation (sogar eine Projektivität)  $\varphi$  existiert mit  $\varphi(P_i) = Q_i$  für alle  $i$ .
7. Sei  $V$  ein Vektorraum über dem Körper  $K$ ,  $\dim V = n \geq 3$ . Zeige: Ist  $f \in GL(V)$ , so daß  $\hat{f} n + 1$  Punkte von  $\mathcal{P}(V)$  festläßt, von denen keine  $n$  auf einer Hyperebene liegen, so ist  $\hat{f} = 1$ . Zeige, daß der Satz für beliebige semilineare Abbildungen  $f$  nicht gilt und auch nicht im allgemeinen für Schiefkörper.
8. Sei  $\dim V \geq 3$ . Zeige, daß jede Kollineation von  $PG(V)$  eine Projektivität ist genau dann, wenn  $K$  nur innere Automorphismen besitzt.



## 4 Geordnete Geometrie

**Definition.** Ein planarer Inzidenzraum  $G = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{E})$  heißt *geordneter Raum*, falls zusätzlich folgende Bedingungen erfüllt sind:

**IV.1** Jede Gerade ist linear geordnet.

Zur Vereinfachung der Sprechweise sagen wir:  $R$  liegt *zwischen*  $P$  und  $Q$ , falls  $P, Q, R$  verschiedene kollineare Punkte sind und  $P < R < Q$  oder  $Q < R < P$  gilt.

**IV.2**  $P \neq Q \in \mathcal{P} \Rightarrow \exists R \in \overline{PQ}$  so daß  $P$  zwischen  $R$  und  $Q$  liegt.

**IV.3** Sei  $P, Q, R$  Dreieck und  $g \in G, g \subseteq \overline{PQR}, g \cap \{P, Q, R\} = \emptyset$ . Wenn  $g$  einen Punkt  $X$  enthält, der zwischen  $P$  und  $Q$  liegt, so enthält  $g$  auch noch einen Punkt zwischen  $P$  und  $R$  oder einen Punkt zwischen  $Q$  und  $R$ .

IV.3 heißt das *Pasch'sche Axiom*. Einen geordneten Raum bezeichnen wir kurz mit  $G_{<}$ .

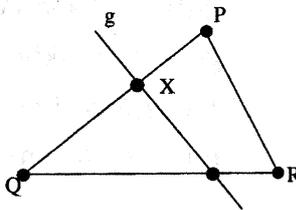


Abbildung 28:

**Bemerkung:** Man kommt schon mit schwächeren Bedingungen aus, um die lineare Ordnung auf der Geraden sicherzustellen.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

Für die Aussage "X liegt zwischen P und Q" schreiben wir oft  $PXQ \in \mathfrak{Z}$  und setzen  $]P, Q[ := \{X \in \mathcal{P} : PXQ \in \mathfrak{Z}\}$ ,  $[P, Q] := ]P, Q[ \cup \{P, Q\}$ ,  $]P, Q[$  und  $[P, q]$  heißen das *offene* bzw. *abgeschlossene Intervall* zwischen P und Q.

Ähnlich sprechen wir von halb offenen Intervallen. Zum Pasch'schen Axiom sagen wir kurz: Schneidet g eine Seite eines Dreiecks im Inneren, so noch eine weitere.

Wir ziehen einige erste Folgerungen:

**Satz 4.1** Sei  $g \in \mathcal{G}$  und  $P \neq Q \in g$ ,  $P < Q$ . Dann gibt es Punkte R, S, T mit  $R < P < S < Q < T$ . Das heißt, jede Gerade ist in sich dicht und besitzt weder ein größtes noch ein kleinstes Element. Insbesondere enthält also jede Gerade unendlich viele Punkte.

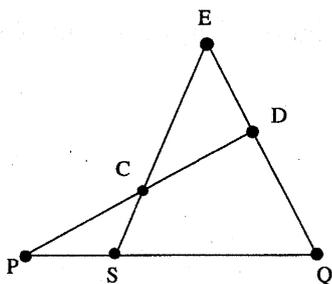


Abbildung 29:

**Beweis.** Die Existenz von R und T folgt unmittelbar aus IV.2. Sei  $C \notin \overline{PQ}$ . Nach IV.2 gibt es Punkte D und E mit  $PCD \in \mathfrak{Z}$  und  $EDQ \in \mathfrak{Z}$ . Die Gerade  $\overline{EC}$  schneidet  $\overline{PD}$  im Inneren, also nach IV.3 auch  $\overline{PQ}$ .  $\square$

**Satz 4.2** Sei  $P, Q, R$  Dreieck,  $g \in \mathcal{G}$ ,  $g \cap \{P, Q, R\} = \emptyset$ . Schneidet g eine Seite des Dreiecks im Inneren, so schneidet g noch genau eine weitere Seite im Inneren.

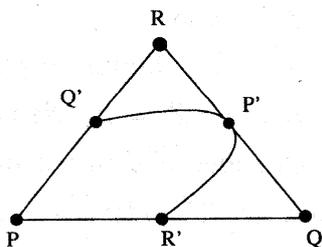


Abbildung 30:

**Beweis.** Angenommen  $g \cap \overline{PQ} = R'$ ,  $g \cap \overline{PR} = Q'$ ,  $g \cap \overline{QR} = P'$  und es gilt  $PR'Q \in \mathfrak{Z}$ ,  $PQ'R \in \mathfrak{Z}$ ,  $QP'R \in \mathfrak{Z}$ . Sei o.B.d.A  $R'P'Q' \in \mathfrak{Z}$ . Betrachten wir nun das Dreieck  $P, Q', R'$ , dann schneidet die Gerade  $\overline{R'Q}$  nur die Seite  $\overline{Q'R'}$  im Inneren, im Widerspruch zu Axiom IV.3.  $\square$

Als eine der wichtigsten Folgerungen des Ordnungsbegriffes können wir Halbgeraden, Halbebenen und allgemein Halbräume definieren.

**Definition.** Sei  $g \in \mathcal{G}$ ,  $O \in g$ . Die beiden Mengen  $]O, \cdot[ := \{X \in g : X > 0\}$  und  $[\cdot, O[ := \{X \in g : X < 0\}$  heißen die beiden *Halbgeraden* von  $g$  mit *Scheitel*  $O$ .

Ist  $p$  eine Halbgerade, so schreiben wir  $O(p)$  für den Scheitel und  $p^-$  für die entgegengesetzte Halbgerade. Die Gerade  $g$ , bestimmt durch  $p$  (oder  $p^-$ ), ist also die disjunkte Vereinigung  $g = p \dot{\cup} \{O(p)\} \dot{\cup} p^-$ . Ist  $O \in g$ ,  $O \neq P \in g$ , so bezeichnet  $OP^+$  die Halbgerade mit Scheitel  $O$ , welche  $P$  enthält, und  $OP^-$  die Halbgerade mit Scheitel  $O$ , welche  $P$  nicht enthält.

Wir sehen, daß die beiden Halbgeraden induziert durch  $O \in g$  genau die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation  $X \sim Y : \iff [X, Y] \cap \{O\} = \emptyset$  auf  $g - \{O\}$  sind. Dies wollen wir nun auf beliebige Dimension verallgemeinern.

**Satz 4.3** Seien  $\alpha, \beta$  Unterräume des geordneten Raumes  $G_{<}$  mit  $\alpha \subseteq \beta$  und  $\dim(\alpha) = \dim \beta - 1 \geq 0$ . Die Relation  $X \sim Y := [X, Y] \cap \{\alpha\} = \emptyset$  ist eine Äquivalenzrelation auf  $\beta - \alpha$  mit genau 2 Äquivalenzklassen.

**Beweis.**  $\sim$  ist sicherlich reflexiv und symmetrisch. Sei nun  $X \sim Y$ ,  $Y \sim Z$ . Angenommen  $X \not\sim Z$ , dann existiert  $R \in \alpha \cap [X, Z]$ . Daraus folgt, daß  $X, Y, Z$  ein Dreieck ist mit  $R \in \alpha \cap \overline{XYZ}$  und  $\alpha \vee \overline{XYZ} = \beta$ . Nach 1.8 folgt daraus  $\alpha \cap \overline{XYZ} = g \in \mathcal{G}$ . Die Gerade  $g$  schneidet  $\overline{XZ}$  in einem weiteren Punkt, nämlich  $R$ , muß also nach IV.3 auch noch  $\overline{XY}$  oder  $\overline{YZ}$  im Inneren schneiden, im Widerspruch zu  $X \sim Y$ ,  $Y \sim Z$ .  $\sim$  hat mindestens 2 Äquivalenzklassen aufgrund von IV.2. Es bleibt zu zeigen, daß  $X \not\sim Y, X \not\sim Z$  impliziert  $Y \sim Z$ . Dies ist klar, wenn  $X, Y, Z$  kollinear sind. Sei nun  $X, Y, Z$  ein Dreieck und  $R \in [X, Y] \cap \alpha, S \in [X, Z] \cap \alpha$ . Wären  $R, S, T$  kollinear,  $g = \overline{RST}$ , so würde  $g$  alle Seiten des Dreiecks  $X, Y, Z$  im Inneren treffen, was nicht geht nach 4.2. Also ist  $\overline{RST}$  eine Ebene, d.h.  $\overline{RST} = \overline{XYZ} \subseteq \alpha$ , im Widerspruch zu  $X, Y, Z \in \beta - \alpha$ .  $\square$

Die beiden in 4.3 konstruierten Äquivalenzklassen  $\gamma^+, \gamma^-$  heißen die *Halbräume* von  $\beta$  bezüglich  $\alpha$ ;  $\gamma^+ \cup \alpha, \gamma^- \cup \alpha$  heißen *abgeschlossenen Halbräume* und  $\alpha$  heißt der *Rand* von  $\gamma^+$  und  $\gamma^-$  und wir schreiben  $\alpha = bd(\gamma^+) = bd(\gamma^-)$ . Es gilt also  $\beta = \gamma^+ \dot{\cup} bd(\gamma^+) \dot{\cup} \gamma^-$ . Analog zu oben führen wir folgende Bezeichnung ein: Ist  $P \in \alpha$  so bedeutet  $\alpha P^+$  den Halbraum  $\alpha \vee P$  bezüglich  $\alpha$ , der  $P$  enthält und  $\alpha P^-$  den entgegengesetzten Halbraum. Für Geraden  $g = \overline{PQ}$  schreiben wir kurz  $PQR^+, PQR^-$ . Das heißt,  $PQR^+$  ist die Halbebene von  $\overline{PQR}$  bezüglich der Geraden  $\overline{PQ}$ , welche  $R$  enthält; entsprechend für  $PQR^-$ . Ist  $H$  Hyperebene, so schreiben wir  $H^+, H^-$  für die beiden Halbhyperebenen, in welche  $\mathcal{P}$  durch  $H$  zerlegt wird. Als Ergänzung zu 4.3 zeigen wir, daß ein Halbraum einen eindeutig bestimmten Rand hat.

**Satz 4.4** Seien  $\alpha \neq \alpha' \subseteq \beta$  mit  $\dim(\alpha) = \dim(\alpha') = \dim \beta - 1$  und  $\beta = \gamma^+ \dot{\cup} \alpha \dot{\cup} \gamma^- = \delta^+ \dot{\cup} \alpha' \dot{\cup} \delta^-$  die Zerlegungen in offene Halbräume. Dann sind  $\gamma^+, \gamma^- \neq \delta^+, \delta^-$ .

**Beweis** Angenommen  $\gamma^+ = \delta^+$ . Dann ist  $\alpha - \alpha' \subseteq \delta^-$ ,  $\alpha' - \alpha \subseteq \gamma^-$ . Sei  $P \in \alpha - \alpha'$ ,  $Q \in \gamma^+$ . Wegen  $P \in \delta^-$ ,  $Q \in \delta^+$  existiert  $R \in \alpha' \cap [P, Q]$ . Da  $R \in \alpha' - \alpha \subseteq \gamma^-$ ,  $Q \in \gamma^+$ , existiert  $S \in \alpha \cap [R, Q]$ . Das heißt die Gerade  $\overline{PQ} = \overline{PS}$  ist in  $\alpha$ , im Widerspruch zu  $Q \notin \alpha$ .  $\square$

Die Aussage in 4.3 ist für Dimension 1 äquivalent zum Pasch'schen Axiom

**Satz 4.5** Sei  $G$  ein Inzidenzraum, der IV.1 und IV.2 erfüllt. Gilt für jedes  $g \in \mathcal{G}$ ,  $\alpha \in \mathcal{E}$ ,  $g \subseteq \alpha$ , daß  $X \sim Y \Leftrightarrow [X, Y] \cap g = \emptyset$  eine Äquivalenzrelation auf  $\alpha - g$  mit genau zwei Klassen ist, dann erfüllt  $G$  auch IV.3.

**Beweis.** Sei  $P, Q, R$  Dreieck und  $g \in \mathcal{G}$  mit  $g \cap \{P, Q, R\} = \emptyset$ ,  $g \cap [P, Q] \neq \emptyset$ . Dann gilt  $P \not\sim Q$  und daher  $P \not\sim R$  oder  $Q \not\sim R$ , da  $\sim$  genau zwei Klassen besitzt.  $\square$

Als neuen Begriff der geordneten Geometrie können wir nun Winkel einführen.

**Definition.** Ein Winkel in dem geordneten Raum  $G_{<}$  ist ein Paar  $p = OP^+$ ,  $q = OQ^+$  von nicht kollinearen Halbgeraden mit demselben Scheitel  $O = O(p) = O(q)$ . Wir schreiben  $\sphericalangle(p, q)$  oder  $\sphericalangle(POQ)$ .

**Satz 4.6** Sei der Winkel  $\sphericalangle(p, q)$  mit  $O = O(p) = O(q)$  gegeben,  $\alpha = \overline{p \cup q}$ . Dann sind  $q$  und  $q^-$  in verschiedenen Halbebenen von  $\alpha$  bezüglich der Geraden  $p \cup \{O\} \cup p^-$  und analog  $p$  und  $p^-$  in verschiedenen Halbebenen bezüglich der Geraden  $q \cup \{O\} \cup q^-$ .

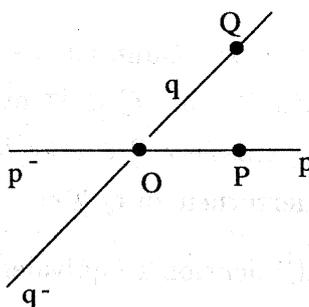


Abbildung 31:

**Beweis.** Seien  $R, S \in q \cup q^-$  und  $g = p \cup \{O\} \cup p^-$ . Dann ist  $[R, S] \cap g \neq \emptyset \Leftrightarrow O \in [R, S] \Leftrightarrow R, S$  in verschiedenen Halbgeraden  $q, q^-$ .  $\square$

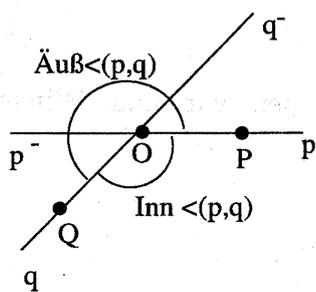
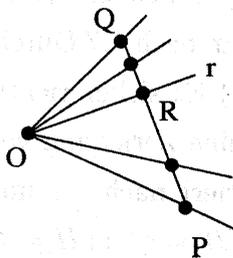


Abbildung 32:

Seien  $p, q$  Halbgeraden mit Scheitel  $O = O(p) = O(q)$ ,  $P \in p$ ,  $Q \in q$ . Bezeichnen wir mit  $pq^+$  die Halbebene bestimmt durch  $g = p \cup \{O\} \cup p^-$ , welche  $q$  enthält und analog  $pq^-$ , d.h.  $pq^+ = OPQ^+$ ,  $pq^- = OPQ^-$ , dann teilt also jeder Winkel  $\sphericalangle(p, q)$  die Ebene  $\alpha$  in 4 disjunkte Winkelfelder:  $pq^+ \cap qp^+$ ,  $pq^+ \cap qp^-$ ,  $pq^- \cap qp^+$ ,  $pq^- \cap qp^-$ .  $pq^+ \cap qp^+$  heißt das *innere Winkel*  $\text{Inn}\sphericalangle(p, q)$ , die Vereinigung der anderen Winkelfelder das *äußere Winkel*  $\text{Äuß}\sphericalangle(p, q)$ . Es gilt also:  $\text{Äuß}\sphericalangle(p, q) = \text{Inn}\sphericalangle(p, q^-) \dot{\cup} \text{Inn}\sphericalangle(p^-, q) \dot{\cup} \text{Inn}\sphericalangle(p^-, q^-)$ .

Sei  $\sphericalangle(POQ)$  Winkel in der Ebene  $\alpha$ . eine Halbgerade  $OR^+$  heißt eine *innere Halbgerade*, falls  $R \in \text{Inn}\sphericalangle(POQ)$ , d.h.  $OR^+ \subseteq \text{Inn}\sphericalangle(POQ)$  nach 4.6, ansonsten *äußere Halbgerade*.

**Satz 4.7** Sei  $\sphericalangle(POQ)$  Winkel in  $\alpha$  und  $r$  Halbgerade in  $\alpha$  mit  $O(r) = O$ . Genau dann ist  $r$  innere Halbgerade, wenn  $r \cap ]P, Q[ \neq \emptyset$ . Das heißt, alle inneren Halbgeraden sind von der Gestalt  $OR^+$  mit  $R \in ]P, Q[$ .



**Beweis.** Jedes  $R \in ]P, Q[$  ist in  $OPQ^+ \cap OQP^+$ , also ist  $OR^+$  innere Halbgerade. Die Umkehrung folgt unmittelbar aus Axiom IV.3.  $\square$

Abbildung 33:

Die Bezeichnung "abgeschlossener" Halbraum deutet schon auf topologische Begriffe hin.

**Definition.** Sei  $G_{<}$  geordneter Raum.  $G_{<}$  wird zu einem topologischen Raum  $G_C$ , indem wir als Basis für die offenen Mengen alle endlichen Durchschnitte von Halbhyperebenen nehmen. Das heißt,  $A$  ist genau dann offen, wenn  $A = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} H_{ij}$ ,  $I$  beliebig,  $|J| < \infty$  und  $H_{ij}$  Halbhyperebene. Die so erklärte Topologie heißt *Ordnungstopologie* auf  $G_{<}$ .

Um Verwechslungen auszuschließen, wird der topologische Abschluß von  $A$  mit  $cl(A)$  bezeichnet.

#### Satz 4.8

- (i) Alle Unterräume von  $G$  sind abgeschlossen.
- (ii) Alle abgeschlossenen Halbräume sind abgeschlossen.
- (iii) Ist  $\gamma^+$  Halbraum, so ist jeder Punkt von  $bd(\gamma^+)$  (topologischer) Randpunkt von  $\gamma^+$  und es gilt  $cl(\gamma^+) = \gamma^+ \cup bd(\gamma^+)$ .

(iv)  $G_{\subset}$  ist Hausdorff'sch, d.h. zu je zwei Punkten  $P \neq Q$  existieren Umgebungen  $U, V$  mit  $P \in U, Q \in V$ , und  $U \cap V = \emptyset$ .

**Beweis.** Eine Hyperebene ist abgeschlossen, da sie Komplement der Vereinigung der beiden Halbhyperebenen ist. Da jeder Unterraum nach 1.7 Durchschnitt der ihn enthaltenden Hyperebenen ist, folgt i). ii) ist sicher richtig für abgeschlossene Halbhyperebenen. Sei  $\beta = \alpha \cup \gamma^+ \cup \gamma^-$  eine Zerlegung von  $\beta$  und  $H$  eine Hyperebene mit  $\alpha \subseteq H, \beta \not\subseteq H$ , ( $H$  existiert nach 1.7 und  $H^+, H^-$  die Halbhyperebenen induziert von  $H$ ). Da  $\gamma^+ \cap H = \gamma^- \cap H = \emptyset$  ist, haben wir  $\gamma^+ \subseteq H^+, \gamma^- \subseteq H^-$  bei geeigneter Numerierung. Also ist  $\beta \cap (H \cup H^+) = (\beta \cap H) \cup (\beta \cap H^+) = \alpha \cup \gamma^+$ , d.h.  $\alpha \cup \gamma^+$  ist abgeschlossen. Sei nun wiederum  $\beta = \gamma^+ \cup bd(\gamma^+) \cup \gamma^-$  Zerlegung von  $\beta, P \in bd(\gamma^+), \bigcap_{i=1}^k H_i^+$  offene Basismenge mit  $P \in \bigcap_{i=1}^k H_i^+$ , wobei  $\mathcal{P} = H_i^+ \cup H_i \cup H_i^-$  für  $i = 1, \dots, k$ . Um iii) zu beweisen, zeigen wir, daß  $\bigcap H_i^+ \cap \gamma^+ \neq \emptyset \neq \bigcap H_i^+ \cap \gamma^-$ . Sei  $Q \in \gamma^+, R \in \gamma^-$  und  $P, Q, R$  kollinear, wobei o.B.d.A.  $Q < P < R$ .  $H_i$  hat mit  $g = \overline{QR}$  höchstens einen Schnittpunkt, da  $g \not\subseteq H_i$ . Unter all diesen Schnittpunkten und  $Q, R$  gibt es einen größten Punkt  $Q' \in g$  mit  $Q' < P$  und einem kleinsten Punkt  $R' \in g$  mit  $P < R'$ . Sei  $Q' < S < P < T < R'$  auf  $g$ . Dann gilt  $[S, P] \cap H_i = \emptyset = [P, T] \cap H_i$  für alle  $i$ , also  $[S, P] \cup [P, T] \subseteq \bigcap_{i=1}^k H_i^+$  wegen  $P \in \bigcap_{i=1}^k H_i^+$ , somit  $S \in \bigcap H_i^+ \cap \gamma^+, T \in \bigcap H_i^+ \cap \gamma^-$ . Zum Beweis von iv) wählen wir  $R \in \overline{PQ}, PRQ \in \mathfrak{Z}$  und eine Hyperebene  $H$  mit  $R \in H, P \notin H$  (1.7). Dann ist auch  $Q \notin H$  und  $P \in H^+, Q \in H^-$  mit  $H^+ \cap H^- = \emptyset$ .  $\square$

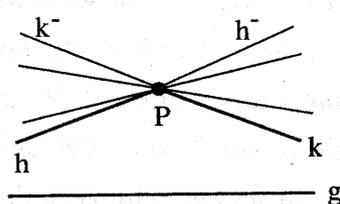
Setzen wir das Dedekindsche Axiom voraus, so können wir die Existenz von Parallelen beweisen.

**Definition.** Ein geordneter Raum  $G_{\subset}$  heißt *stetig geordnet*, falls jede Gerade das Dedekindsche Anordnungsaxiom erfüllt, d.h. falls jede nichtleere

nach oben beschränkte Punktmenge ein Supremum und, analog, jede nichtleere nach unten beschränkte Punktmenge ein Infimum hat.

Für unsere Zwecke ist die folgende äquivalente Formulierung nützlich: Sei  $g \in \mathcal{G}$  und  $g = h \cup k$  eine beliebige disjunkte Zerlegung in nichtleere Mengen  $h, k$  mit  $P < Q$  für alle  $P \in h, Q \in k$ . Dann existiert ein Punkt  $D$  mit  $P < D < Q$  für alle  $D \neq P \in h, D \neq Q \in k$ . Klarerweise ist  $D = \sup h = \inf k$ . Ob  $D$  in  $h$  oder  $k$  liegt, ist dabei gleichgültig.

**Satz 4.9** Sei  $G_{<}$  ein stetig geordneter Raum,  $P \in \mathcal{P}, g \in \mathcal{G}$  mit  $P \notin g$ . Dann existiert mindestens eine Parallele zu  $g$  durch  $P$ . Mehr noch: Gibt es mehr als eine Parallele, so existieren zwei eindeutig determinierte "Randparallelen" mit Halbgeraden  $h \neq k, O(h) = O(k) = P$ , so daß:



$$(i) g \subseteq \text{Inn}\triangleleft(h, k)$$

(ii)  $l \in \mathcal{G}, l \neq \bar{h}, \bar{k}$  mit  $P \in l$  ist genau dann Parallele, wenn  $l \subseteq \text{Inn}\triangleleft(h, k^-) \cup \{P\} \cup \text{Inn}\triangleleft(k, h^-)$ .

**Beweis.** Seien  $Q, R \in g, Q \neq R, R' \in PR^-, Q' \in PQ^-$ . Wir betrachten  $\triangleleft(QPR')$  und die Menge  $\mathcal{H}$  aller inneren Halbgeraden von  $\triangleleft(QPR')$ .

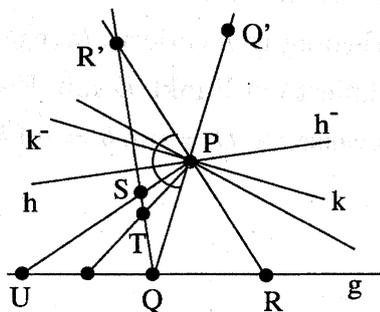


Abbildung 34:

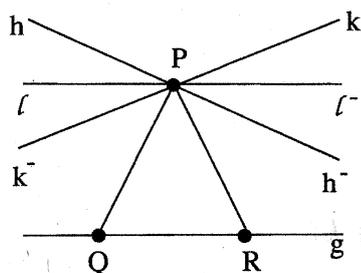


Abbildung 35:

Nach 4.7 korrespondiert jede solche Halbgerade  $s$  bijektiv zu einem Punkt  $S \in ]Q, R'[$ . Wir zerlegen  $]Q, R'[$  und damit  $\mathcal{H}$  in zwei disjunkte Klassen  $\mathcal{H}_1$  und  $\mathcal{H}_2$  je nachdem, ob  $PS^+ \cap g \neq \emptyset$  oder  $PS^+ \cap g = \emptyset$ . Offenbar gilt  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \dot{\cup} \mathcal{H}_2$ ,  $\mathcal{H}_1 \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{H}_2 \neq \emptyset$ . sei o.B.d.A.  $Q < R'$  auf  $\overline{QR'}$ . Ist  $PS^+ \in \mathcal{H}_1$ ,  $T \in \overline{QR'}$ ,  $Q < T < S$ , so ist  $PT^+ \in \mathcal{H}_1$ , da  $PT^+ \cap ]U, Q[ \neq \emptyset$  nach IV.3 angewandt auf das Dreieck  $S, U, Q$  und die Gerade  $\overline{PT}$ . Da  $\overline{QR'}$  stetig geordnet ist, existiert also eine Halbgerade  $h \in \mathcal{H}$ , die zwischen je zwei Halbgeraden  $\neq h$  aus  $\mathcal{H}_1$  und  $\mathcal{H}_2$  liegt, wobei  $h \in \mathcal{H}_2$  liegen muß wegen IV.2, d.h.  $h \cap g = \emptyset$ . Analog zerlegen wir die Menge  $\mathcal{K}$  aller inneren Halbgeraden von  $\sphericalangle(RPQ')$  in  $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$  und schließen wiederum auf eine eindeutige Halbgerade  $k$ , die zwischen je zwei Halbgeraden  $\neq k$  aus  $\mathcal{K}_1$  und  $\mathcal{K}_2$  liegt, wobei  $k \cap g = \emptyset$ . Falls  $h, k$  kollinear sind, ist  $h \cup \{P\} \cup k$  nach 4.6 die eindeutige Parallele zu  $g$  durch  $P$ . Es seien nun  $h, k$  nicht kollinear. Falls  $h^- \cap g \neq \emptyset$ , dann gäbe es nach 4.6 eine Halbgerade  $l \in \mathcal{H}_1$  mit  $l^- \in \mathcal{K}_1$  nach Definition von  $k$ , d.h. die Gerade  $l \cup \{P\} \cup l^-$  hätte mit  $g$  zwei Schnittpunkte, was absurd ist. Also sind  $h$  und  $k$  Parallelen und es folgt i) aus ii).  $\square$

Ein besonders einprägsames Beispiel für 4.9 wird durch das Halbebenenmo-

dell von Poincaré geliefert. Wir betrachten die affine Ebene  $AG(\mathbb{R}^2)$ . Die Punkte unseres Raumes sind  $\mathcal{P} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ , die Geraden  $\mathcal{G}$  sind alle Mengen der Form  $\{(x, y) \in \mathcal{P} : x = a\}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , und alle Mengen  $\{(x, y) \in \mathcal{P} : (x - a)^2 + y^2 = r^2\}$ ,  $a, r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ .

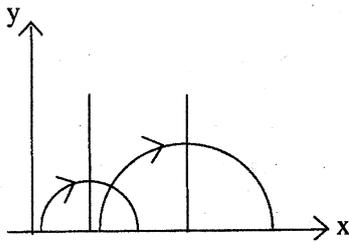


Abbildung 36:

Schließlich ist  $\mathcal{E} = \{\mathcal{P}\}$ .  $\mathcal{P}$  wird lexikographisch geordnet, d.h.  $(x, y) < (x_1, y_1) : \iff x < x_1$  oder  $x = x_1, y < y_1$ , und die Geraden werden dann mit der eingeschränkten Ordnung versehen. Man prüft leicht nach, daß alle Inzidenzaxiome und Ordnungsaxiome inklusive das Stetigkeitsaxiom erfüllt sind. Das Parallelenaxiom ist nicht erfüllt und man veranschaulicht sich 4.9 an Hand von der nachfolgenden Abbildung.

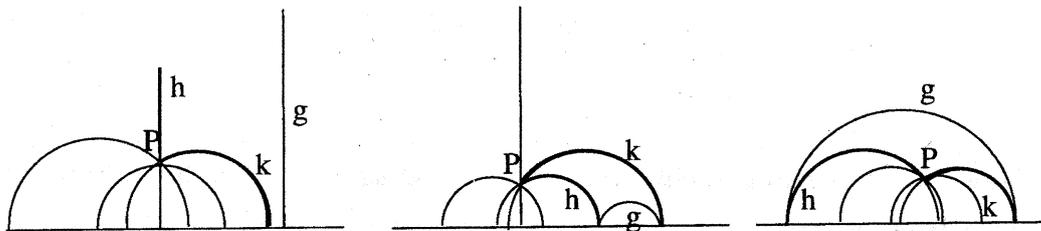


Abbildung 37:

Wir nehmen nun zu den Inzidenz- und Anordnungsaxiomen (aber ohne Stetigkeitsaxiom) das Parallelenaxiom hinzu. Ein solcher Raum  $\mathcal{G}$  heißt dann *geordneter affiner Raum*. Was können wir nun über den Koordinatisierungsbereich  $K$  bzw. über die Kollineationen aussagen?

Seien  $g \neq h \in \mathcal{G}$  in einer Ebene  $\alpha$ . Wir schneiden  $g, h$  durch ein Büschel  $\mathcal{B}$  paralleler Geraden in  $\alpha$ , die weder zu  $g$  noch zu  $h$  parallel sind.  $\mathcal{B}$  definiert

durch  $g \cap l \mapsto h \cap l$ ,  $l \in \mathcal{B}$  eine Bijektion von  $g$  auf  $h$ , die wir eine *Parallelprojektion* von  $g$  auf  $h$  nennen. Insbesondere erhalten wir im Fall  $g \parallel h$  also eine *Translation*.

**Satz 4.10** *Jede Parallelprojektion von  $g$  auf  $h$  erhält die Zwischenrelation. Insbesondere erhält jede Translation von  $g$ , die  $g$  nicht in sich selber überführt, die Zwischenrelation.*

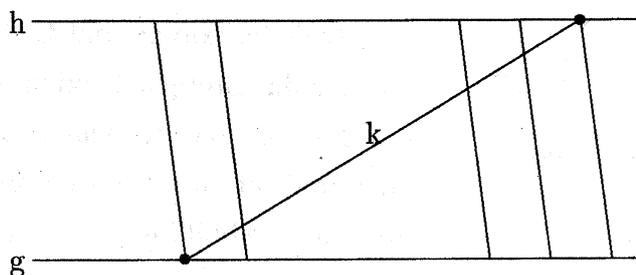


Abbildung 38:

**Beweis.** Der Fall  $g \parallel h$  läßt sich auf  $g \cap h \neq \emptyset$  zurückführen durch Einführen einer Hilfsgeraden  $k$  mit  $k \cap g \neq \emptyset \neq k \cap h$ . Sei also  $g \cap h \neq \emptyset$ ,  $P = g \cap h$  und  $f$  eine Parallelprojektion von  $g$  auf  $h$ . Seien  $Q, R \in g - \{P\}$  mit  $PRQ \in \mathfrak{Z}$ . Nach IV.3 angewandt auf das Dreieck  $P, Q, f(Q)$  und die Gerade  $\overline{Rf(R)}$  muß  $\overline{Rf(R)} \cap \overline{Pf(Q)} \neq \emptyset$ , das heißt  $Pf(R)f(Q) \in \mathfrak{Z}$  sein, da  $\overline{Rf(R)} \parallel \overline{Qf(Q)}$  ist. Ebenso erledigt man die anderen Fälle.  $\square$

**Satz 4.11** *Es seien  $g \neq h \in \mathcal{G}$ ,  $g \parallel h$ . Ist  $f$  eine Parallelprojektion von  $g$  auf  $h$  und  $f'$  eine Parallelprojektion zurück auf  $g$ , so erhält  $f'f$  die Ordnung auf  $g$ .*

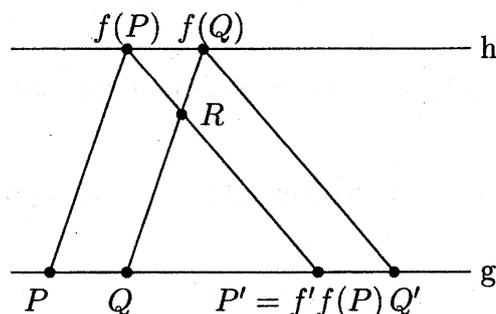


Abbildung 39:

**Beweis.** Für  $f' = f^{-1}$  ist die Behauptung trivial. Sei  $P \in g$  mit  $P < P' = f'f(P)$ . (Der Fall  $P > P'$  geht analog.) Nach 4.10 erhält  $f'f$  die Ordnung auf  $g$  oder dreht sie um. Es genügt also, einen Punkt  $Q \neq P$  zu finden, dessen relative Ordnung zu  $P$  erhalten bleibt. Sei  $P < Q < P'$ . Nach IV.3 schneidet  $\overline{Qf(Q)}$  das Intervall  $]f(P), P'[$  in einem Punkt  $R$ , das heißt,  $P'Rf(P) \in \mathfrak{Z}$ . Parallelprojektion mittels des  $g$ -Büschels von  $\overline{P'f(P)}$  auf  $\overline{Qf(Q)}$  impliziert  $\overline{QRf(Q)} \in \mathfrak{Z}$  und Parallelprojektion mittels des  $\overline{f(P)P'}$ -Büschels von  $\overline{Qf(Q)}$  auf  $g$  impliziert  $\overline{QP'Q'} \in \mathfrak{Z}$ , das heißt,  $P' < Q'$ .  $\square$

Die Ordnung auf  $G$  wird sich naturgemäß im Koordinatisierungsbereich wieder spiegeln. Wir geben daher folgende

**Definition.** Eine Gruppe  $M^+$  heißt eine *geordnete Gruppe*, falls auf  $M$  eine lineare Ordnung definiert ist, so daß für alle  $x, y, z \in M$

$$x < y \Rightarrow x + z < y + z, z + x < z + y.$$

Ein Schiefkörper  $K^+$  heißt *geordneter Schiefkörper*, falls  $K^+$  eine geordnete Gruppe ist und

$$x > 0, y > 0, \Rightarrow xy > 0.$$

Die folgenden Eigenschaften sind unmittelbar einsichtig.

**Satz 4.12** *Sei  $K^+$  geordneter Schiefkörper. Dann gilt:*

$$(i) \quad x > 0 \Leftrightarrow -x < 0, \quad x < y \Leftrightarrow y - x > 0.$$

$$(ii) \quad x > 0, y > 0 \Rightarrow x + y > 0.$$

$$(iii) \quad x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0, \text{ insbesondere ist also } 1 > 0.$$

$$(iv) \quad x < y, z > 0 \Rightarrow xz < yz, \quad zx < zy$$

$$x < y, z < 0 \Rightarrow xz > yz, \quad zx > zy.$$

(v)  $K_{<}$  ist in sich dicht und besitzt weder ein größtes, noch ein kleinstes Element.

Für  $x \in K$  definieren wir den Absolutbetrag  $|x| := \max(x, -x)$ . Dann gilt:

$$(i) \quad |x| \geq 0 \text{ und } |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$(ii) \quad |xy| = |x||y|.$$

$$(iii) \quad |x + y| \leq |x| + |y| \text{ (Dreiecksungleichung).}$$

Der folgende Satz stellt nun die genaue Verbindung der Ordnung in der Geometrie und der Ordnung im Schiefkörper her.

**Satz 4.13** *Es sei  $AG_K(V)$  ein geordneter, Desargues'scher affiner Raum. Dann kann  $K$  so geordnet werden, daß für jede Gerade  $g = \{a + \lambda u : \lambda \in K\}$  gilt:*

$a + \lambda u, a + \mu u, a + \nu u \in \mathfrak{Z}$  in  $g \Leftrightarrow \lambda \mu \nu \in \mathfrak{Z}$  in  $K$ . Umgekehrt definiert jeder geordnete Schiefkörper  $K$  durch die Festsetzung  $a + \lambda u < a + \mu u \Leftrightarrow \lambda < \mu$ , wobei  $a, u$  beliebig vorgegeben werden, eine Ordnung auf jeder Geraden  $g = \{a + \lambda u : \lambda \in K\}$  und  $AG_K(V)$  wird dadurch ein geordneter Raum, für den der erste Teil des Satzes gilt.

**Beweis.** Es sei  $AG_K(V)$  geordnet und  $g$  eine feste Gerade mit  $0 \in g$ . Sei  $P \in g$  mit  $0 < P$  und  $u$  der zugehörige Ortsvektor. Wir definieren nun die Ordnung auf  $K : \lambda < \mu \Leftrightarrow \lambda u < \mu u$  auf  $g$ . Offenbar ist  $<$  eine lineare Ordnung auf  $K$  mit  $0 < 1$  (nach Wahl von  $u$ ). Sei  $\lambda < \mu, \rho \in K$ .

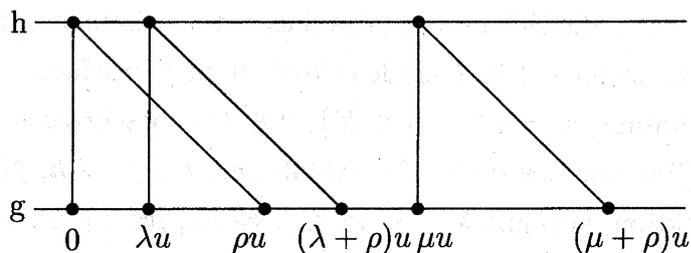


Abbildung 40:

Die Translation  $v \mapsto v + \rho u$  auf  $g$  setzt sich aus zwei Parallelprojektionen hin und zurück zusammen, also gilt nach 4.11  $\lambda + \rho < \mu + \rho$ , das heißt,  $K_{<}^+$  ist geordnete Gruppe. Seien  $\lambda, \mu > 0$  und die Parallelprojektionen von  $g$  auf  $h$  und zurück auf  $g$  wie in untenstehender Abbildung gegeben.

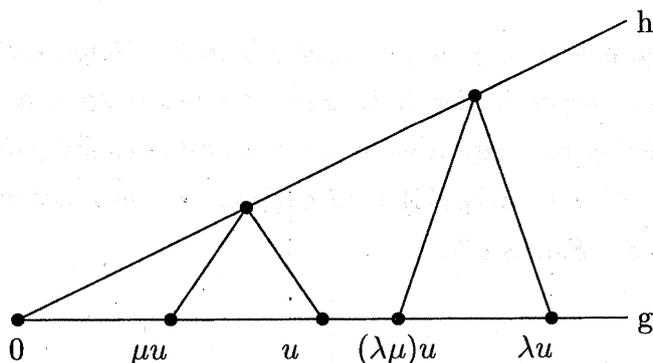


Abbildung 41:

Die Komposition  $f$  der beiden Projektionen führt  $u$  in  $\mu u$  und  $\mu u$  in  $(\lambda \mu)u$  über (Dehnung  $v \mapsto \lambda v$ ) und erhält nach 4.10 die Ordnung auf  $g$  oder kehrt sie um. Da nun  $0 < u$  und  $0 = f(0) < f(u) = \mu u$ , erhält  $f$  die Ordnung, und es gilt  $f(\lambda u) = (\lambda \mu)u > 0$ , das heißt,  $\lambda \mu > 0$  in  $K$ .  $K_{<}$  ist also geordneter Schiefkörper. Um die Behauptung des Satzes für beliebige Geraden nachzuweisen, genügt es nach 4.10 Geraden durch 0 zu betrachten, wobei wir uns auf die Darstellung  $h := \{\lambda v : \lambda \in K\}$ ,  $v \notin \langle u \rangle$ , beschränken können nach dem ersten Teil des Beweises. Die Abbildung  $f : g \rightarrow h$ ,  $f(\lambda u) = \lambda v$  ist Parallelprojektion, also gilt  $\lambda v, \mu v, \nu v \in \mathfrak{J} \Leftrightarrow \lambda u, \mu u, \nu u \in \mathfrak{J} \Leftrightarrow \lambda \mu \nu \in \mathfrak{J}$ .

Es sein nun umgekehrt  $K_{<}$  ein geordneter Schiefkörper und jede Gerade  $g \in \mathcal{G}$  angeordnet wie im Satz. Die Axiome IV.1 und IV.2 sind trivial erfüllt (IV.2 wegen 4.12(v)). Es sei  $g = b + \langle v \rangle$  eine andere Darstellung von  $g$  mit  $b = a + \rho u$ ,  $v = \sigma u$ . Wir betrachten zwei Punkte  $b + \lambda v = a + (\rho + \lambda \sigma)u$ ,  $b + \mu v = a + (\rho + \mu \sigma)u$ . Dann gilt  $b + \lambda v < b + \mu v \Leftrightarrow \rho + \lambda \sigma < \rho + \mu \sigma \Leftrightarrow \lambda \sigma < \mu \sigma$ . Ist also  $\sigma > 0$ , so ist die Ordnung in bezug auf  $b$ ,  $v$  genau dieselbe, ist  $\sigma < 0$ , so dreht sich die Ordnung um. Jedenfalls ist aber die Zwischenrelation bereits durch  $K$ , unabhängig von der Darstellung einer Geraden, gegeben. Seien  $v \neq w$ , dann ist  $\overline{vw} = \{w + \lambda(v - w) : \lambda \in K\}$  und daher  $[v, w] = \{\lambda v + (1 - \lambda)w : 0 \leq$

$\lambda \leq 1$ }. Es bleibt der Nachweis von IV.3. Seien  $a, b, c$  ein Dreieck und  $g \in \mathcal{G}$  mit  $g \cap ]b, c[ \neq \emptyset$ , also  $g \cap ]b, c[ = \lambda_0 b + (1 - \lambda_0)c$  für ein  $\lambda_0 \in K$ ,  $0 < \lambda_0 < 1$ . Ist  $g \parallel \overline{ab}$ , so ist  $g = \{\lambda_0 b + (1 - \lambda_0)c + \rho(b - a) : \rho \in K\}$  und der Schnittpunkt  $g \cap \overline{ac}$  ist gegeben durch  $\lambda_0 + \rho = 0$ , das heißt,  $\lambda_0 a + (1 - \lambda_0)c \in ]a, c[$ . Sei nun  $g \not\parallel \overline{ab}$  mit Schnittpunkt  $\mu_0 a + (1 - \mu_0)b$ . Angenommen, dieser Schnittpunkt ist außerhalb  $[a, b]$ , das heißt  $\mu_0 \notin [0, 1] (\Leftrightarrow \mu_0^{-1} < 1)$ .

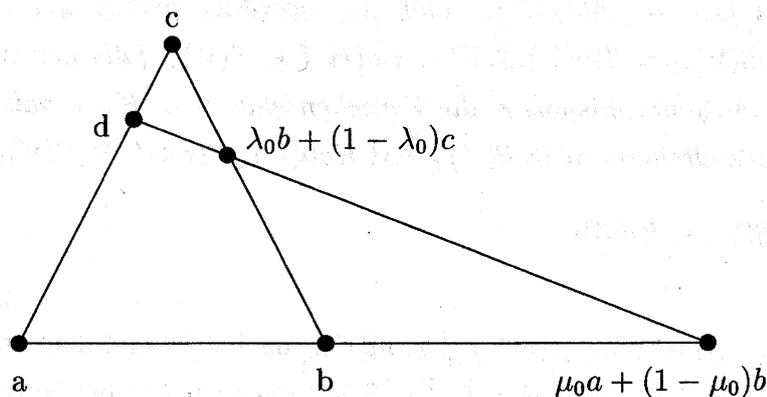


Abbildung 42:

Der Schnittpunkt  $d = g \cap \overline{ac}$  habe die Darstellung  $\rho(\lambda_0 b + (1 - \lambda_0)c) + \sigma(\mu_0 a + (1 - \mu_0)b)$ . Dann ist  $\rho + \sigma = 1$ ,  $\rho\lambda_0 + \sigma(1 - \mu_0) = 0$ , also  $\sigma = \lambda_0(\lambda_0 + \mu_0 - 1)^{-1}$ . Die affine  $a$ -Koordinate von  $d$  ist daher  $\sigma\mu_0 = \lambda_0(\lambda_0 + \mu_0 - 1)^{-1}\mu_0$  und wir müssen zeigen, daß  $0 < \sigma\mu_0 < 1 (\Leftrightarrow (\sigma\mu_0)^{-1} > 1)$ , das heißt,  $\mu_0^{-1}(\lambda_0 + \mu_0 - 1)\lambda_0^{-1} > 1$ . Wir haben  $0 < \lambda_0 < 1$ , also  $\lambda_0^{-1} > 1$  und  $1 - \mu_0^{-1} > 0$ . Daraus folgt  $(1 - \mu_0^{-1})\lambda_0^{-1} > 1 - \mu_0^{-1}$ , somit  $\mu_0^{-1}(\lambda_0 + \mu_0 - 1)\lambda_0^{-1} = \mu_0^{-1} + (1 - \mu_0^{-1})\lambda_0^{-1} > \mu_0^{-1} + 1 - \mu_0^{-1} = 1$ .  $\square$

**Definition.** Sei  $G$  ein geordneter affiner Raum. Unter  $\text{Koll}G_{<}$  verstehen wir die Menge aller Kollineationen von  $G$ , welche die Zwischenrelation erhalten, das heißt,  $f \in \text{Koll}G_{<}$  genau dann, wenn  $PQR \in \mathfrak{Z}$ . Die Ordnung auf

einer Geraden bleibt also erhalten, oder sie geht in die inverse Ordnung über. Für  $G = AG_K(V)$  schreiben wir  $\text{Koll}(V)_<$ .

**Satz 4.14**

(i)  $\text{Koll}G_<$  ist eine Gruppe.

(ii) Sei  $G_< = AG_K(V)_<$  und  $K_<$  geordnet gemäß 4.13. Dann ist  $\text{Koll}(V)_< = \text{Tra}(V) \cdot S(V)_<$ , wobei  $\bar{f} \in S(V)_<$  falls der zu  $\bar{f}$  gehörende Automorphismus  $\sigma$  die Zwischenrelation in  $K_<$  erhält.  $\text{Tra}(V)$  ist Normalteiler von  $\text{Koll}(V)_<$  mit  $\text{Koll}(V)_</\text{Tra}(V) \cong S(V)_<$ .

(iii)  $\text{Aff}(V) \leq \text{Koll}(V)_<$ .

**Beweis.** (i) ist klar.  $\text{Tra}(V) \leq \text{Koll}(V)_<$  nach 4.10 und dem ersten Teil des Beweises von 4.13. Sei  $f = \tau_\nu \bar{f}$ ,  $\bar{f} \in S(V)$ , die nach 2.21 eindeutige Zerlegung von  $f \in \text{Koll}(V)_<$ . Dann ist  $\bar{f} \in \text{Koll}(V)_<$  nach (i), also  $\lambda u, \mu u, \nu u \in \mathfrak{Z} \Leftrightarrow \bar{f}(\lambda u), \bar{f}(\mu u), \bar{f}(\nu u) \in \mathfrak{Z} \Leftrightarrow \lambda^\sigma \bar{f}(u), \mu^\sigma \bar{f}(u), \nu^\sigma \bar{f}(u) \in \mathfrak{Z}$  nach 4.13. Die letzte Behauptung von (ii) und (iii) sind nun klar.  $\square$

Sei  $V$   $n$ -dimensionaler Vektorraum über dem geordneten Schiefkörper  $K_<$ . Dann können wir die Vektoren  $x \in V$  als  $n$ -Tupel  $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$  auffassen und  $AG(K^n)$  zu einem geordneten Raum gemäß 4.13 machen. Daneben können wir aber die Ordnung von  $K_<$  auch *lexikographisch* auf  $K^n$  übertragen:

$(x_1, \dots, x_n) < (y_1, \dots, y_n) :\Leftrightarrow x_1 = y_1, \dots, x_{i-1} = y_{i-1}, x_i < y_i$  für ein  $i$ , und die Geraden durch Einschränkungen dieser Ordnung linear ordnen. Überlegen wir uns, daß die lexikographische und die durch 4.13 gegebene Ordnung auf jeder Geraden (bis auf mögliches Umdrehen) dieselbe ist. Sind nämlich  $a + \lambda u, a + \mu u, a + \nu u \in \mathfrak{Z}$  gemäß 4.13, so haben wir  $\lambda \mu \nu \in \mathfrak{Z}$  in  $K_<$  und somit  $(a_1 + \lambda u_1, \dots, a_n + \lambda u_n), (a_1 + \mu u_1, \dots, a_n + \mu u_n), (a_1 + \nu u_1, \dots, a_n + \nu u_n) \in \mathfrak{Z}$ ,

lexikographische Ordnung. Die Umkehrung ist ebenso klar. Die Koordinatendarstellung erlaubt nun eine bequeme Beschreibung der Halbräume.

**Satz 4.15** Sei  $AG(K^n)$  über dem geordneten Schiefkörper  $K_<$  gegeben. Ist die Hyperebene  $H = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 h_1 + \dots + x_n h_n = c\}$ , kurz geschrieben  $H = \{x : x \cdot h = c\}$ , so sind die Halbhyperebenen durch  $H^+ = \{x : x \cdot h > c\}$  und  $H^- = \{x : x \cdot h < c\}$  gegeben. Ist allgemein der Unterraum  $\beta$  gegeben durch  $x \cdot h^{(1)} = c^{(1)}, \dots, x \cdot h^{(k)} = c^{(k)}$  und  $\alpha \subseteq \beta$ ,  $\dim \alpha = \dim \beta - 1$  durch die weitere Gleichung  $x \cdot h^{(k+1)} = c^{(k+1)}$  gegeben, so sind die beiden Halbräume von  $\beta$  bezüglich  $\alpha$  gegeben durch  $x \cdot h^{(1)} = c^{(1)}, \dots, x \cdot h^{(k)} = c^{(k)}, x \cdot h^{(k+1)} > c^{(k+1)}$  bzw.  $x \cdot h^{(k+1)} < c^{(k+1)}$ .

**Beweis.** Es genügt die erste Behauptung zu zeigen. Seien  $a, b \in H^+$ , dann ist  $(\lambda a + (1 - \lambda)b) \cdot h = \lambda(a \cdot h) + (1 - \lambda)(b \cdot h) > \lambda c + (1 - \lambda)c = c$ , also insbesondere  $[a, b] \subseteq H^+$ ; analog für  $H^-$ . Sei nun  $a \in H^+, b \in H^-$ ,  $a \cdot h = c + c_a, b \cdot h = c - c_b, c_a, c_b > 0$ . Für  $\lambda = c_b(c_a + c_b)^{-1}$  gilt  $0 < \lambda < 1$  und ferner  $(\lambda a + (1 - \lambda)b) \cdot h = \lambda c + \lambda c_a + (1 - \lambda)c - (1 - \lambda)c_b = \lambda(c_a + c_b) - c_b + c = c$ , d.h.  $\lambda a + (1 - \lambda)b \in H$ .  $\square$

Mit 4.15 erhalten wir eine weitere Beschreibung der Ordnungstopologie aus 4.8 auf  $AG(K^n)$ . Wir versehen die Kette  $K_<$  mit der *Intervalltopologie*  $K_<$ , indem wir als Basis für die offenen Mengen alle offenen Intervalle  $]a, b[$ ,  $a < b \in K$ , nehmen.  $K^n$  wird dann mit der *Produkttopologie* versehen, d.h. eine Basis für die offenen Mengen sind alle „offenen Quader“

$$\prod_{i=1}^n ]a_i, b_i[ := \{(x_1, \dots, x_n) : a_1 < x_1 < b_1, \dots, a_n < x_n < b_n\}.$$

**Satz 4.16** Die Produkttopologie auf  $K^n$  und die Ordnungstopologie aus 4.8 (S. 77) sind identisch.

**Beweis.** Sei  $D = \prod_{i=1}^n ]a_i, b_i[$  und  $e_i := (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$  der  $i$ -te Einheitsvektor. Dann ist  $D = \bigcap_{i=1}^n H_i^+ \cap \bigcap_{i=1}^n L_i^-$  mit  $H_i^+ = \{x : x_i \cdot e_i > a_i\}$ ,  $L_i^- = \{x : x_i \cdot e_i < b_i\}$ , also ist  $D$  offen in der Ordnungstopologie aus 4.8(S.77). Sei nun  $E = \bigcap_{i=1}^k H_i^+$  Basismenge der Ordnungstopologie,  $H_i^+ = \{x : x \cdot h^{(i)} > c^{(i)}\}$ , wobei wir stets  $x \cdot h^{(i)} > c^{(i)}$  annehmen können (ansonsten multiplizieren wir mit  $-1$ ) und  $v \in E$ . Wir müssen einen offenen Quader  $F$  mit  $v = (v_1, \dots, v_n) \in F \subseteq E$  finden. Sei  $\delta = \min_{i=1, \dots, k} (v \cdot h^{(i)} - c^{(i)}) > 0$ , und  $\epsilon = \min_{i=1, \dots, k} \delta \left( \sum_{j=1}^n |h_j^{(i)}| \right)^{-1} > 0$ , wobei  $h^{(i)} = (h_1^{(i)}, \dots, h_n^{(i)})$ . Für  $F = \prod_{i=1}^n ]v_i - \epsilon, v_i + \epsilon[$  gilt dann  $v \in F \subseteq E$ . Denn sei  $x \in F$ ,  $x = v - r$  mit  $r = (r_1, \dots, r_n)$ , dann ist  $|r_i| < \epsilon$  für alle  $i$  und somit  $|r \cdot h^{(i)}| = |r_1 h_1^{(i)} + \dots + r_n h_n^{(i)}| < \epsilon \sum_{j=1}^n |h_j^{(i)}| \leq \delta$ . Daraus folgt nun  $x \cdot h^{(i)} = v \cdot h^{(i)} - r \cdot h^{(i)} > v \cdot h^{(i)} - \delta \geq v \cdot h^{(i)} - v \cdot h^{(i)} + c^{(i)} = c^{(i)}$  für alle  $i$ , also  $x \in E$ .  $\square$

Wir betrachten zum Abschluß jene Desargues'schen geordneten Räume  $AG_k(V)$ , in denen das Stetigkeitsaxiom gilt. Laut 4.13(S.84) heißt dies, daß  $K_{<}^+$  eine stetig geordnete Gruppe ist. Es gilt nun folgendes Resultat (siehe Zahlen, 6.6, S. 129):  $\{0\}$ ,  $\mathbb{Z}_{<}^+$  und  $\mathbb{R}_{<}^+$  sind bis auf Isomorphie die einzigen stetig geordneten Gruppen.

Da  $K_{<}$  in sich dicht ist, muß also  $K_{<}^+ \cong \mathbb{R}_{<}^+$  sein. Weiter gilt für einen geordneten Schiefkörper  $K_{<}^+$ , daß  $K_{<}^+ \cong \mathbb{R}_{<}^+$  impliziert  $K_{<}^x \cong \mathbb{R}_{<}^+$  (siehe Zahlen, Satz 10.7). Somit erhalten wir

**Satz 4.17** *Ein stetig geordneter Desargues'scher affiner Raum ist isomorph zu  $AG_{\mathbb{R}}(V)$ .*

Die Topologie auf  $\mathbb{R}$  wird üblicherweise mittels der natürlichen Metrik  $d(x, y) := |x - y|$  erklärt mit den offenen „Kugeln“  $K_{\epsilon}(a) := \{x \in \mathbb{R} : d(x, a) < \epsilon\}$  als Basis der offenen Mengen. Dies ist natürlich dieselbe wie die Intervalltopologie  $\mathbb{R}_{<}$ , da jede Kugel  $K_{\epsilon}(a) = ]a - \epsilon, a + \epsilon[$  auch offenes Inter-

vall in  $\mathbb{R}_<$  ist und umgekehrt jedes offene Intervall  $]a, b[ = K_{b-a}(\frac{a+b}{2})$  ist. Auch die Produkttopologie auf  $\mathbb{R}^n$  kann mittels einer Metrik beschrieben werden, nämlich  $d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$ . d heißt die *Euklidische Metrik* auf  $\mathbb{R}^n$  (es gibt natürlich noch weitere). Die Basismengen sind wiederum alle offenen Kugeln  $K_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) < \varepsilon\}$  und wir erhalten genau die Produkttopologie, da jeder offene Quader Vereinigung von offenen Kugeln ist und umgekehrt. Wir haben also drei Beschreibungen derselben Topologie auf  $AG(\mathbb{R}^n)$ : eine geometrische mittels der Halbräume, eine ordnungstheoretische mittels der Kettenstruktur und schließlich eine metrische mittels der Euklidischen Metrik.

### Aufgaben

1. Es sei  $G$  ein Inzidenzraum und  $\mathfrak{Z}$  eine ternäre Relation auf  $\mathcal{P}$ , für die gilt:

- (a)  $PQR \in \mathfrak{Z} \Rightarrow P, Q, R$  sind verschiedene kollineare Punkte und es gilt auch  $RQP \in \mathfrak{Z}$ .
- (b)  $PQR \in \mathfrak{Z} \Rightarrow PQR \notin \mathfrak{Z}$ .
- (c) Axiom IV.2.
- (d) Axiom IV.3.

Zeige, daß dann jede Gerade  $g$  sich auf genau zwei Arten ordnen läßt, so daß  $PQR \in \mathfrak{Z} \Leftrightarrow R < Q < P$ .

2. Sei  $G_<$  eine geordnete Ebene. Eine *Orientierungsfunktion* ist eine Abbildung  $o : (P, Q, R) \rightarrow \{1, -1\}$  von der Menge aller Dreiecke nach  $\{1, -1\}$ , so daß gilt:

- (a)  $o(P, Q, R) = -o(Q, P, R) = -o(P, R, Q)$ .

(b)

$$o(P, Q, R)o(P, Q, S) = \begin{cases} 1 & \text{falls } S \in PQR^+ \\ -1 & \text{falls } S \in PQR^- \end{cases}$$

Zeige: Es gibt eine Orientierungsfunktion und sie ist durch den Wert auf einem Dreieck bereits festgelegt (d.h. die einzige andere Möglichkeit ist durch Multiplikation mit -1).

3. Verallgemeinere den Orientierungsbegriff auf beliebige Dimension.
4. Es sei  $G_{<}$  eine geordnete Translationsebene. Zeige, daß die zu einer Translation  $\tau \neq 1$  parallelen Translationen eine geordnete abelsche Gruppe bilden.
5. Es sei  $G_{<}$  ein geordneter Raum und  $G_{\subset}$  die Ordnungstopologie. Sei  $A$  offen,  $P \in A$  und  $P \in g \in \mathcal{G}$ . Zeige, daß es ein Intervall  $[Q, R] \subseteq g \cap A$  gibt mit  $QPR \in \mathcal{Z}$
6. Wir definieren einen 2-dimensionalen Raum  $G = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{E})$  folgendermaßen:  $\mathcal{P} = \{\mathbb{R}^2 - (0, 0)\} \cup \{\infty\}$ , die Geraden  $\mathcal{G}$  sind alle Mengen der Form  $\{(x, y) \in \mathcal{P} : y = ax\} \cup \{\infty\}$  und  $\{(x, y) \in \mathcal{P} : (x-a)^2 + (y+b)^2 = a^2 + b^2, (a, b) \neq (0, 0)\}$ . Zeige, daß  $G$  eine affine Ebene ist und konstruiere eine Ordnung auf den Geraden, so daß  $G$  ein geordneter Raum wird.
7. Eine geordnete Gruppe  $M^+$  heißt *archimedisch*, falls zu jedem Paar  $x, y > 0$  ein  $n \in \mathbb{N}$  existiert mit  $nx > y$ . Zeige, daß eine archimedisch geordnete Gruppe kommutativ ist.
8. Sei  $AG_{K_{<}}(V)$  ein geordneter affiner Raum über dem archimedischen Körper  $K_{<}$  (d.h.  $K^+$  ist archimedisch geordnet). Interpretiere die Archimedizität geometrisch mit Hilfe von Translationen.

## 5 Absolute Geometrie

Bisher haben wir uns mit geometrischen Eigenschaften befaßt, die allein auf Schneiden, Verbinden, Parallelität und Ordnung basieren. Nun führen wir zusätzlich metrische Begriffe ein, d.h. wir wollen ein Maß für die Größe von Strecken und Winkeln gewinnen. Dazu teilen wir zunächst abstrakt alle Punktepaare (und ebenso alle Winkelpaare) in Kongruenzklassen ein und erklären anschließend zwei Strecken (Winkel) als gleich groß genau dann, wenn sie kongruent sind.

**Definition.** Ein geordneter Raum  $G = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{E})$  heißt ein *metrischer Raum*, falls zusätzlich Äquivalenzrelationen auf  $\mathcal{P}$  und auf der Winkelmeng e existieren, die wir mit demselben Symbol  $PQ \equiv RS$  bzw.  $\sphericalangle(p, q) \equiv \sphericalangle(r, s)$  bezeichnen, so daß für alle Punktepaare und Winkelpaare gilt:

V.1  $PQ \equiv QP$

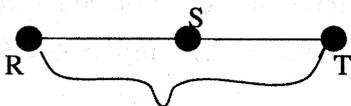
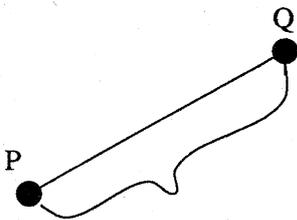
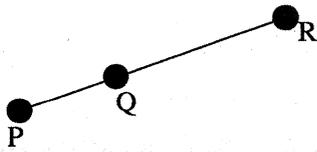


Abbildung 43:

V.2 Zu jedem  $PQ, P \neq Q$ , und jeder Halbgeraden  $RS^+$  gibt es genau einen Punkt  $T \in RS^+$  mit  $PQ \equiv RT$ .

(Axiom des Streckenabtragens)



**V.3** Seien  $PQR \in \mathfrak{Z}$ ,  $STU \in \mathfrak{Z}$ .

Aus  $PQ \equiv ST$ ,  $QR \equiv TU$

folgt  $PR \equiv SU$ .

(Axiom der Steckenaddition)

Abbildung 44:

Wir sprechen von dem Paar  $PQ$  als der *Strecke*  $PQ$  und sagen  $PQ$  und  $RS$  sind *kongruent*, falls  $PQ \equiv RS$ .

**V.4**  $\sphericalangle(p, q) \equiv \sphericalangle(q, p)$

**V.5** Zu jedem Winkel  $\sphericalangle(p, q)$ , jeder Halbgeraden  $r = PQ^+$  und jeder Halbebene  $PQR^+$  gibt es genau eine Halbgerade  $s = PS^+$  mit  $S \in PQR^+$  und  $\sphericalangle(p, q) \equiv \sphericalangle(r, s)$ .

(Axiom des Winkelabtragens)

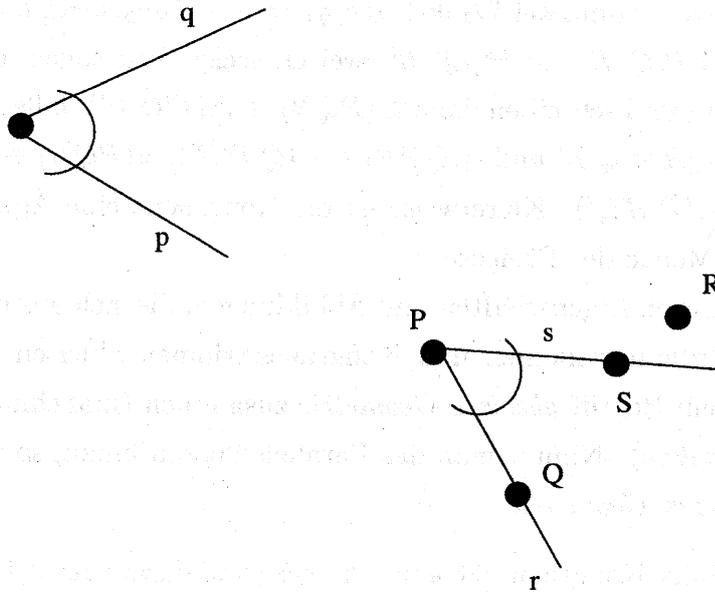


Abbildung 45:

**V.6** Seien  $P, Q, R$  und  $P', Q', R'$  Dreiecke mit  $PQ \equiv P'Q'$ ,  $PR \equiv P'R'$  und  $\sphericalangle(QPR) \equiv \sphericalangle(Q'P'R')$ . Dann gilt  $\sphericalangle(PQR) \equiv \sphericalangle(P'Q'R')$  und  $\sphericalangle(PRQ) \equiv \sphericalangle(P'R'Q')$ .

(Axiom der Dreieckskongruenz)

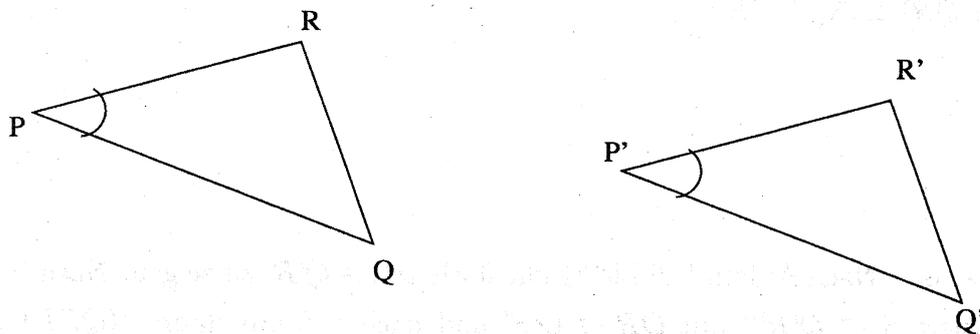


Abbildung 46:

Wir nennen wiederum zwei Winkel  $\sphericalangle(p, q)$ ,  $\sphericalangle(r, s)$  *kongruent*, falls  $\sphericalangle(p, q) \equiv \sphericalangle(r, s)$ . Seien  $P, Q, R$  und  $P', Q', R'$  zwei Dreiecke. Wir sagen, die Dreiecke sind *kongruent* und schreiben dann  $\triangle(PQR) \equiv \triangle(P'Q'R')$ , falls  $PQ \equiv P'Q'$ ,  $PR \equiv P'R'$ ,  $QR \equiv Q'R'$  und  $\sphericalangle(QPR) \equiv \sphericalangle(Q'P'R')$ ,  $\sphericalangle(PQR) \equiv \sphericalangle(P'Q'R')$ ,  $\sphericalangle(PRQ) \equiv \sphericalangle(P'R'Q')$ . Klarerweise ist die Kongruenz eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Dreiecke.

Die geometrischen Eigenschaften und Abbildungen, die sich aus den Inzidenzaxiomen, Ordnungsaxiomen und Kongruenzaxiomen ableiten lassen, faßt man unter dem Begriff *absolute Geometrie* zusammen (manchmal auch *metrische Geometrie*). Nimmt man das Parallelenaxiom hinzu, so spricht man von *Euklidischer Geometrie*.

Wir stellen einige Kongruenzsätze für Dreiecke und daraus resultierende Konstruktionen zusammen.

**Satz 5.1** (1. Kongruenzsatz Für Dreiecke) Sind  $P, Q, R$  und  $P', Q', R'$  Dreiecke mit  $PQ \equiv P'Q'$ ,  $PR \equiv P'R'$  und  $\sphericalangle(QPR) \equiv \sphericalangle(Q'P'R')$ , so ist  $\triangle(PQR) \equiv \triangle(P'Q'R')$ .

**Beweis.** Nach Axiom V.6 bleibt nur noch  $QR \equiv Q'R'$  zu zeigen. Nach V.2 existiert  $S' \in Q'R'^+$  mit  $QR \equiv Q'S'$  und nach V.6 gilt dann  $\sphericalangle(QPR) \equiv \sphericalangle(Q'P'S')$ . Nach Voraussetzung ist aber  $\sphericalangle(QPR) \equiv \sphericalangle(Q'P'R')$ , also folgt nach V.5, daß  $S' \in \overline{P'R'}$ , d.h.  $S' = R'$  und somit  $QR \equiv Q'R'$ .  $\square$

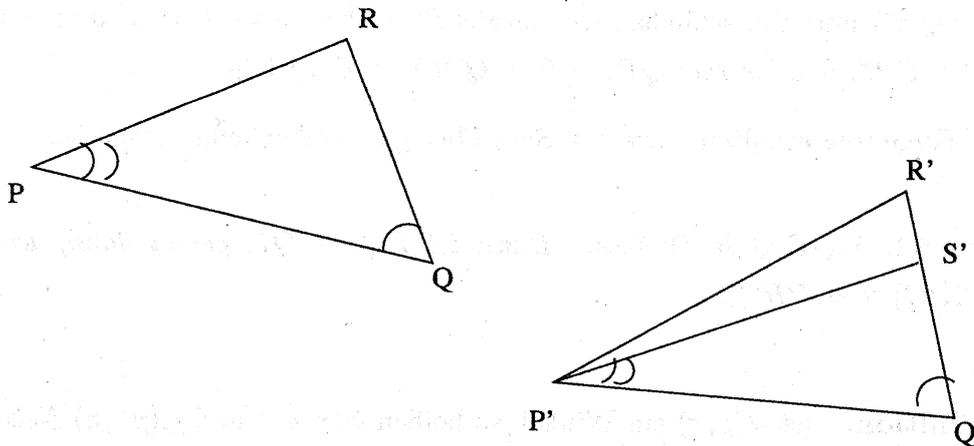


Abbildung 47:

**Satz 5.2** (2. Kongruenzsatz für Dreiecke) Sind  $P, Q, R$  und  $P', Q', R'$  Dreiecke mit  $PQ \equiv P'Q'$  und  $\sphericalangle(QPR) \equiv \sphericalangle(Q'P'R')$ ,  $\sphericalangle(PQR) \equiv \sphericalangle(P'Q'R')$ , so gilt  $\triangle(PQR) \equiv \triangle(P'Q'R')$ .

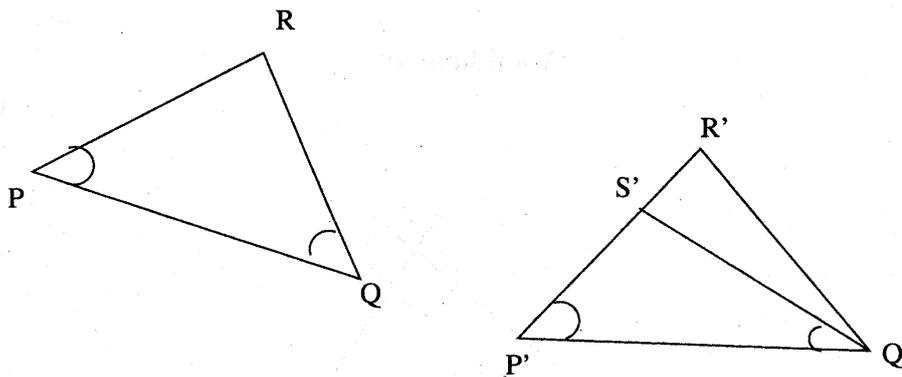


Abbildung 48:

**Beweis.** Nach V.2 gibt es einen Punkt  $S' \in P'R'^+$  mit  $PR \equiv P'S'$ . Nach 5.1 gilt dann  $\triangle(PQR) \equiv \triangle(P'Q'S')$ . Wegen  $\sphericalangle(P'Q'R') \equiv \sphericalangle(PQR) \equiv$

$\sphericalangle(P'Q'S')$  und V.5 schließen wir daraus  $S' \in \overline{Q'R'}$ , also  $S' = R'$  und somit  $PR \equiv P'R'$ , woraus  $\triangle(PQR) \equiv \triangle(P'Q'R')$  nach 5.1 folgt.  $\square$

Als Folgerung erhalten wir einen Satz über gleichschenkelige Dreiecke.

**Satz 5.3** Sei  $P, Q, R$  Dreieck. Dann ist  $PQ \equiv QR$  genau dann, wenn  $\sphericalangle(RPQ) \equiv \sphericalangle(PRQ)$ .

**Definition.** Ist  $\sphericalangle(p, q)$  ein Winkel, so heißen  $\sphericalangle(p, q^-)$  und  $\sphericalangle(p^-, q)$  Nebenwinkel und  $\sphericalangle(p, q), \sphericalangle(p^-, q^-)$  Scheitelwinkel.

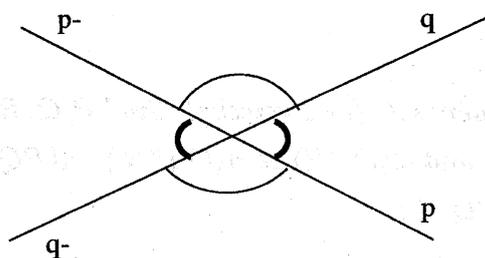


Abbildung 49:

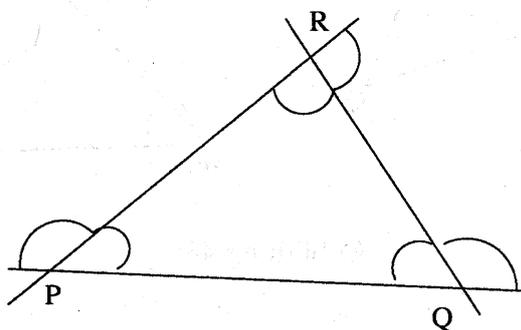


Abbildung 50:

In einem Dreieck  $P, Q, R$  nennen wir die Winkel  $\sphericalangle(PQR), \sphericalangle(QPR), \sphericalangle(PRQ)$  die *Innenwinkel* des Dreieckes und die zugehörigen Nebenwinkel die *Außenwinkel* des Dreieckes. Die Nebenwinkel eines Innenwinkels heißen die *anliegenden Außenwinkel*.

**Satz 5.4** Aus  $\sphericalangle(p, q) \equiv \sphericalangle(r, s)$  folgt  $\sphericalangle(p, q^-) \equiv \sphericalangle(r, s^-)$ . Insbesondere gilt  $\sphericalangle(p, q^-) \equiv \sphericalangle(p^-, q)$  und  $\sphericalangle(p, q) \equiv \sphericalangle(p^-, q^-)$ .

**Beweis.** Sei  $O = O(p) = O(q)$ ,  $O' = O(r) = O(s)$  und  $P, Q, R, P', Q', R'$  so gewählt, daß  $OP \equiv O'P'$ ,  $OQ \equiv O'Q'$ ,  $OR \equiv O'R'$  wie in untenstehender Abbildung. Aus 5.1 folgt  $\triangle(OPQ) \equiv \triangle(O'P'Q')$ . Nach V.3 gilt  $QR \equiv Q'R'$  und daher  $\triangle(RPQ) \equiv \triangle(R'P'Q')$  nach 5.1. Daraus folgt  $PR \equiv P'R'$  und somit  $\triangle(ORP) \equiv \triangle(O'R'P')$ , d.h.  $\sphericalangle(p, q^-) \equiv \sphericalangle(r, s^-)$ . Wegen  $\sphericalangle(q, p) \equiv \sphericalangle(p, q)$  gilt also insbesondere  $\sphericalangle(p, q^-) \equiv \sphericalangle(q, p^-) \equiv \sphericalangle(p^-, q)$ . Wenden wir diesen Schluß auf  $\sphericalangle(p, q^-)$  an, so erhalten wir  $\sphericalangle(p, q) \equiv \sphericalangle(p^-, q^-)$ .  $\square$

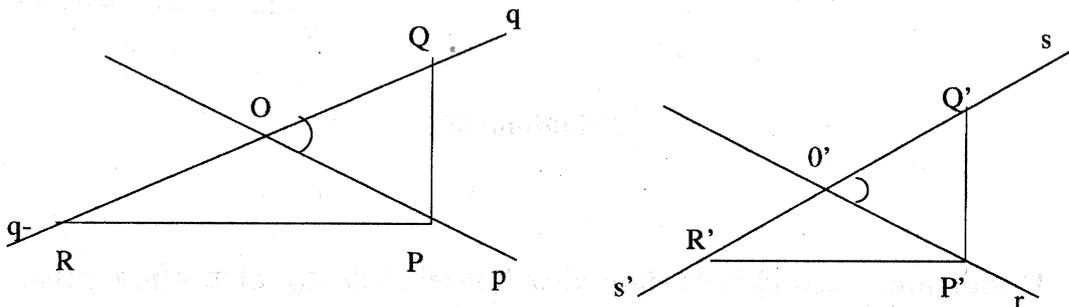


Abbildung 51:

Aus den Kongruenzsätzen können wir nun leicht den Additionssatz für Winkel entsprechend dem Axiom V.3 herleiten.

**Satz 5.5** Seien  $\sphericalangle(p, q), \sphericalangle(p', q')$  Winkel und  $r, r'$  Halbgeraden mit  $O(r) =$

$0(p) = 0, r \in \text{Inn}\sphericalangle(p, q), 0(r') = 0(p') = 0', r' \in \text{Inn}\sphericalangle(p', q')$ . Gilt  $\sphericalangle(p, r) \equiv \sphericalangle(p', r'), \sphericalangle(r, q) \equiv \sphericalangle(r', q)$ , dann auch  $\sphericalangle(p, q) \equiv \sphericalangle(p', q')$ .

**Beweis.** Wir wählen Punkte  $P \in p, P' \in p', R \in r, R' \in r'$  mit  $0P \equiv 0P', 0R \equiv 0R'$ . Dann gilt der Reihe nach  $\triangle(0PR) \equiv \triangle(0'P'R'), \triangle(0RQ) \equiv \triangle(0'R'Q')$ , nach V.3 also  $PQ \equiv P'Q'$  und somit  $\triangle(0PQ) \equiv \triangle(0'P'Q')$ , d.h.  $\sphericalangle(p, q) \equiv \sphericalangle(p', q')$ .  $\square$

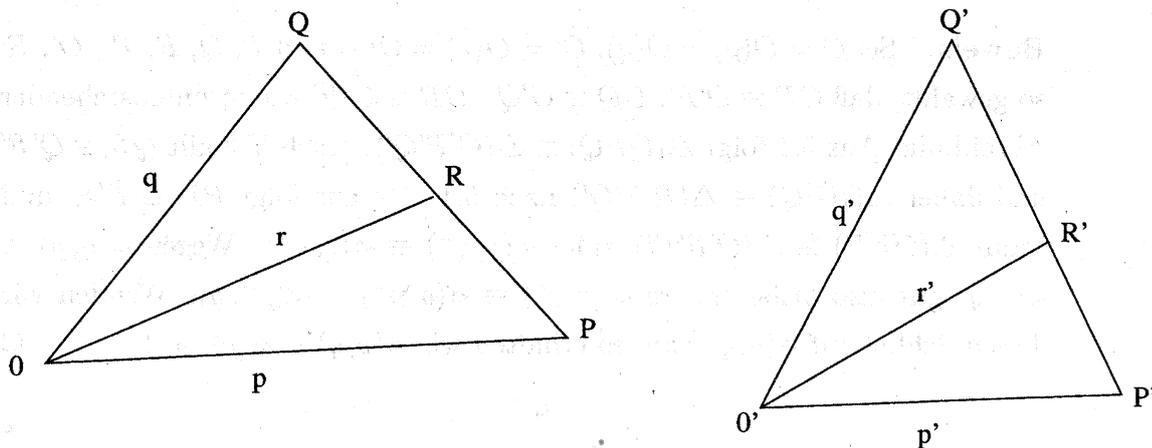


Abbildung 52:

**Definition.**  $\sphericalangle(p, q)$  heißt ein *rechter Winkel*, falls  $\sphericalangle(p, q) \equiv \sphericalangle(p, q^-)$  (bzw.  $\equiv \sphericalangle(p^-, q)$  nach 5.4).

**Satz 5.6** Rechte Winkel existieren und sie bilden genau eine Kongruenzklasse von Winkeln, d.h. jeder zu einem rechten Winkel kongruente Winkel ist ein rechter und je zwei rechte Winkel sind kongruent.

**Beweis.** Sei  $P, Q, R$  ein Dreieck.

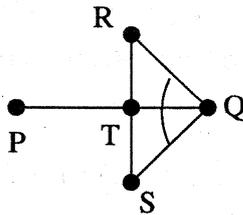


Abbildung 53:

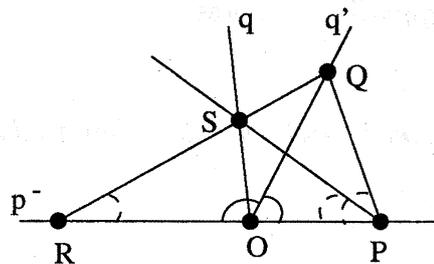


Abbildung 54:

Wir tragen den Winkel  $\sphericalangle(PQR)$  auf  $PQR^-$  ab und bestimmen  $S$  wie in Figur 5 mit  $QR \equiv QS$  und  $T = \overline{PQ} \cap \overline{RS}$ . Dann ist nach 5.1  $\triangle(RQT) \equiv \triangle(SQT)$ , also  $\sphericalangle(QTR) \equiv \sphericalangle(QTS)$ , d.h.  $\sphericalangle(QTR)$  ist ein rechter Winkel. Ist  $\sphericalangle(p, q)$  ein rechter Winkel und  $\sphericalangle(r, s) \equiv \sphericalangle(p, q)$ , so haben wir nach 5.4  $\sphericalangle(r, s^-) \equiv \sphericalangle(p, q^-) \equiv \sphericalangle(p, q) \equiv \sphericalangle(r, s)$ , also ist  $\sphericalangle(r, s)$  ein rechter Winkel. Sei schließlich  $\sphericalangle(p, q)$  ein rechter Winkel mit Scheitel  $O$  und  $\sphericalangle(r, s)$  ebenfalls ein rechter Winkel. Wir tragen  $\sphericalangle(r, s)$  auf  $pq^+$  ab, dann ist nach dem eben bewiesenen der abgetragene Winkel  $\sphericalangle(p, q')$  mit  $q' \subseteq pq^+$  ebenfalls ein rechter Winkel.

Zu zeigen ist  $q' = q$ . Angenommen  $q' \neq q$ , wobei wir  $q' \in \text{Inn}\sphericalangle(p, q)$  annehmen können, da  $\sphericalangle(p, q)$  ja rechter Winkel ist. Wir wählen  $P \in p$ ,  $R \in p^-$ ,  $Q \in q'$  mit  $OP \equiv OR \equiv OQ$ . Dann gilt  $\triangle(ROQ) \equiv \triangle(POQ)$ , also  $\sphericalangle(ORQ) \equiv \sphericalangle(OPQ)$ . Andererseits ist auch  $\triangle(ROS) \equiv \triangle(PQS)$ , wo-

bei  $S = \overline{RQ} \cap q$  ( $S$  existiert, da  $q \subseteq \sphericalangle(q', p^-)$  nach Annahme). Das heißt, wir haben  $\sphericalangle(ORS) \equiv \sphericalangle(OPS)$  und somit  $\sphericalangle(OPQ) \equiv \sphericalangle(OPS)$ , also doch  $S = Q$ , d.h.  $q = q'$ .  $\square$

Zwei sich schneidende Geraden  $g, h$  stehen *senkrecht* aufeinander oder sind *rechtwinklig* zueinander, falls die Halbgeraden mit dem Schnittpunkt als Scheitel einen rechten Winkel bilden. Wir schreiben dann  $g \perp h$ . Sei  $P \in \mathcal{P}$ ,  $g \in \mathcal{G}$ . Die Gerade  $h$  heißt ein *Lot* von  $P$  auf  $g$ , falls  $P \in h$  und  $g \perp h$  ist.  $Q = g \cap h$  heißt der *Fußpunkt* des Lotes.

**Satz 5.7** *Zu jedem Punkt  $P$  und jeder Geraden  $g$  gibt es genau ein Lot von  $P$  auf  $g$ .*

**Beweis.** Die Existenz des Lotes ist klar. Denn ist  $P \in g$ , so können wir mit V.5 einen rechten Winkel von  $P$  abtragen; ist  $P \notin g$ , so konstruieren wir ein Lot wie in Figur 5. Die Eindeutigkeit folgt für  $P \in g$  aus V.5 und für  $P \notin g$  aus dem nachfolgenden 5.9.  $\square$

Eine wichtige Konstruktion der absoluten Geometrie ist der Mittelpunkt einer Strecke. Sei  $P \neq Q$ , dann heißt  $M \in \overline{PQ}$  der *Mittelpunkt* von  $[P, Q]$  falls  $PM \equiv MQ$ . Man beachte, daß aus V.2 folgt, daß  $M \in ]P, Q[$  sein muß. Außerdem ist der Mittelpunkt eindeutig bestimmt. Denn sei  $N \in ]P, Q[$ ,  $N \neq M$  mit  $PN \equiv NQ$ , wobei wir o.B.d.A.  $P < M < N < Q$  annehmen können. Seien ferner  $R \in QP^-$ ,  $S \in RP^-$  so gewählt, daß  $MN \equiv QR \equiv RS$ . Dann gilt  $PM \equiv MQ$ ,  $MN \equiv QR$ , also  $MR \equiv PN \equiv NQ$  und mit  $RS \equiv MN$  daher  $MS \equiv MQ$ , im Widerspruch zu Axiom V.2.

**Satz 5.8** *Zu jeder Strecke  $PQ$  existiert der Mittelpunkt  $M$ , also  $M$  mit  $PM \equiv MQ$ .*

**Beweis.** Sei  $\overline{PQ}$  in einer Ebene  $\alpha$ . Wir tragen einen Winkel  $\sphericalangle(PQ^+, p)$  (also mit Scheitel  $P$ ) in eine der beiden Halbebenen von  $\alpha$  bezüglich  $\overline{PQ}$  ab und den kongruenten Winkel  $\sphericalangle(QP^+, q)$  in die andere Halbebene und behaupten, daß wir  $R \in p$  und  $S \in q$  finden können mit  $PR \equiv QS$ , so daß  $\overline{RS}$  die Gerade  $\overline{PQ}$  in einem Punkt  $M$  zwischen  $P$  und  $Q$  schneidet.

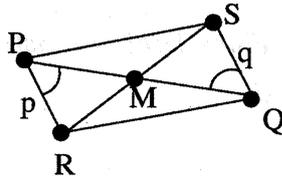


Abbildung 55:

Sei  $T \in p$ , wobei wir zunächst annehmen  $q \subseteq PQT^- \cap TQP^-$ . Die Halbgerade  $q^-$  liegt dann zwischen  $QP^+$  und  $QT^+$ , d.h.  $q^-$  schneidet  $p = PT^+$  in einem Punkt  $X$  zwischen  $P$  und  $T$  (nach 4.7). Sei nun  $R \in p$  mit  $PRX \in \mathfrak{Z}$  und  $S \in q$  mit  $PR \equiv QS$ , dann schneidet  $\overline{RS}$  die Gerade  $\overline{PQ}$  in einem Punkt zwischen  $P$  und  $Q$  nach dem Axiom von Pasch angewandt auf das Dreieck  $PQX$ . Falls  $q = QT^-$  so wählen wir  $R \in p$  mit  $PRT \in \mathfrak{Z}$ ,  $S \in q$  mit  $PR \equiv QS$  und wenden Pasch auf das Dreieck  $PQT$  an. Im verbleibenden Fall ist  $q \subseteq TQP^+$ . Wir wählen wiederum  $R \in p$ ,  $PRT \in \mathfrak{Z}$ ,  $S \in q$  mit  $PR \equiv QS$  und wenden IV.4 auf das Dreieck  $PQT$  an. Die Gerade  $\overline{RS}$  muß also neben  $PT$  noch eine Seite im Inneren treffen. Wenn dies  $PQ$  ist, so sind wir fertig. Im anderen Fall folgt  $\overline{RS} \cap \overline{PQ} = \{Y\}$  mit  $RYS \in \mathfrak{Z}$ ,  $YPQ \in \mathfrak{Z}$ . Nach IV.4, angewandt auf das Dreieck  $YRQ$ , sehen wir, daß  $\overline{SP}$  die Seite  $RQ$  im Inneren trifft. Daraus resultiert  $p \subseteq PQS^- \cap SPQ^-$  und wir sind bei Fall i) mit  $p$  anstelle von  $q$  und  $S$  anstelle von  $T$ . Seien also  $R$ ,  $S$  und  $M$  so gewählt, dann behaupten wir,  $M$  ist der Mittelpunkt von  $PQ$ . Nach 5.1 haben wir  $\triangle(PQR) \equiv \triangle(QPS)$ , nach 5.5  $\sphericalangle(RPS) \equiv \sphericalangle(SQR)$ , somit

$\triangle(PRS) \equiv \triangle(QRS)$ . Daraus folgt nun  $\sphericalangle(PSM) \equiv \sphericalangle(QRM)$ ,  $\sphericalangle(PMS) \equiv \sphericalangle(QMR)$ , also  $PM \equiv QM$ .  $\square$

Aus der Existenz des Mittelpunktes können wir nun den folgenden wichtigen Satz über die Außenwinkel und Innenwinkel von Dreiecken ableiten, woraus auch die Existenz von Parallelen folgen wird.

**Satz 5.9** *Ein Außenwinkel eines Dreieckes ist niemals kongruent zu einem nichtanliegenden Innenwinkel.*

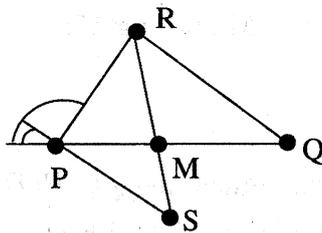


Abbildung 56:

**Beweis.** Sei  $P, Q, R$  Dreieck und  $M$  der Mittelpunkt von  $PQ$ . Wir bestimmen  $S$  auf  $MR^-$  mit  $RM \equiv MS$ . Nun haben wir  $\triangle(RMQ) \equiv \triangle(SMP)$ . Daher ist der Innenwinkel  $\sphericalangle(PQR) \equiv \sphericalangle(MPS)$ , aber der Außenwinkel  $\sphericalangle(PM^-, PR^+) \not\equiv \sphericalangle(PM^-, PS^-) \equiv \sphericalangle(PQR)$ .  $\square$

**Satz 5.10** *Seien  $g$  und  $h$  verschiedene Geraden in einer Ebene und  $k \neq g, h$  eine Gerade, die  $g$  und  $h$  schneidet. Gilt für die Stufenwinkel  $\sphericalangle(RPQ) \equiv \sphericalangle(SQT)$  (siehe untenstehende Abbildung), so sind  $g$  und  $h$  parallel. Insbesondere existiert also zu  $g \in \mathcal{G}$ ,  $P \in \mathcal{P}$  stets eine Parallele zu  $g$  durch  $P$ .*

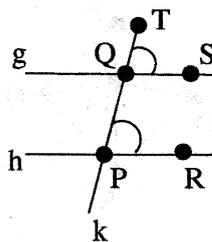


Abbildung 57:

**Beweis.** Wären  $g$  und  $h$  nicht parallel,  $X \in g \cap h$ , so wäre nach Voraussetzung ein Außenwinkel des Dreieckes  $P, Q, X$  kongruent zu einem nicht anliegenden Innenwinkel, was nach 5.9 nicht möglich ist. Die letzte Behauptung folgt, da wir den Winkel  $\sphericalangle(SQT)$  an  $\overline{PQ}$  im Punkt  $P$  abtragen können.

□

Eine weitere Folgerung der Existenz von Lot und Mittelpunkt ist der 3. Kongruenzsatz für Dreiecke.

**Satz 5.11** (3. Kongruenzsatz für Dreiecke) Sind  $P, Q, R$  und  $P', Q', R'$  Dreiecke mit  $PQ \equiv P'Q'$ ,  $PR \equiv P'R'$ ,  $QR \equiv Q'R'$ , so ist  $\triangle(PQR) \equiv \triangle(P'Q'R')$ .

**Beweis.** Wir tragen  $P'Q'$  auf  $PQ$  ab und bestimmen  $S \in PQR^-$  mit  $\sphericalangle(QPS) \equiv \sphericalangle(Q'P'R')$  und  $PS \equiv P'R'$ . Nach 5.1 ist dann  $\triangle(P'Q'R') \equiv \triangle(PQS)$ . Sei  $M$  der Mittelpunkt der Strecke  $RS$ .

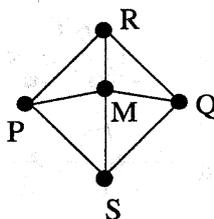


Abbildung 58:

Aufgrund von 5.3 haben wir  $\sphericalangle(PRM) \equiv \sphericalangle(PSM)$  und  $\sphericalangle(MRQ) \equiv \sphericalangle(MSQ)$ . Daraus folgt mit 5.1  $\triangle(PRM) \equiv \triangle(PSM)$ ,  $\triangle(RQM) \equiv \triangle(SQM)$  und somit  $\overline{PM} \perp \overline{RS}$ ,  $\overline{QM} \perp \overline{RS}$ . Aus der Eindeutigkeit des Lotes schließen wir  $M \in \overline{PQ}$ , somit  $\sphericalangle(QPR) \equiv \sphericalangle(QPS) \equiv \sphericalangle(Q'P'R')$ , d.h.  $\triangle(PQR) \equiv \triangle(P'Q'R')$  nach 5.1.  $\square$

Nach diesen allgemeinen Sätzen und Konstruktionen führen wir nun die Längen von Strecken und Größen von Winkeln ein und vergleichen sie der Größe nach.

**Definition.** Sei  $G$  metrischer Raum. Die Kongruenzklasse, zu der die Strecke  $PQ$  gehört, heißt *Länge der Strecke*, bezeichnet mit  $|PQ|$ . Analog heißt die Kongruenzklasse, zu der der Winkel  $\sphericalangle(p, q)$  gehört, die *Größe des Winkels*, bezeichnet mit  $|\sphericalangle(p, q)|$ .

Das heißt also:

$$\begin{aligned} |PQ| = |RS| &\iff PQ \equiv RS, \\ |\sphericalangle(p, q)| = |\sphericalangle(r, s)| &\iff \sphericalangle(p, q) \equiv \sphericalangle(r, s) \end{aligned}$$

Wir wählen nun ein für allemal einen Punkt  $O^*$  und eine Halbgerade  $p^*$  mit  $O(p^*) = O^*$ , wobei  $P > O^*$  für alle  $P \in p^*$ . Die Längen werden mit kleinen

Buchstaben  $a, b, c, \dots$  bezeichnet, Winkelgrößen mit  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , die Menge der Längen mit  $\mathcal{L}$ , die Menge der Winkelgrößen mit  $\mathcal{W}$ .

**Definition.** Für  $a, b \in \mathcal{L}$  sei

$$a < b \quad : \iff \quad \text{für die (eindeutigen) Punkte } A, B \in p^* \\ \text{mit } |O^*A| = a, |O^*B| = b \text{ gilt } A < B.$$

**Satz 5.12** Die Relation  $<$  ist eine lineare Ordnung auf  $\mathcal{L}$  und unabhängig von der Bezugshalbgeraden  $p^*$ .

**Beweis.** Wir beweisen zuerst die zweite Behauptung. Sei  $|O^*A| = a$ ,  $|O^*B| = b$  mit  $A < B$  und  $q^*$  mit  $O(q^*) = M$  irgendeine andere Halbgerade mit  $|MR| = a$ ,  $|MS| = b$  aber  $MSR \in \mathfrak{Z}$ .

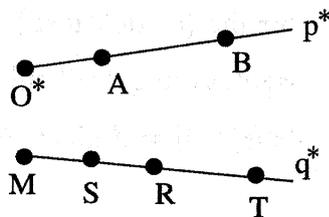


Abbildung 59:

Wir bestimmen  $T \in RS^-$  mit  $AB \equiv RT$ . Dann ist  $O^*A \equiv MR$ ,  $AB \equiv RT$ , also  $O^*B \equiv MS \equiv MT$  im Widerspruch zu V.2. Daß  $<$  eine lineare Ordnung auf  $\mathcal{L}$  ist, folgt sofort aus der analogen Tatsache für die Halbgerade  $p^*$ .  $\square$

**Definition.** Für  $a, b \in \mathcal{L}$  erklären wir die *Summe*  $a + b$  folgendermaßen: Seien  $A, B \in p^*$ ,  $A \leq B$  mit  $|O^*A| = a$ ,  $|AB| = b$ , dann ist  $a + b := |O^*B|$ .

**Satz 5.13**

- (i)  $(\mathcal{L}, +)$  ist eine kommutative Halbgruppe.
- (ii)  $a < b \Rightarrow a + c < b + c$  für alle  $a, b, c \in \mathcal{L}$ .
- (iii)  $a < b \iff \exists u \in \mathcal{L}$  mit  $a + u = b$ .

**Beweis.** Wir zeigen nur (iii). Sei  $a < b$  und  $A \in p^*$ ,  $B \in p^*$  mit  $|O^*A| = a$ ,  $|O^*B| = b$ ,  $A < B$ . Wir setzen  $u = |AB|$ , dann gilt nach Definition  $a + u = b$ . Die Umkehrung ist ebenso klar.  $\square$

Um Winkel zu vergleichen, wählen wir zu  $p^*$  eine feste Halbebene  $\epsilon^*$  mit der Randgeraden  $p^* \cup \{O^*\} \cup p^{*-}$ , auf der wir die Winkel abtragen.

**Definition.** Für  $\alpha, \beta \in \mathcal{W}$  sei

$$\alpha < \beta \quad : \iff \quad \text{für die (eindeutigen) Winkel } \sphericalangle(p^*, r), \\ \sphericalangle(p^*, s) \text{ in } \epsilon^* \cup p^* \text{ mit } |\sphericalangle(p^*, r)| = \alpha, \\ |\sphericalangle(p^*, s)| = \beta \text{ gilt } r \in \text{Inn}\sphericalangle(p^*, s).$$

Die zu 5.12 analoge Aussage ist:

**Satz 5.14** Die Relation  $<$  ist eine lineare Ordnung auf  $\mathcal{W}$  und unabhängig von  $p^*$ ,  $\epsilon^*$ .

Mit diesen Größenbeziehungen können wir nun einige weitere Begriffe der absoluten Geometrie einführen. Die Größe eines rechten Winkels wird mit  $R$  bezeichnet. Ein Winkel  $\sphericalangle(p, q)$  heißt *spitz* bzw. *stumpf*, falls  $|\sphericalangle(p, q)| < R$  bzw.  $|\sphericalangle(p, q)| > R$ . Es ist klar, daß ein Winkel genau dann *spitz* ist, falls sein *Nebenwinkel* *stumpf* ist.

Ähnlich wie bei Strecken kann nun eine Addition von Winkeln eingeführt werden, allerdings muß der Begriff des Winkels etwas erweitert werden, um auch die Summe zweier Winkel zu erklären, die größer als zwei Rechte ist (z.B. durch Einführung orientierter Winkel). Wir geben hier kurz folgende eingeschränkte

**Definition.** Ein Winkel  $\sphericalangle(p, q)$  ist die *Summe* zweier Winkel  $\sphericalangle(r, s)$ ,  $\sphericalangle(t, u)$ , falls eine Halbgerade  $v \in \text{Inn}\sphericalangle(p, q)$  existiert mit  $O(v) = O(p)$  und  $\sphericalangle(p, v) = \sphericalangle(r, s)$ ,  $\sphericalangle(v, q) = \sphericalangle(t, u)$ .

Nach 5.5 ist diese Definition unabhängig von der Wahl der Repräsentanten der einzelnen Winkelklassen.

**Satz 5.15** *Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist größer als jeder nicht anliegende Innenwinkel.*

**Beweis.** Daß ein Außenwinkel nicht kongruent zu einem nicht anliegenden Innenwinkel sein kann, haben wir in 5.9 gesehen. Aus dem dortigen Beweis (siehe Figur ??) folgt aber auch die jetzige Behauptung.  $\square$

**Definition.** Ein Dreieck heißt *rechtwinklig*, falls einer der Winkel ein rechter ist. Die beiden anderen müssen dann nach dem eben bewiesenen spitz sein.

**Satz 5.16** *Der größeren Seite eines Dreiecks liegt der größere Winkel gegenüber.*

**Beweis** Sei  $P, Q, R$  Dreieck,  $|PQ| > |PR|$  und  $PSQ \in \mathfrak{Z}$ ,  $|PS| = |PR|$ . Dann ist  $|\sphericalangle(PRQ)| > |\sphericalangle(PRS)| = |\sphericalangle(PSR)| > |\sphericalangle(PQR)|$  nach 5.15.  $\square$

Als Folgerung haben wir den 4. Kongruenzsatz für Dreiecke.

**Satz 5.17** 4. *Kongruenzsatz für Dreiecke.* Sind  $P, Q, R$  und  $P', Q', R'$  Dreiecke mit  $PQ \equiv P'Q', PR \equiv P'R'$  wobei  $|PQ| > |PR|$  und  $\sphericalangle(PRQ) \equiv \sphericalangle(P'R'Q')$ , dann ist  $\triangle(PQR) \equiv \triangle(P'Q'R')$ .

**Beweis.** Angenommen  $|RQ| < |R'Q'|$ . Wir wählen  $S \in R'Q'^+$  mit  $RQ \equiv R'S$ . Nach 5.1 haben wir  $\triangle(PQR) \equiv \triangle(P'SR')$ , daher  $P'S \equiv P'Q'$ , somit  $\sphericalangle(P'SQ') \equiv \sphericalangle(P'Q'S)$ . Nun ist aber nach 5.16  $|\sphericalangle(P'Q'R')| < |\sphericalangle(P'R'Q')|$ , andererseits nach 5.15  $|\sphericalangle(P'Q'R')| = |\sphericalangle(P'SQ')| > |\sphericalangle(P'R'Q')|$ , Widerspruch.  $\square$

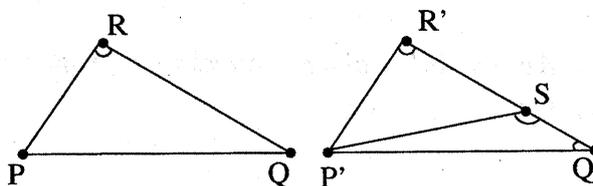


Abbildung 60: Zum Beweis des 4. Kongruenzsatzes für Dreiecke (5.17)

Bevor wir zur Koordinatisierung übergehen, notieren wir das zentrale Resultat, das jeder Abstandsfunktion  $|PQ|$  zugrundeliegt.

**Satz 5.18** (*Dreiecksungleichung*) Sei  $P, Q, R$  Dreieck. Dann gilt  $|PR| < |PQ| + |QR|$ .

**Beweis.** Sei  $S \in QP^-$  mit  $|QS| = |QR|$ . Dann ist  $|\sphericalangle(PRS)| > |\sphericalangle(QRS)| = |\sphericalangle(QSR)|$ , also  $|PQ| + |QR| = |PQ| + |QS| > |PR|$  nach 5.16, angewandt auf das Dreieck  $P, S, R$ .  $\square$

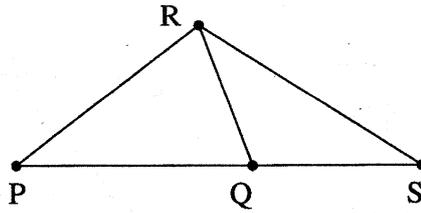


Abbildung 61: Zum Beweis der Dreiecksungleichung (5.18)

Es sei von nun an  $AG_K(V)$  ein geordneter Desargues'scher affiner Raum, in dem auch die Kongruenzaxiome gelten - also ein Desargues'scher Euklidischer Raum.

**Satz 5.19** *Sei  $AG_K(V)$  ein Euklidischer Raum. Dann gilt:*

- (i) *Stufenwinkel an parallelen Geraden sind kongruent.*
- (ii) *In einem Dreieck ist jeder Außenwinkel gleich der Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel.*

**Beweis.** Es sei  $g \parallel h$ . Wir wählen  $P, Q, R, T$  wie in untenstehender Figur und  $S \in PQR^+$  mit  $\sphericalangle(RPQ) \equiv \sphericalangle(SQT)$ . Nach 5.10 gilt dann  $g \parallel QS$ , also  $S \in h$ . Sei  $P, Q, R$  Dreieck. Wir legen die Parallele  $h$  zu  $\overline{PQ}$  durch  $R$  und wählen  $S \in h \cap PRQ^+, T \in RP^-$ . Nach dem eben bewiesenen ist  $\sphericalangle(QPR) \equiv \sphericalangle(SRT), \sphericalangle(PQR) \equiv \sphericalangle(SRQ)$ , also  $|\sphericalangle(QRT)| = |\sphericalangle(QPR)| + |\sphericalangle(PQR)|$ .  $\square$

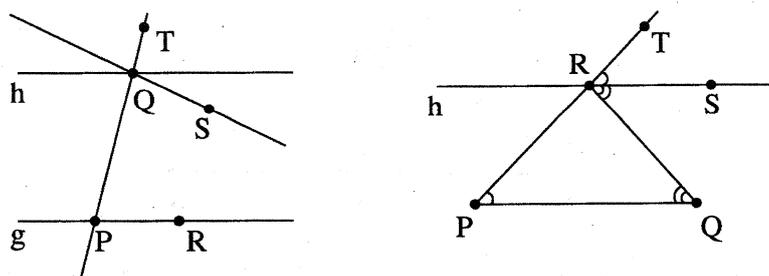


Abbildung 62: Zum Beweis von Satz 5.19

Als Folgerung haben wir:

**Satz 5.20** Seien  $P, Q, R, S$  die Ecken eines Parallelogramms, d.h.  $\overline{PQ} \parallel \overline{RS}$ ,  $\overline{PS} \parallel \overline{QR}$ . Dann gilt  $PQ \equiv SR$ ,  $PS \equiv QR$ . Insbesondere führt also eine Translation jede Strecke in eine kongruente Strecke über.

**Beweis.** Nach 5.19(i) ist  $\sphericalangle(PSQ) \equiv \sphericalangle(RQS)$ ,  $\sphericalangle(PQS) \equiv \sphericalangle(RSQ)$ , also nach 5.2  $\triangle(PQS) \equiv \triangle(RSQ)$ .  $\square$

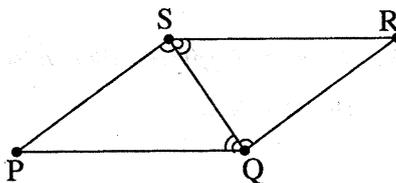


Abbildung 63: Zum Beweis von Satz ??

Durch Anwendung der Translation  $x \mapsto x + u$  folgt daraus

**Satz 5.21** Seien  $u, v, w \in V$ . Dann ist

$$(i) |uv| = |Ov - u|$$

$$(ii) |\sphericalangle(vuw)| = |\sphericalangle(v - u, O, w - u)|.$$

Die Ordnung im Raum  $AG_K(V)$  wird laut 4.13 genau durch die Ordnung im Schiefkörper wiedergespiegelt. In naheliegender Weise wollen wir nun auch die Menge  $\mathcal{L}$  der Streckenlängen durch die nichtnegativen Elemente aus  $K$  repräsentieren. Dazu nehmen wir die Bezugshalbgerade  $p^*$  mit  $O(p^*) = O$  (Nullpunkt in  $AG_K(V)$ ) und  $U \in p^*$  mit Ortsvektor  $u$ . Die Punkte auf  $p^*$  sind dann genau die Menge  $\{\lambda u : \lambda > O\}$  und wir identifizieren nun

$$|O\lambda u| = \lambda, |OO| = O.$$

Nach 4.13 gilt offenbar  $|O\lambda u| < |O\mu u|$  genau dann, wenn  $\lambda < \mu$ . Auch die Addition der Längen laut 5.13 stimmt überein mit der Addition in  $K$ . Sei  $\lambda, \mu > O, A = \lambda u, B = \mu u$ . Nach ?? haben wir  $|OA| = |DE| = |BC|$ . Also gilt  $\lambda + \mu = |OC| = |OB| + |BC| = |OA| + |OB|$ . Weiter haben wir  $|O\lambda v| = \lambda|Ov|$  für  $v \in V$ . Zusätzlich haben wir nun natürlich auch eine Multiplikation und Division von Strecken gewonnen.

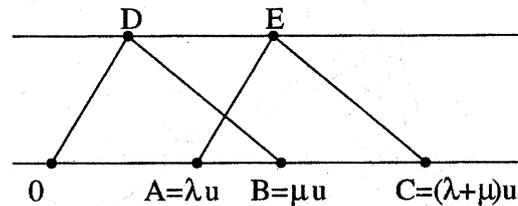


Abbildung 64: Zum Beweis von Satz 5.21

**Satz 5.22** *Satz von Pythagoras.* Sei  $A, B, C$  ein rechtwinkliges Dreieck in  $AG_K(V)$  mit  $|\sphericalangle(ACB)| = R$ . Dann gilt  $|AC|^2 + |CB|^2 = |AB|^2$ .

**Beweis.** O.B.d.A. kann  $A = O$  angenommen werden. Wir fällen ein Lot von  $C$  auf  $\overline{AB}$  und bezeichnen mit  $D$  den Fußpunkt. Nach 5.16 gilt  $|AD| < |AC| < |AB|$ , also  $|AD| < |AB|$  und analog  $|BD| < |AB|$ , also  $ADB \in \mathfrak{Z}$ . Setzen wir  $a = |BC|$ ,  $b = |AC|$ ,  $c = |AB|$ ,  $p = |AD|$ ,  $q = |DB|$ ,  $h = |CD|$ , so gilt also  $c = p + q$ . Sei  $E \in AB^+$  mit  $AE \equiv AC$ ,  $F \in AC^+$  mit  $AF \equiv AB$ . Nach 5.1 haben wir  $\triangle(ABC) \equiv \triangle(AFE)$ , also insbesondere  $|\sphericalangle(AEF)| = R$  und daher  $\overline{CD} \parallel \overline{EF}$  nach 5.10. Die Dehnung  $v \mapsto bp^{-1}v$  bildet  $D$  auf  $E$  und daher  $C$  auf  $F$ . Daraus folgt  $c = \frac{b}{p}b = \frac{b^2}{p}$ , d.h.  $b^2 = pc$ . (Hier nehmen wir die im nächsten Satz gezeigte Kommutativität von  $K$  voraus.) Analog haben wir  $a^2 = qc$ , also insgesamt

$$a^2 + b^2 = qc + pc = (p + q)c = c^2.$$

Außerdem gilt nun  $h^2 = b^2 - p^2 = pc - p^2 = pq$ . □

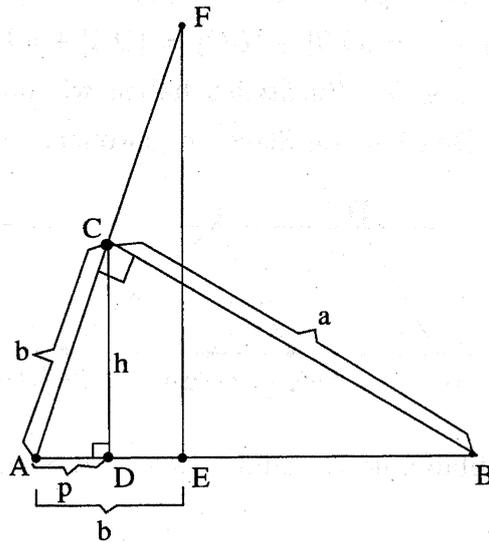


Abbildung 65:

**Bemerkung.** Nach dem 3. Kongruenzsatz 5.11 ist klar, daß auch die Umkehrung des Satzes von Pythagoras gilt, d.h. ist  $|AC|^2 + |CB|^2 = |AB|^2$ , dann muß  $|\sphericalangle(ACB)| = R$  sein.

In 4.13 haben wir gezeigt, daß geordnete Desargues'sche Räume  $AG_K(V)$  genau von geordneten Schiefkörpern herrühren. In den folgenden Sätzen charakterisieren wir jene Schiefkörper, welche zu metrischen Räumen  $AG_K(V)$  korrespondieren.

**Definition.** Ein Schiefkörper  $K$  heißt *pythagoräisch*, falls die Summe zweier Quadrate wieder ein Quadrat ist.

Sei  $Qu$  die Menge der Quadrate in  $K$ , also  $Qu = \{\lambda^2 : \lambda \in K\}$ . Pythagoräisch bedeutet somit, daß  $Qu + Qu \subseteq Qu$ . Durch Induktion ist dies gleichbedeutend mit  $nQu \subseteq Qu$  für jedes  $n \geq 2$ .

**Satz 5.23** *Es sei  $AG_K(V)$  ein Desargues'scher Euklidischer Raum. Dann ist  $K$  ein geordneter, kommutativer, pythagoräischer Schiefkörper.*

**Beweis.** Sei der Desargues'sche Euklidische Raum  $AG_K(V)$  gegeben. Wir müssen noch zeigen, daß  $K$  kommutativ ist. Daß  $K$  pythagoräisch ist, folgt dann aus 5.22, da wir beliebige Streckenlängen  $a, b$  um einen rechten Winkel abtragen können, woraus  $a^2 + b^2 = c^2 \in Qu$  folgt. Wir können uns auf positive Elemente  $\lambda, \mu > 1$  beschränken. (Denn  $\lambda^{-1}\mu = \mu\lambda^{-1} \Leftrightarrow \mu = \lambda\mu\lambda^{-1} \Leftrightarrow \mu\lambda = \lambda\mu$  und  $\lambda^{-1}\mu^{-1} = \mu^{-1}\lambda^{-1} \Leftrightarrow (\mu\lambda)^{-1} = (\lambda\mu)^{-1} \Leftrightarrow \mu\lambda = \lambda\mu$ .) Seien die Geraden  $g, h$  durch  $O$  mit  $g \nparallel h$  und  $E = u, A = \lambda u, B = \mu u$  auf  $g$  gegeben. Wir tragen  $E', A', B'$  auf  $h$  ab mit  $|OE| = |OE'|, |OA| = |OA'|, |OB| = |OB'|$  wie in Figur ??.

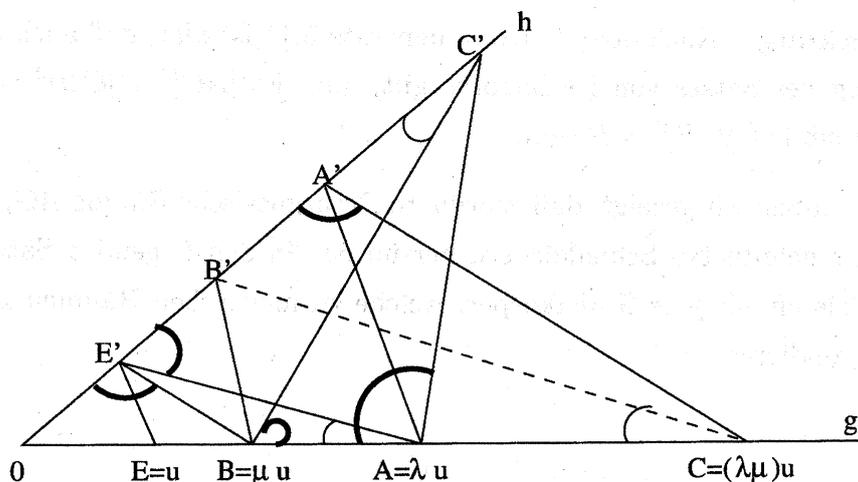


Abbildung 66:

Mittels der Dehnung  $v \mapsto \lambda v$  bestimmen wir  $C = (\lambda\mu)u \in g$  und  $C' \in h$  mit  $|OC'| = |OC|$ . Alle Geraden  $\overline{XX'}$  sind untereinander parallel und außerdem gilt  $\overline{A'C'} \parallel \overline{E'B}$ . Mittels der Dehnung  $v \mapsto \mu v$  sehen wir, daß der Punkt  $(\mu\lambda)u$  der Schnittpunkt von  $g$  mit der Parallelen zu  $\overline{E'A}$  durch  $B$  ist. Es bleibt also zu zeigen, daß  $\overline{B'C}$  parallel zu  $\overline{E'A}$  ist oder damit gleichbedeutend nach ??, daß  $\sphericalangle(OAE') \equiv \sphericalangle(OCB')$  ist. Wir haben  $\sphericalangle(OE'B) \equiv \sphericalangle(OA'C) \equiv \sphericalangle(OAC')$ . Das heißt, im Viereck  $E'BAC'$  ist der Außenwinkel  $\sphericalangle(OE'B)$  kongruent zum Innenwinkel  $\sphericalangle(BAC')$ . Daraus folgt mit Hilfe von 5.19, daß  $\sphericalangle(AE'C') \equiv \sphericalangle(ABC')$ . Wenden wir abermals 5.19 (ii) an, so folgt  $\sphericalangle(BAE') \equiv \sphericalangle(E'C'B) \equiv \sphericalangle(OC'B) \equiv \sphericalangle(OCB')$ , also die Behauptung.  $\square$

Als nächstes überlegen wir uns, wie die Kongruenzaxiome algebraisch beschrieben werden können. Dazu erinnern wir an die Definition. Sei  $V$  ein Vektorraum über dem geordneten Körper  $K$ . Eine *symmetrische Bilinearform* auf  $V$  ist eine Abbildung  $\varphi : V \times V \rightarrow K$  mit

$$(i) \quad \varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y) \quad (x, y \in V, \lambda, \mu \in K)$$

$$(ii) \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x).$$

$\varphi$  heißt ein *inneres Produkt*, falls zusätzlich  $\varphi(x, x) > 0$  für alle  $x \neq O$ .

Meist schreiben wir für ein inneres Produkt  $\varphi(x, y)$  kurz  $x.y$ .

Es sei der Euklidische Raum  $AG_K(V)$  gegeben. Wir setzen  $x.x := |0x|^2$  und  $\|x\| := |0x| = \sqrt{x.x}$ .  $\|x\|$  ist also der Abstand von  $x$  vom Ursprung  $O$ . Nun definieren wir

$$x.y := \frac{1}{2}((x+y).(x+y) - x.x - y.y) \quad \text{für } x, y \in V.$$

Insbesondere ist natürlich  $x.x = x.x$ . Weiteres habe wir nach Pythagoras  $x.y = 0$  genau dann, wenn  $|\sphericalangle(xOy)| = R$ .

Wir wollen zeigen, daß  $x.y$  ein inneres Produkt ist. Zunächst ein Hilfssatz. Sei  $g$  eine Gerade durch  $O$ , und  $y \in V$ . Unter der *Projektion*  $y_g$  von  $y$  auf  $g$  verstehen wir den Fußpunkt des Lotes von  $y$  auf  $g$ .

**Satz 5.24** Sei  $g$  Gerade durch  $O$  und  $y, z \in V$ . Dann gilt  $(y+z)_g = y_g + z_g$ .

**Beweis.** Sei  $y_n = y - y_g$ ,  $z_n = z - z_g$ , wobei nach Definition der Projektion  $\overline{Oy_n} \perp g$ ,  $\overline{Oz_n} \perp g$ . Dann gilt  $(y+z) = (y_g + z_g) + (y_n + z_n)$ . Können wir zeigen, daß die Gerade  $\overline{O(y_n + z_n)}$  senkrecht auf  $g$  steht, dann folgt die Behauptung wegen der Eindeutigkeit des Lotes. Es sei  $A = y_n$ ,  $B = z_n$ ,  $C \in g$  und  $C' \in OC$  mit  $OC = OC'$ . Dann gilt  $\triangle(OAC) \cong \triangle(OAC')$ ,  $\triangle(OBC) \cong \triangle(OBC')$ , somit  $\triangle(ABC) \cong \triangle(ABC')$  nach 5.11 und  $\triangle(ADC) \cong \triangle(ADC')$  nach 5.1, insbesondere also  $DC \cong DC'$ . Mit Hilfe von ?? schließen wir nun  $\triangle(ODC) \cong \triangle(ODC')$ , also  $\sphericalangle(DOC) \cong \sphericalangle(DOC')$ .

□

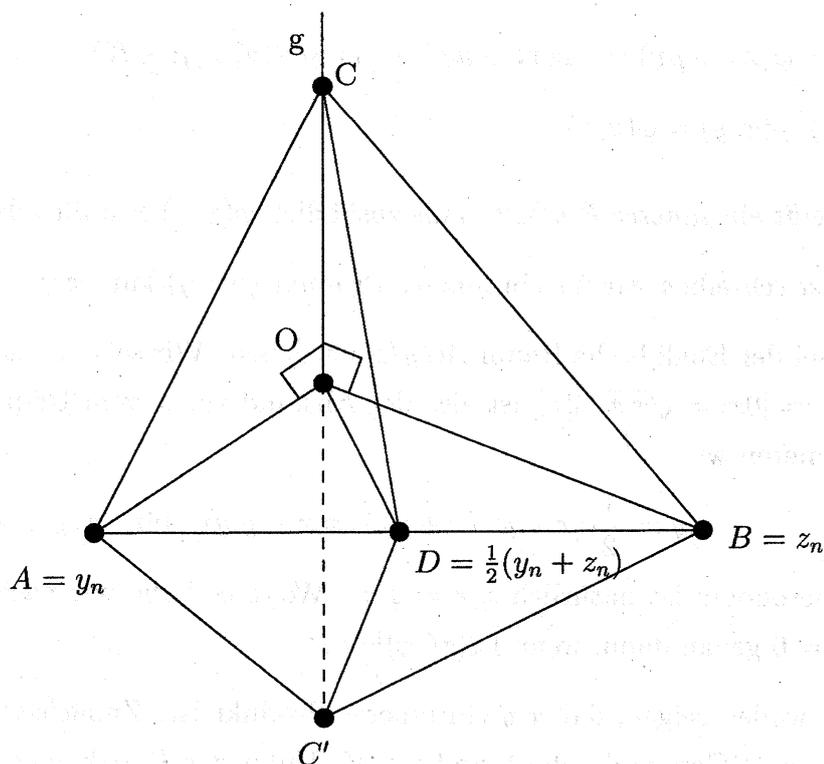


Abbildung 67:

**Satz 5.25** Sei der Euklidische Raum  $AG_K(V)$  gegeben. Dann ist

$$x.y := \frac{1}{2}((x+y).(x+y) - x.x - y.y)$$

ein inneres Produkt.

**Beweis.** Die Bedingung  $x.x > 0$  für  $x \neq O$  ist aufgrund der Definition erfüllt, ebenso  $x.y = y.x$ . Zunächst sehen wir, daß  $\lambda x.x = \frac{1}{2}((\lambda+1)x.(\lambda+1)x - \lambda x.\lambda x - x.x) = \frac{1}{2}((\lambda+1)^2(x.x) - \lambda^2(x.x) - x.x) = \frac{1}{2}2.\lambda(x.x) = \lambda(x.x)$ , da  $\|\lambda x\| = \lambda\|x\|$ , also  $\lambda x.\lambda x = \lambda^2(x.x)$ . Als nächstes behaupten wir  $x.y = x.y_g$  wobei  $g = \overline{Ox}$ ,  $x \neq O$ . Zum Beweis benützen wir 5.22. Es ist  $y - y_g =$

$(x + y) - (x + y_g)$ , wobei  $\overline{O(y - y_g)} \perp g$ . Also haben wir  $y \cdot y - y_g - y_g = (y - y_g) \cdot (y - y_g) = (x + y) \cdot (x + y) - (x + y_g) \cdot (x + y_g)$ , also  $x \cdot y = \frac{1}{2}((x + y) \cdot (x + y) - x \cdot x - y \cdot y) = \frac{1}{2}((x + y_g) \cdot (x + y_g) - x \cdot x - y_g \cdot y_g) = x \cdot y_g$ . Daraus folgt nun für  $O \neq x \in g$

$$\begin{aligned} x \cdot \lambda y &= x \cdot (\lambda y)_g = x \cdot \lambda y_g = \lambda(x \cdot y_g) = \lambda(x \cdot y) \quad \text{da } y_g \in g, \\ x \cdot (y + z) &= x \cdot (y + z)_g = x \cdot (y_g + z_g) \quad (\text{nach 5.25}) \\ &= x \cdot ((\lambda + \mu)x) \quad \text{wobei } y_g = \lambda x, z_g = \mu x \\ &= (\lambda + \mu)(x \cdot x) \\ &= \lambda(x \cdot x) + \mu(x \cdot x) \\ &= x \cdot \lambda x + x \cdot \mu x \\ &= x \cdot y_g + x \cdot z_g \\ &= x \cdot y + x \cdot z. \end{aligned}$$

Für  $x = O$  ist die Bilinearität trivialerweise erfüllt.  $\square$

Mit Hilfe dieses inneren Produktes  $x \cdot y$  können wir die Strecken- und Winkelkongruenz vollkommen beschreiben. Denn es ist  $|uv| = \|v - u\|$ , also

$$uv \equiv rs \Leftrightarrow (v - u) \cdot (v - u) = (s - r) \cdot (s - r).$$

Wir betrachten alle Winkel mit Scheitel  $O$ , wobei wir einen Winkel  $\sphericalangle(xOy)$  jeweils mit  $\|x\| = \|y\| = 1$  ansetzen. Ist  $y_g$  die Projektion von  $y$  auf die Gerade  $\overline{Ox}$ , so stimmt nach 5.17, angewandt auf das Dreieck  $\triangle(Oyy_g)$ , die Größe  $\|y_g\|$  eindeutig den Winkel  $\sphericalangle(xOy)$ . Nun gilt  $y_g = \|y_g\|x$ , also haben wir  $x \cdot y = x \cdot y_g = \|y_g\|(x \cdot x) = \|y_g\|$  und somit  $\sphericalangle(xOy) \equiv \sphericalangle(x'Oy')$  genau dann, wenn  $x \cdot y = x' \cdot y'$ . Für einen beliebigen Winkel  $\sphericalangle(vuw)$  haben wir nach 5.21 (ii)

$$\begin{aligned} \sphericalangle(vuw) &\equiv \sphericalangle(v - u, O, w - u) = \sphericalangle\left(\frac{v - u}{\|v - u\|}, O, \frac{w - u}{\|w - u\|}\right) \quad \text{und somit} \\ \sphericalangle(vuw) &\equiv \sphericalangle(srt) \Leftrightarrow \frac{(v - u) \cdot (w - u)}{\|v - u\| \|w - u\|} = \frac{(s - r) \cdot (t - r)}{\|s - r\| \|t - r\|}. \end{aligned}$$

Diese beiden Beziehungen sagen uns nun genau, wie wir auf einem vorgegebenen Vektorraum eine Euklidische Geometrie definieren können.

**Satz 5.26** Sei  $AG_K(V)$  ein Desagues'scher affiner Raum über einem geordneten pythagoräischen Körper  $K$ . Wir ordnen den Raum gemäß 4.13. Dann existiert ein inneres Produkt auf  $V$  und jedes innere Produkt macht  $AG_K(V)$  durch die Festsetzungen

$$\begin{aligned} uv \equiv rs & \Leftrightarrow (v-u) \cdot (v-u) = (s-r) \cdot (s-r) \\ \sphericalangle(uvw) \equiv \sphericalangle(srt) & \Leftrightarrow \frac{(v-u) \cdot (w-u)}{\|v-u\| \|w-u\|} = \frac{(s-r) \cdot (t-r)}{\|s-r\| \|t-r\|} \end{aligned}$$

zu einem Euklidischen Raum.

**Beweis.** Daß ein inneres Produkt existiert, sieht man folgendermaßen. Wir wählen irgendeine Basis  $\{e_i : i \in I\}$  von  $V$ . Für  $x = \sum \lambda_i e_i$ ,  $y = \sum \mu_i e_i$  definieren wir  $x \cdot y := \sum_{i \in I} \lambda_i \mu_i$ . Da nur endlich viele der  $\lambda, \mu_i$  verschieden von 0 sind, ist dies zulässig.  $x \cdot y$  ist offensichtlich bilinear und symmetrisch ( $K$  ist kommutativ!) und wegen  $x \cdot x = \sum \lambda_i^2 > 0$  für  $x \neq O$  ein inneres Produkt. Sei  $x \cdot y$  irgendein inneres Produkt. Die Axiome V.1 - V.6 sind leicht zu verifizieren. Als Beispiel sehen wir uns das Streckenabtrugungsaxiom an. Seien  $p \neq q$  und die Halbgerade  $rs^+$  gegeben. Gesucht ist  $t \in rs^+$  mit  $pq \equiv rt$ . Das heißt, gesucht ist  $0 < \rho \in K$ , so daß  $(q-p) \cdot (q-p) = \rho(s-r) \cdot \rho(s-r) = \rho^2(s-r) \cdot (s-r)$ . Sind  $q-p$ ,  $s-r$  linear abhängig, zum Beispiel  $q-p = \mu(s-r)$ , dann ist  $\rho = |\mu|$  die Lösung. Seien nun  $q-p$ ,  $s-r$  linear unabhängig. Wir konstruieren uns im Unterraum  $\langle q-p, s-r \rangle$  eine Basis  $e_1, e_2$  mit  $\|e_1\| = \|e_2\| = 1$ ,  $e_1 \cdot e_2 = 0$ . Dies geht folgendermaßen: Wir setzen  $e_1 = \frac{q-p}{\|q-p\|}$ ,  $v = (s-r) - (e_1 \cdot (s-r))e_1$  und  $e_2 = \frac{v}{\|v\|}$ . Dann gilt  $\|e_1\| = \|e_2\| = 1$  und  $e_1 \cdot e_2 = \frac{1}{\|v\|} (e_1 \cdot v) = \frac{1}{\|v\|} (e_1 \cdot (s-r) - (e_1 \cdot (s-r))(e_1 \cdot e_2)) = 0$ . Es sei nun  $q-p = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ ,  $s-r = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2$ . Dann gilt  $(q-p) \cdot (q-p) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 =$

$\lambda^2, (s-r).(s-r) = \mu_1^2 + \mu_2^2 = \mu^2$  ( $K$  ist pythagoräisch!), also ist  $\rho = \left| \frac{\lambda}{\mu} \right|$   
 Lösung. □

In Zusammenfassung sehen wir, daß die Untersuchung der möglichen metrischen Strukturen auf  $AG_K(V)$  auf die Klassifizierung der möglichen inneren Produkte auf  $V$  hinausläuft. Diese Klassifizierung ist in endlich-dimensionalen Vektorräumen über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  vollständig geleistet. Man beachte, daß der Körper  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen nicht pythagoräisch ist. Geometrisch gesehen, heißt dies, daß das Streckenabtragungsaxiom nicht immer erfüllt ist. Zum Beispiel kann die Diagonale im Einheitsquadrat nicht auf der Koordinatenachse abgetragen werden, da  $\sqrt{2}$  nicht rational ist.

Gemäß unserem bisherigen Programm wollen wir nun jene Kollineationen von  $AG_K(V)$  untersuchen, welche die metrische Struktur erhalten.

**Definition** Sei  $AG_K(V)$  ein Euklidischer Raum. Eine Kollineation  $f$  heißt *Bewegung*, falls  $f(u)f(v) \equiv uv$  für alle  $u, v \in V$  gilt.  $Bew(V)$  bezeichne die Menge der Bewegungen.

Nach V.2 und V.3 folgt, daß jede Bewegung die Zwischenrelation erhält und nach 5.11, daß jede Bewegung jeden Winkel in einen kongruenten dazu überführt. Beschreiben wir die metrische Struktur in  $AG_K(V)$  durch ein inneres Produkt, so ist  $f$  eine Bewegung wenn:

$$(f(v) - f(u)) \cdot (f(v) - f(u)) = (v - u) \cdot (v - u) \quad (u, v \in V)$$

gilt.

**Satz 5.27** Sei der Euklidische Raum  $AG_K(V)$  samt innerem Produkt gegeben.

(i)  $Bew(V)$  ist mit der Komposition eine Gruppe.

(ii)  $Bew(V) \leq Aff(V)$ .

(iii)  $Bew(V) = Tra(V) \cdot O(V)$ , wobei  $O(V) \leq GL(V)$  die Gruppe jener  $\bar{f} \in GL(V)$  ist, für die  $\bar{f}(u) \cdot \bar{f}(v) = u \cdot v$  für alle  $u, v \in V$ .  $O(V)$  heißt die zum inneren Produkt gehörende orthogonale Gruppe.  $Tra(V)$  ist Normalteiler von  $Bew(V)$  und es gilt  $Bew(V)/Tra(V) \cong O(V)$ .

**Beweis.** (i) ist klar. Da jede Bewegung die Zwischenrelation erhält, haben wir  $Bew(V) \leq Koll(V)_<$ . Außerdem haben wir in 5.20 gesehen, daß  $Tra(V) \leq Bew(V)$  ist. Sei  $f = \tau_v \cdot \bar{f} \in Bew(V)$ ,  $\bar{f} \in S(V)_<$ . Dann ist  $\bar{f} = \tau_{-v} \cdot f \in Bew(V)$ , also gilt  $\bar{f}(u) \cdot \bar{f}(u) = u \cdot u$  für alle  $u \in V$ , somit  $\bar{f}(u) \cdot \bar{f}(v) = \frac{1}{2}(\bar{f}(u+v) \cdot \bar{f}(u+v) + \bar{f}(u) \cdot \bar{f}(u) - \bar{f}(v) \cdot \bar{f}(v)) = \frac{1}{2}((u+v) \cdot (u+v) - u \cdot u - v \cdot v) = u \cdot v$  für alle  $u, v \in V$ , das heißt  $\bar{f} \in O(V)$ . Umgekehrt ist  $f = \tau_v \bar{f} \in Bew(V)$ , da  $\tau_v, \bar{f} \in Bew(V)$ . Es bleibt zu zeigen, daß  $O(V) \leq GL(V)$ .  $O(V)$  ist sicherlich eine Gruppe. Sei  $\bar{f} \in O(V)$  und  $\sigma$  der dazugehörige Automorphismus von  $K$ . Dann gilt  $\bar{f}(\lambda v) \cdot \bar{f}(\lambda v) = \lambda v \cdot \lambda v = \lambda^2(v \cdot v)$ , andererseits  $\bar{f}(\lambda v) \cdot \bar{f}(\lambda v) = \lambda^\sigma \bar{f}(v) \cdot \lambda^\sigma \bar{f}(v) = (\lambda^\sigma)^2 \bar{f}(v) \cdot \bar{f}(v) = (\lambda^\sigma)^2(v \cdot v)$ , also  $\lambda^\sigma = \pm \lambda$  für alle  $\lambda \in K$ . Da  $\sigma$  die Zwischenrelation erhält, gilt aber für  $\lambda > 1 > 0$ , daß  $\lambda^\sigma > 1 > 0 > -\lambda$ , also  $\lambda^\sigma = \lambda$  und ebenso für  $1 > \lambda > 0$ , daß  $1 > \lambda^\sigma > 0 > -\lambda$ , also wiederum  $\lambda^\sigma = \lambda$ . Die letzte Behauptung in (iii) ist klar.  $\square$

### Aufgaben

1. Sei  $G$  ein 2-dimensionaler metrischer Raum. Sind  $PQ \equiv P'Q'$ , so gibt es immer mindestens eine und höchstens 2 Bewegungen, die  $P$  in  $P'$  und  $Q$  in  $Q'$  überführen.
2. \* Sei  $G$  wie in 1. Gilt  $\Delta(PQR) \equiv \Delta(P'Q'R')$ , so gibt es genau eine Bewegung, die  $P$  in  $P'$ ,  $Q$  in  $Q'$  und  $R$  in  $R'$  überführt.

3. Zeige, daß in einem metrischen Raum Satz 5.19(i) äquivalent zum Parallelaxiom ist.
4. Zeige: In jedem Viereck ist die Summe der 4 Seitenlängen größer als die Summe der Längen der beiden Diagonalen.
5. Ein gleichseitiges Viereck heißt Rhombus. Zeige, daß in einem Rhombus die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen und die Winkel des Vierecks halbieren.
6. Sei der Euklidische Raum  $AG_K(V)$  gegeben. Beweise den Strahlensatz: Ist  $PQR$  ein Dreieck und  $S \in PQ^+$ ,  $T \in PR^+$  und  $\overline{PQ} \parallel \overline{ST}$ , so gilt

$$|PQ| : |PR| : |QR| = |PS| : |PT| : |ST|.$$

7. Bestimme die Gruppe  $O(\mathbb{R}^2)$ . (Hinweis: Stelle jede Bewegung  $f \in O(\mathbb{R}^2)$  durch eine 2x2-Matrix in bezug auf eine Basis  $(1, 0), (0, 1)$  dar und klassifiziere die Matrizen.)
8. Es sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum über dem geordneten Körper  $K$  mit innerem Produkt. Zeige, daß  $V$  stets eine orthonormierte Basis besitzt, das heißt eine Basis  $\{e_1, \dots, e_n\}$  mit  $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ . Zeige ferner: Ist  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ , dann gilt  $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \leq \|x\|^2$  für alle  $m \leq n$ .



## 6 Konvexe Geometrie

Wir betrachten in diesem Kapitel stets geordnete Räume  $G_{<} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathfrak{E})$ .

**Definition.** Eine Teilmenge  $A \subseteq \mathcal{P}$  heißt *konvex*, falls  $P, Q \subseteq A$  impliziert  $[P, Q] \subseteq A$ .

Das heißt, eine konvexe Menge enthält mit je zwei Punkten auch die gesamte Verbindungsstrecke.  $\emptyset$  und  $\mathcal{P}$  sind trivialerweise konvex.

### Satz 6.1

- (i) Der Durchschnitt einer beliebigen Familie von konvexen Mengen ist konvex.
- (ii) Jede Menge  $A \subseteq \mathcal{P}$  ist in einer kleinsten konvexen Menge  $\text{conv}(A)$  enthalten, nämlich  $\text{conv}(A) = \bigcap_{A \subseteq B_i} B_i$ ,  $B_i$  konvex. Gilt  $C = \text{conv}(A)$ , so heißt  $C$  die *konvexe Hülle* von  $A$  und  $A$  ein *konvexes Erzeugendensystem* von  $C$ .
- (iii)  $A \mapsto \text{conv}(A)$  ist ein Abschluß.
- (iv)  $A \subseteq \text{conv} A \subseteq \bar{A}$ .

**Beweis.** i) folgt direkt aus der Definition und impliziert seinerseits ii) und iii). iv) ist klar, da jeder Unterraum konvex ist.  $\square$

**Beispiele.** Jeder Unterraum von  $\mathcal{P}$  ist konvex, da er mit je zwei Punkten sogar die gesamte Gerade enthält. Ebenso ist jeder Halbraum konvex, wie aus der Definition sofort ersichtlich ist, sowie auch jeder abgeschlossene Halbraum und somit auch jeder Durchschnitt von Halbräumen. Sei  $\angle(p, q)$

Winkel, dann ist  $\text{Inn}\angle(p, q)$  konvex, da  $\text{Inn}\angle(p, q) = pq^+ \cap qp^+$ .  $\text{Äuß}\angle(p, q)$  ist hingegen nicht konvex.

Jeder einzelne Punkt  $P$  ist eine konvexe Menge. Sei  $P \neq Q$ , dann ist  $\text{conv}\{P, Q\} = [P, Q]$ . Denn nach Definition muß  $\text{conv}\{P, Q\} \supseteq [P, Q]$  sein, andererseits ist aber  $[P, Q]$  als Durchschnitt zweier abgeschlossener Halbgeraden bereits konvex. Seien  $P, Q, R$  nichtkollinear. Dann ist  $\text{conv}\{P, Q, R\} = [P, Q] \cup [P, R] \cup [Q, R] \cup (PQR^+ \cap PRQ^+ \cap QRP^+)$ . Die rechte Seite ist als Durchschnitt dreier abgeschlossener Halbebenen konvex. Umgekehrt sieht man sofort aus dem Pasch'schen Axiom, daß jeder Punkt in  $PQR^+ \cap PRQ^+ \cap QRP^+$  im Inneren eines Intervalls  $[X, Y]$  liegt, wobei  $X, Y \in [PQ] \cup [PR] \cup [QR]$ .  $\text{conv}\{P, Q, R\}$  ist also das "Innere" des Dreiecks zusammen mit den Dreiecksseiten.

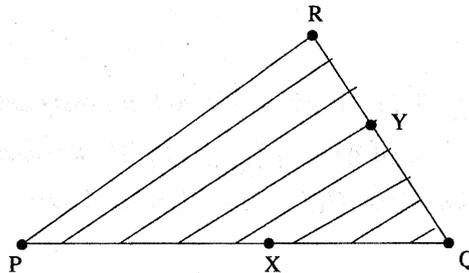


Abbildung 68: 6.1

Analog zur Unabhängigkeit von Mengen, die wir im Anschluß an die Abschlußdefinition in Kapitel 1 eingeführt haben, geben wir folgende Definition.

**Definition.** Sei  $A \subseteq \mathcal{P}$ .  $P$  heißt *konvex abhängig* von  $A$ , falls  $P \in \text{conv}(A)$ . Ein Punkt  $P$  einer konvexen Menge  $A$  heißt *Extremalpunkt* von  $A$ , falls  $P \notin \text{conv}(A - P)$ .  $\text{ext}(A)$  bezeichnet die Menge der Extremalpunkte von  $A$ .

$ext(A)$  ist also genau die Teilmenge von  $A$ , die in jedem konvexen Erzeugendensystem von  $A$  enthalten sein muß. Gilt insbesondere  $A = conv(extA)$  so ist  $ext(A)$  das eindeutige minimale konvexe Erzeugendensystem von  $A$ . Man beachte, daß  $ext(A) = \emptyset$  durchaus möglich ist, z.B. für jeden Unterraum der Dimension  $\geq 1$ , daß hier jeder Punkt zwischen zwei weiteren Punkten liegt (nach IV.2). Die abgeschlossene Kreisscheibe  $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$  ist in  $AG(\mathbb{R}^2)$  eine konvexe Menge, deren Extrempunkte genau die Randpunkte sind.

**Satz 6.2** Sei  $A$  konvex,  $P \in A$ .  $P$  ist Extrempunkt  $\iff A - P$  konvex  $\iff P$  liegt nicht im Inneren eines Intervalls  $[Q, R]$  mit  $Q, R \in A$ .

**Beweis.** Folgt unmittelbar aus der Definition.  $\square$

Seien  $P, Q, R$  nicht kollinear. Dann folgt aus 6.2 und unserer obigen Überlegung, daß  $P, Q, R$  genau die Extrempunkte von  $conv\{P, Q, R\}$  sind. In Verallgemeinerung dieses Beispiels nennen wir die konvexe Hülle endlich vieler Punkte ein konvexes Polyeder. Sie werden nach den nun folgenden allgemeinen Sätzen der Hauptgegenstand unserer Untersuchungen sein. Von nun an studieren wir den Raum  $AG_K(V)$  über einem geordneten Schiefkörper  $K$  mit der von  $K_<$  laut 4.13 (S. 84) induzierte Ordnung.  $A \subseteq AG_K(V)$  ist also genau dann konvex, wenn aus  $u, v \in A$  folgt  $\lambda u + (1 - \lambda)v \in A$  für alle  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

**Satz 6.3** Seien  $A, B$  konvexe Mengen in  $AG_K(V)$ . Dann gilt:

(i)  $A \pm B$  ist konvex.

(ii) Ist  $K$  kommutativ, so ist  $\lambda A$  konvex für jedes  $\lambda \in K$ .

(iii) Ist  $f \in \text{Aff}(V)$ , dann ist  $f(A)$  konvex.

**Beweis.** Wir zeigen iii). Sicherlich gilt die Aussage für jede Translation. Sei nun  $f \in \text{GL}(V)$ ,  $f(u), f(v) \in f(A)$ ,  $0 < \lambda < 1$ . Dann gilt  $\lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v) = f(\lambda u + (1 - \lambda)v) \in f(A)$ , da  $A$  konvex ist.  $\square$

Als nächstes wollen wir die konvexe Abhängigkeit algebraisch beschreiben.

**Satz 6.4** Sei  $\emptyset \neq A \subseteq V$ . Dann ist  $\text{conv}(A) = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : x_1, \dots, x_n \in A, \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1, n = 1, 2, \dots\}$ . Ist  $f \in \text{Aff}(V)$ , so gilt  $f(\text{conv}(A)) = \text{conv}(f(A))$ .

**Beweis.** Die rechte Seite ist konvex, denn  $\rho \sum \lambda_i x_i + (1 - \rho) \sum \mu_i x_i = \sum (\rho \lambda_i + (1 - \rho) \mu_i) x_i$  erfüllt  $\rho \lambda_i + (1 - \rho) \mu_i \geq 0$  und  $\sum (\rho \lambda_i + (1 - \rho) \mu_i) = 1$ , für  $0 \leq \rho \leq 1$ . Umgekehrt zeigen wir, daß jedes solche Element  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$  in  $\text{conv}(A)$  liegt. Für  $n = 2$  ist dies Gegenstand der Definition. Es sei bewiesen für  $k \leq n - 1$ . Sei  $\lambda_n \neq 1$ . Wegen  $1 - \lambda_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i$  ist dann nach Induktionsvoraussetzung  $y = (1 - \lambda_n)^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i \in A$ , also  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = (1 - \lambda_n)y + \lambda_n x_n \in A$ . Die letzte Behauptung ist nun klar.  $\square$

Die Ausdrücke  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ ,  $\sum \lambda_i$ ,  $\lambda_i \geq 0$  für alle  $i$ , heißen *konvexe Kombinationen* der  $x_i$ .  $\text{conv}(A)$  ist also die Gesamtheit der konvexen Kombinationen aus Elementen aus  $A$ . Der folgende Satz präzisiert 6.4 für endlich - dimensionale Räume.

**Satz 6.5** Der Raum  $\text{AG}_K(V)$  habe Dimension  $n$ . Sei  $A \subseteq V$ , dann ist jedes  $x \in \text{conv}(A)$  konvexe Kombination von  $p + 1$  Punkten aus  $A$  mit  $p \leq n$ .

**Beweis** Es sei  $x = \sum_{i=0}^p \lambda_i x_i$  eine konvexe Darstellung von  $x$  mittels Punkten aus  $A$ , welche eine minimale Anzahl  $p + 1$  von Punkten verwendet. Angenommen  $p > n$ . Dann sind  $x_0, \dots, x_p$  affin abhängig, also gibt es nach 1.12 (iii)  $\mu_i \in K$ , nicht alle  $= 0$ , mit  $\sum_{i=0}^p \mu_i x_i = 0, \sum_{i=0}^p \mu_i = 0$ . Wir wählen die Numerierung so, daß  $\mu_p > 0$  und  $\lambda_p \mu_p \leq \lambda_i \mu_i^{-1}$  für alle  $i$  mit  $\mu_i > 0$ . Setzen wir  $\nu_i = \lambda_i - (\lambda_p \mu_p^{-1}) \mu_i$ , so gilt  $\sum_{i=0}^p \nu_i = \sum_{i=0}^p \lambda_i - \lambda_p \mu_p^{-1} \sum_{i=0}^p \mu_i = 1$ . Ebenso gilt  $\nu_i \geq 0$  für alle  $i$ . Denn ist  $\mu_i \leq 0$ , so haben wir  $\nu_i = \lambda_i - (\lambda_p \mu_p^{-1}) \mu_i \geq \lambda_i \geq 0$  und ist  $\mu_i > 0$ , so gilt  $\nu_i = (\lambda_i \mu_i^{-1} - \lambda_p \mu_p^{-1}) \mu_i \geq 0$ . Schließlich haben wir  $x = \sum_{i=0}^p \lambda_i x_i = \sum_{i=0}^{p-1} (\lambda_i - (\lambda_p \mu_p^{-1}) \mu_i) x_i + \sum_{i=0}^{p-1} \nu_i x_i$ , also ist  $p$  nicht minimal, im Widerspruch zur Annahme.  $\square$

**Definition.** Ein *konvexes Polyeder* in  $AG_K(V)$  ist die konvexe Hülle von endlich vielen Punkten. Ein *konvexes  $d$ -Polyeder*  $S$  ist ein konvexes Polyeder mit  $\dim S = d$ .

Wir erklären auch  $\emptyset$  zu einem  $(-1)$ -Polyeder.  $0$ -Polyeder sind gerade einzelne Punkte. Die  $1$ -Polyeder sind offenbar alle abgeschlossenen Intervalle  $[a, b]$  auf Geraden.  $2$ -Polyeder heißen *Polygone*.

**Satz 6.6** *Es sei  $S$  konvexes Polyeder. Dann gilt  $S = \text{conv}(\text{ext } S)$ .  $\text{ext}(S)$  ist daher das eindeutige minimale konvexe Erzeugendensystem von  $S$ . Die Punkte von  $\text{ext}(S)$  heißen die Ecken des Polyeders.*

**Beweis.** Es sei  $\{p_1, \dots, p_k\}$  ein minimales konvexes Erzeugendensystem von  $S$ . Wir zeigen, daß jedes  $p_i$  Extrempunkt ist. Angenommen  $p_1 \notin \text{ext}(S)$ . Dann gibt es  $u, v \in S$  mit  $p_1 = \lambda u + (1 - \lambda)v, 0 < \lambda < 1$ . Es seien  $u = \sum \lambda_i p_i, v = \sum \mu_i p_i$  konvexe Darstellungen, wobei wegen  $u \neq p_1$  mindestens ein  $\lambda_i > 0$  ist für  $i \geq 2$ . Mit  $\nu_i = \lambda \lambda_i + (1 - \lambda) \mu_i$  gilt somit  $p_1 = \sum_{i=1}^k \nu_i p_i$ , wobei  $\nu_1 < 1$  da  $\nu_i > 0$  für ein  $i \geq 2$ . Daraus

folgt nun  $p_1 = (1 - \nu_1)^{-1} \sum_{i=2}^k \nu_i p_i$ , also ist  $p_1 \in \text{conv}\{p_2, \dots, p_k\}$ , d. h.  $S = \text{conv}\{p_2, \dots, p_k\}$ , im Widerspruch zur geforderten Minimalität.  $\square$

Nach diesen einfachen algebraischen Tatsachen wenden wir uns topologischen Fragen zu. Einige der folgenden Sätze erlauben zwar eine Verallgemeinerung auf beliebige Körper, doch würde der Mehraufwand zu sehr vom Thema ablenken. Wir beschränken uns für den Rest dieses Abschnittes auf den Vektorraum  $\mathbb{R}^n$ . Die Punkte werden wir wahlweise als Vektoren oder als  $n$ -Tupel repräsentieren. Wie wir in Kapitel 4 gesehen haben, kann die Topologie der  $\mathbb{R}^n$  auf 3 Arten eingeführt werden: als Ordnungstopologie mittels der Halbhyperebenen, als Intervalltopologie mittels der offenen Quader und als metrische Topologie mittels der Euklidischen Metrik  $d(x, y) := \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$ . Wir werden meist die letzte verwenden.  $\mathbb{R}^n$  ist ein zusammenhängender topologischer Raum. Das heißt, aus  $\mathbb{R}^n = A \cup B$  mit  $A, B$  offen folgt  $A = \emptyset$  oder  $B = \emptyset$ . Wie üblich setzen wir  $x \cdot y := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$  für  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$  und  $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ .  $x \cdot y$  ist ein inneres Produkt und es gilt  $d(x, y) = \|x - y\|$ . Wir erinnern an die bekannten Regeln.

**Satz 6.7** Seien  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt:

$$(i) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$(ii) \quad |x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$$

$$(iii) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Mit  $E_\rho(a) := \{x : \|x - a\| \leq \rho\}$  bezeichnen wir die abgeschlossene Kugel um  $a$  vom Radius  $\rho$ .  $E_\rho(a)$  ist konvex wie aus 6.7 sofort ersichtlich ist.  $E := E_1(0)$  bezeichnet die abgeschlossene Einheitskugel um 0.

**Satz 6.8** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex. Dann sind der Abschluß  $cl(A)$  und das Innere  $int(A)$  konvex. Schärfer: Ist  $x \in A, y \in int(A)$ , dann gilt  $]x, y[ \subseteq int(A)$ .

**Beweis.** Wir haben  $cl(A) = \bigcap_{\rho > 0} (A + \rho E)$ . Denn ist  $u \in cl(A)$ , so gilt  $E_\rho(u) \cap A \neq \emptyset$  für jedes  $\rho > 0$ , also existiert  $a \in A$  mit  $\|u - a\| \leq \rho$  d.h. es gilt  $u = a + \rho v$  mit  $a \in A, v \in E$ , also  $u \in \bigcap_{\rho > 0} (A + \rho E)$ . Die umgekehrte Inklusion ist ebenso einsichtig. Da  $\rho E$  konvex ist, ist auch  $A + \rho E$  konvex nach 6.3(i) und somit auch  $cl(A)$  nach 6.1(i). Sei  $x \in A, y \in int(A)$  mit  $y \in E_\rho(y) \subseteq A$  und  $z \in ]x, y[, z = \lambda x + (1 - \lambda)y, 0 < \lambda < 1$ . Wir müssen eine Kugel  $E_\sigma(z)$  um  $z$  finden, die ganz in  $A$  liegt. Wir wählen  $\sigma = \rho(1 - \lambda)$ . Sei  $u \in E_\sigma(z)$  und  $v = x + (1 - \lambda)^{-1}(u - x)$ . Aus  $y = x + (1 - \lambda)^{-1}(z - x)$  folgt  $v - y = (1 - \lambda)^{-1}(u - z)$ , also  $\|v - y\| = (1 - \lambda)^{-1}\|u - z\| \leq (1 - \lambda)^{-1}\sigma = \rho$ , somit  $v \in E_\rho(y) \subseteq A$ . Da  $A$  konvex ist und  $u \in ]x, y[$  folgt  $u \in A$ .  $\square$

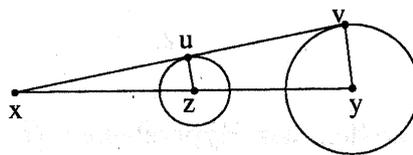


Abbildung 69:

**Satz 6.9** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Dann ist  $ext(A) \subseteq bd(A)$ .

**Beweis.** Wäre  $z \in ext(A) \cap int(A)$  mit  $E_\rho(z) \subseteq A$ , so wählen wir  $u \in E_\rho(z)$ ,  $u \neq z$ . Dann ist  $2z - u \in E_\rho(z) \subseteq A$  und  $z \in ]u, 2z - u[$ , was nicht geht, da  $z$  Extrempunkt ist.  $\square$

Wir kommen nun zu zwei wichtigen Hilfssätzen, die für das folgende unentbehrlich sein werden. Zuvor einige Definitionen.

**Definition.** Seien  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ . Wir sagen, die Hyperebene  $H$  *trennt* (*trennt strikt*) die Mengen  $A$  und  $B$ , falls  $A$  und  $B$  in verschiedenen abgeschlossenen (offenen) Halbhyperebenen, induziert von  $H$ , liegen. Sei  $A$  abgeschlossen. Wir sagen, die Hyperebene  $H$  ist eine Stützhyperebene, falls  $H \cap A \neq \emptyset$  und  $A$  ganz in einer der beiden abgeschlossenen Halbhyperebenen, induziert von  $H$ , liegt.

**Beispiel.**  $g$  und  $h$  sind Stützgeraden der gegebenen konvexen Menge  $S$ .

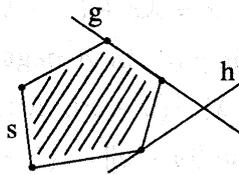


Abbildung 70:

So wie in Kapitel 4 stellen wir Hyperebenen  $H$  meist durch eine lineare Gleichung  $H = \{x : u \cdot x = \alpha\}$  dar, wobei dann die beiden offenen Halbhyperebenen durch  $H^+ = \{x : u \cdot x > \alpha\}$  und  $H^- = \{x : u \cdot x < \alpha\}$  gegeben sind. Sei  $g = a + \lambda u$  Gerade. Dann existiert eine eindeutige Hyperebene  $H$ , welche  $a$  enthält und auf  $g$  senkrecht steht, nämlich  $H = \{x : u \cdot x = \alpha\}$  mit  $\alpha = u \cdot a$ .

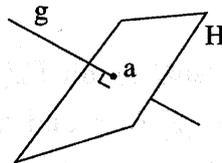


Abbildung 71:

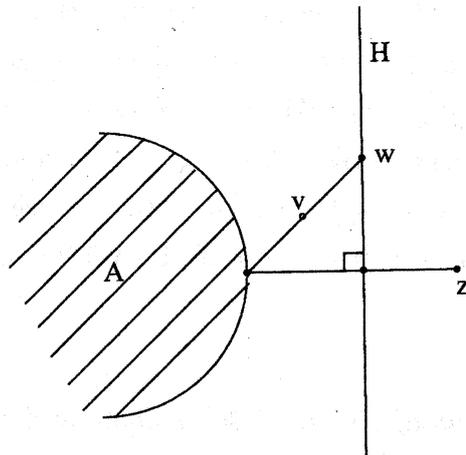


Abbildung 72:

**Satz 6.10 (Trennungslemma)** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex und abgeschlossen,  $z \notin A$ . Dann gibt es eine Hyperebene, die  $A$  und  $z$  strikt trennt.

**Beweis.** Da  $A$  abgeschlossen ist, ist  $\delta = \inf_{x \in A} d(x, z) > 0$ . Für  $\epsilon > 0$  setzen wir  $A_\epsilon = A \cap E_{\delta+\epsilon}(z)$ .  $A_\epsilon$  ist nicht leer und kompakt (= abgeschlossen und beschränkt) und wir haben  $A_\epsilon \subseteq A_{\epsilon'}$  für  $0 < \epsilon < \epsilon'$ . Also hat jede endliche Teilfamilie der  $A_\epsilon$ 's einen nichtleeren Durchschnitt und somit auch  $\bigcap_{\epsilon > 0} A_\epsilon$ . Für  $y \in \bigcap_{\epsilon > 0} A_\epsilon$  gilt dann  $d(y, z) = \delta$ .  $y$  ist eindeutig bestimmt, denn falls  $y_1 \in A, y_1 \neq y$  existiert mit  $d(y_1, z) = \delta$ , so hätten wir  $y_2 = \frac{1}{2}(y + y_1) \in A$  mit  $d(y_2, z)^2 = \|\frac{y+y_1}{2} - z\|^2 = (\frac{y+y_1}{2} - z) \cdot (\frac{y+y_1}{2} - z) = \frac{y \cdot y}{4} + \frac{y_1 \cdot y_1}{4} + z \cdot z - y \cdot z - y_1 \cdot z + \frac{y \cdot y_1}{2} = \frac{\|y-z\|^2}{2} + \frac{\|y_1-z\|^2}{2} - \frac{\|y-y_1\|^2}{4} = \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^2}{2} - \frac{\|y-y_1\|^2}{4} < \delta^2$ , also  $d(y_2, z) < \delta$ , Widerspruch.  $\square$

Anschaulich gesprochen konstruieren wir die gewünschte Hyperebene  $H$  als jene Hyperebene, welche durch  $\frac{y+z}{2}$  geht und senkrecht auf  $\overline{yz}$  steht, also  $H = \{x : (z-y) \cdot x = \alpha\}$  mit  $\alpha = (z-y) \cdot \frac{y+z}{2}$ .  $y$  und  $z$  liegen nach Konstruktion in verschiedenen Halbhyperebenen und es bleibt zu zeigen, daß  $A \cap H = \emptyset$ , da

wegen der Konvexität dann ganz  $A$  in derselben Halbhyperebene wie  $y$  liegen muß. Angenommen  $w \in H \cap A$  also  $(z - y) \cdot w = \alpha$ . Sei  $v = y + \lambda(w - y) \in A$  mit  $0 < \lambda < \min(\frac{\delta^2}{\|w - y\|^2}, 1)$ . Wegen  $\delta^2 = (z - y) \cdot (z - y) = 2(-(z - y) \cdot y)$  haben wir  $2\lambda((z - y) \cdot y - \alpha) + \lambda^2 w - y^2 < 0$ , somit  $v - z^2 = (y - z + \lambda(w - y)) \cdot (y - z + \lambda(w - y)) = \delta^2 + 2\lambda(y - z) \cdot (w - y) + \lambda^2 \|w - y\|^2 = \delta^2 + 2\lambda((z - y) \cdot y - \alpha) + \lambda^2 \|w - y\|^2 < \delta^2$ , im Widerspruch zur Definition von  $\delta$ .  $\square$

**Satz 6.11 (Stützlemma)** Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex und abgeschlossen und  $z \in \text{bd}(A)$ . Dann existiert eine Stützhyperebene an  $A$  durch  $z$ .

**Beweis.** Es sei  $z_1, z_2, \dots$  eine Folge aus  $\mathbb{R}^n - A$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z$ , d.h.  $\|z_k - z\| \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Nach 6.10 können wir zu jedem  $z_k$  eine Hyperebene  $H_k = \{x : u_k \cdot x = \alpha_k\}$  finden, welche  $A$  und  $z_k$  strikt trennt, wobei wir  $\|u_k\| = 1$  und  $u_k \cdot z_k < \alpha_k$ , somit  $A \subseteq \{x : u_k \cdot x > \alpha_k\}$  für alle  $k$  annehmen können. Aus  $\alpha_k < |u_k \cdot z| \leq \|z\|$  (6.7(ii)) folgt, daß die Folge  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$  nach oben beschränkt ist und aus  $\alpha_k > -|u_k \cdot z_k| \geq -\|z_k\| \geq -(\|z\| + \|z_k - z\|)$  wegen  $\|z_k - z\| \rightarrow 0$ , daß sie auch nach unten beschränkt ist.  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$  besitzt also eine konvergente Teilfolge, ebenso wie  $\{u_1, u_2, \dots\}$ , welche in der kompakten Menge  $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$  enthalten ist. Wir können also eine Teilfolge  $i_1, i_2, \dots$  finden mit  $\alpha_{i_k} \rightarrow \alpha$ ,  $u_{i_k} \rightarrow u$ , wobei  $\|u\| = 1$ . Die Hyperebene  $H = \{x : u \cdot x = \alpha\}$  ist nun eine gewünschte Stützhyperebene, denn für  $y \in A$  gilt  $u_{i_k} \cdot y > \alpha_{i_k}$  für alle  $k$ , also  $u \cdot y \geq \alpha$  und außerdem haben wir  $u_{i_k} \cdot z_{i_k} < \alpha_{i_k}$  für alle  $k$ , also  $u \cdot z \leq \alpha$ , d.h.  $z \in A$ .  $\square$

Wir können nun genauere topologische Aussagen über konvexe Mengen machen.

**Satz 6.12** Es sei  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$ .

- (i) Ist  $A$  konvex und abgeschlossen, so ist  $A$  der Durchschnitt aller  $A$  enthaltenden abgeschlossenen Halbhyperebenen.
- (ii) Ist  $A$  konvex, abgeschlossen und enthält  $A$  keine Geraden, so gilt  $\text{ext}(A) \neq \emptyset$ .
- (iii) Ist  $A$  konvex und kompakt, so ist  $A = \text{conv}(\text{ext}A)$ .
- (iv) Ist  $A$  kompakt, so auch  $\text{conv}(A)$ .
- (v) Sei  $A$  konvex, abgeschlossen und  $H$  eine Stützhyperebene an  $A$ . Dann gilt  $\text{ext}(A \cap H) = \text{ext}(A) \cap H$ . Außerdem ist  $A \cap H \subseteq \text{bd}(A)$ .

### Beweis

- (i) Klarerweise gilt  $A \subseteq \bigcap \text{cl}(H_i^+) = \bigcap (H_i \cup H_i^+)$ . Andererseits folgt aus 6.10 daß zu jedem  $z \notin A$  eine Hyperebene  $H$  existiert mit  $A \subseteq H^+$ ,  $z \notin H \cup H^+$ .
- (ii) Die Behauptung ist klar für  $\dim A = 0$  oder  $\dim A = 1$ , da dann  $A$  entweder ein Punkt oder ein abgeschlossenes Intervall bzw. eine abgeschlossene Halbgerade ist. Sie sei richtig für Dimension  $\leq n - 1$ . Sei  $z \notin \text{ext}(A)$ ,  $z \in ]a, b[ \subseteq A$  und  $g = \overline{ab}$ . Dann ist  $g \cap A$  abgeschlossen und konvex, aber nicht ganz  $g$ , also hat  $g \cap A$  mindestens einen Endpunkt  $u$ , wobei klarerweise  $u \in \text{bd}(A)$ . Nach 6.12 existiert eine Stützhyperebene  $H_u$  an  $A$  durch  $u$ . Die Menge  $A_u = H_u \cap A$  erfüllt nun die Voraussetzung des Satzes mit  $\dim A_u = \dim A - 1$ . Also gilt  $\text{ext}(A_u) \neq \emptyset$ . Jeder Extrempunkt  $x$  von  $A_u$  ist aber auch Extrempunkt von  $A$ , da ansonsten  $x \in ]x_1, x_2[$  mit  $p_1, p_2 \in A$  auf verschiedenen Seiten von  $H_u$ .
- (iii) wird mit demselben induktiven Schluß wie 6.12(ii) bewiesen.

(iv) nach 6.5 kann jedes  $x \in \text{conv}(A)$  als konvexe Kombination  $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i$ ,  $x_i \in A$ , dargestellt werden. Gilt also  $\|y\| \leq \rho$  für alle  $y \in A$ , so haben wir  $\|x\| \leq \sum \lambda_i \|x_i\| \leq \sum \lambda_i \rho = \rho$ .  $\text{conv}(A)$  ist also beschränkt. Es sei  $z \in \text{cl}(\text{conv}(A))$ . Dann existiert eine Folge  $z_1, z_2, \dots$  aus  $\text{conv}(A)$  mit  $z_k \rightarrow z$ . Seien  $z_k = \sum_{i=0}^n \lambda_{k,i} x_{k,i}$  konvexe Darstellungen der  $z_k$  mit  $x_{k,i} \in A$  für alle  $k$  und  $i$ . Aus der Kompaktheit von  $[0, 1]$  und  $A$  folgt für jedes  $i$  die Existenz konvergierender Teilfolgen  $\{\lambda_{k_j,i} : j = 1, \dots\}$ ,  $\{x_{k_j,i} : j = 1, \dots\}$ . Es seien  $\lambda^{(i)}, x^{(i)}$  die Limites. Dann gilt  $0 \leq \lambda^{(i)} \leq 1$  für jedes  $i$ ,  $\sum_{i=0}^n \lambda^{(i)} = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \lambda_{k_j,i} = \lim 1 = 1$ ,  $x^{(i)} \in A$ , und  $z = \lim_{j \rightarrow \infty} z_{k_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \lambda_{k_j,i} x_{k_j,i} = \sum_{i=0}^n \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_{k_j,i} x_{k_j,i} = \sum_{i=0}^n \lambda^{(i)} x^{(i)}$ , also  $z \in \text{conv}(A)$ .

(v) wurde schon beim Beweis von 6.12(ii) gezeigt. □

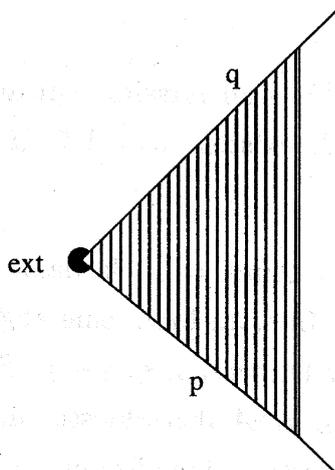


Abbildung 73:

**Beispiel.** Jede Menge  $\text{cl}(\text{Inn} \triangleleft (p, q))$  ist konvex abgeschlossen und enthält keine Geraden. Der einzige Extrempunkt ist der Scheitel. Ist  $A$  abgeschlossen, aber nicht beschränkt, so muß  $\text{conv}(A)$  nicht abgeschlossen sein. (Siehe Aufgabe 6)

Wir wenden uns nun den konvexen Polyedern zu. Wenden wir unsere bisherigen Ergebnisse an, so haben wir:

**Satz 6.13** Sei  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  konvexes Polyeder.

- (i)  $S$  ist kompakt und somit  $S = \text{conv}(\text{ext}(S))$ .
- (ii)  $S = \bigcap (H_i \cup H_i^+)$  über alle abgeschlossenen Halbhyperebenen, welche  $S$  enthalten.
- (iii) Sei  $H$  Stützhyperebene an  $S$ . Dann ist  $S \cup H$  konvexes Polyeder mit  $\text{ext}(S \cup H) = \text{ext}(S) \cup H$ .

Behauptung (ii) kann zu einer Charakterisierung konvexer Polyeder verschärft werden.

**Satz 6.14** *Es sei  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  beschränkt. Dann ist  $S$  ein konvexes Polyeder genau dann, wenn  $S$  Durchschnitt endlich vieler abgeschlossener Halbhyperebenen ist.*

**Beweis.** Es sei  $S = \bigcap_{i=1}^k (H_i \cup H_i^+)$ .  $S$  ist dann kompakt, also gilt  $S = \text{conv}(\text{ext}(S))$  und es bleibt zu zeigen, daß  $S$  nur endlich viele Extrempunkte enthält. Sei  $z \in \text{ext}(S)$ . Da  $z$  Randpunkt ist, muß  $z$  auf einigen Hyperebenen  $H_i$  liegen, z.B.  $H_1, \dots, H_h$ . Dann gilt  $\bigcap_{i=1}^h H_i = \{z\}$ . Denn angenommen  $y \in \bigcap_{i=1}^h H_i$ ,  $y \neq z$ . Die Gerade  $g = \overline{yz} \subseteq \bigcap_{i=1}^h H_i$  hat mit den Hyperebenen  $H_{h+1}, \dots, H_k$  höchstens einen Schnittpunkt gemeinsam. Unter diesen endlich vielen Schnittpunkten wählen wir jene zwei, die  $z$  auf  $g$  am nächsten liegen (oder jenen einen, falls alle Schnittpunkte auf einer Seite liegen). Jedenfalls ist  $z$  innerer Punkt eines Intervalles aus  $S$ , im Widerspruch zu  $z \in \text{ext}(S)$ . Da es nur endlich viele Kombinationen der  $H_i$  gibt, deren Durchschnitt ein Punkt ist, folgt, daß  $\text{ext}(S)$  endlich ist.

Es sei nun umgekehrt  $S$  ein konvexes Polyeder. Wir können annehmen, daß  $\dim \bar{S} = n$ , da wir ansonsten nur endlich viele abgeschlossene Halbhyperebenen  $H_i \cup H_i^+$ ,  $H_i \cup H_i^-$  mit  $\bar{S} = \bigcap H_i$  hinzuzufügen brauchen. Sei

$P = \{p_0, \dots, p_m\}$  die Eckenmenge von  $S$ , somit  $P = \text{ext}(S)$ .  $S$  enthält innere Punkte. Um dies zu sehen, wählen wir  $n + 1$  affin unabhängige Ecken, o.B.d.A. seien diese  $p_0, \dots, p_n$ . Wir behaupten, daß  $p = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n p_i \in \text{int}(S)$ . Sei  $H_i = \overline{\{p_0, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_n\}}$  und  $H_i^+$  jene offene Halbhyperebene, die  $p_i$  enthält,  $i = 0, \dots, n$ . Aus  $p = \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{n} \sum_{j \neq i} p_j \right) + \frac{1}{n+1} p_i$  folgt  $p \in \bigcap_{i=0}^n H_i^+$ . Andererseits ist  $H_i^+ = \{ \sum_{i=0}^n \lambda_i p_i : \sum \lambda_i = 1, \lambda_i > 0 \}$ , also  $\bigcap_{i=0}^n H_i^+ \subseteq \text{conv}\{p_0, \dots, p_n\} \subseteq S$ . Jede Stützhyperebene  $H$  an  $S$  schneidet  $S$  in einem konvexen Polyeder  $S \cap H$  mit  $\text{ext}(S \cap H) = P \cap H$ . Da  $P$  endlich ist, gibt es also nur endlich viele solche Polyeder  $S \cap H$ . Es seien  $F_1, \dots, F_k$  die maximalen unter ihnen, wobei stets  $\dim \overline{F_i} \leq n - 1$ .  $H_1, \dots, H_k$  seien zugehörige Stützhyperebenen mit  $S \subseteq H_i \cup H_i^+, i = 1, \dots, k$ .

Behauptung:  $S = \bigcap_{i=1}^k (H_i \cup H_i^+)$ . Es sei  $z \notin S$ , dann müssen wir  $H_j$  finden mit  $z \notin H_j \cup H_j^+$ .  $L$  bezeichnet die Menge aller affinen Kombinationen von höchstens  $n - 1$  Ecken von  $S$ , das heißt  $L = \bigcup_{A \subseteq P, |A| \leq n-1} \overline{A}$ . Nach 6.5 gilt  $L \supseteq \bigcup_{A \subseteq P, \dim \overline{A} \leq n-2} \text{conv}(A)$ .  $M$  sei der „Kegel“ aufgespannt von  $L$  mit Spitze  $z$ , das heißt  $M = \bigcup_{x \in L} zx^+$ , wobei wie üblich  $zx^+$  die Halbgerade mit Scheitel  $z$  bezeichnet, welche  $x$  enthält. Nach Konstruktion von  $L$  ist  $M$  enthalten in der Vereinigung endlich vieler Hyperebenen.

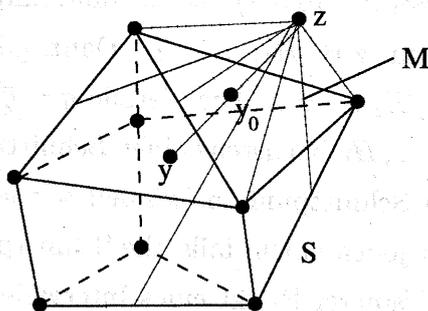


Abbildung 74:

Da eine solche Vereinigung niemals eine nichtleere offene Menge enthält (man

betrachte eine offene Kugel  $K$  mit Radius  $\varepsilon$  und  $\ell$  Hyperebenen, dann ist es leicht,  $v \in K$  zu finden, das auf keiner der Hyperebenen liegt), folgern wir  $\text{int}(S) \not\subseteq M$ . Es sei  $y \in \text{int}(S) - M$ . Dann haben wir  $yz^+ \cap S = [y, y_0]$  mit  $y_0 \in \text{bd}(S)$ , insbesondere also  $y_0 \in ]y, z[$ . Es sei  $N$  eine Stützhyperebene an  $S$  durch  $y_0$ ,  $F = S \cap N$  mit  $F = \text{conv}(P_0)$ ,  $P_0 = P \cap N$ . Aus  $y \notin M$  folgt  $y_0 \notin L$ , also  $\dim \bar{F} \geq \dim \bar{P}_0 \geq n - 1$ , somit  $\dim \bar{F} = n - 1$ , das heißt  $F = F_j$  für ein  $j$ . Ferner ist laut 6.12(v)  $F \subseteq \text{bd}(S)$ , also  $y \notin N$ ,  $z \notin N$  und  $y, z$  liegen auf verschiedenen Seiten von  $H_j$ , das heißt  $z \notin H_j \cup H_j^+$ .  $\square$

Aus 6.14 können wir einige unmittelbare Folgerungen ziehen:

**Satz 6.15** Seien  $S_1, \dots, S_k$  konvexe Polyeder in  $\mathbb{R}^n$ . Dann sind  $\bigcap_{i=1}^k S_i$ ,  $\sum_{i=1}^k S_i$  und  $\text{conv}(\bigcup_{i=1}^k S_i)$  konvexe Polyeder. Der Durchschnitt eines konvexen Polyeders mit einem Unterraum ist ein konvexes Polyeder. Das affine Bild eines konvexen Polyeders ist ein konvexes Polyeder.

### Beispiele.

- a. **Simplices:** Ein  $d$ -Simplex in  $\mathbb{R}^n$  ist definiert als die konvexe Hülle von  $d+1$  unabhängigen Punkten. Da je zwei  $(d+1)$ -Tupel von unabhängigen Punkten durch eine Affinität ineinander übergeführt werden können, folgt aus 6.4, daß je zwei  $d$ -Simplices affine Bilder voneinander sind. Figur 6.8 zeigt die  $d$ -Simplices für  $d = 0, 1, 2, 3$ .

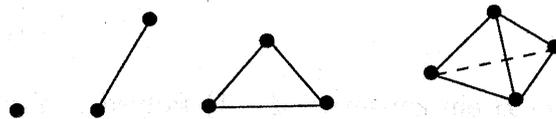


Abbildung 75:

- b. Pyramiden:** Die konvexe Hülle eines  $(d - 1)$ -dimensionalen konvexen Polyeders  $B$  und eines Punktes  $a \notin \overline{B}$  heißt eine  $d$ -Pyramide mit Basis  $B$  und Spitze  $a$ .

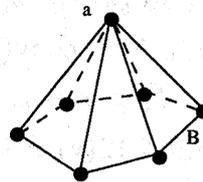


Abbildung 76:

- c. Doppelpyramiden:** Sei  $B$  ein konvexes  $(d - 1)$ -Polyeder und  $[a, b]$  ein Intervall mit  $[a, b] \cap B = \{c\}$ , wobei  $c \in ]a, b[$  und  $c \in \text{int}(B)$  (bezogen auf  $\overline{B}$ ). Die konvexe Hülle  $\text{conv}(B \cup [a, b])$  heißt eine  $d$ -Doppelpyramide mit Basis  $B$ .

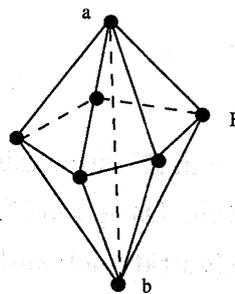


Abbildung 77:

- d. Prismen:** Sei  $B$  ein konvexes  $(d - 1)$ -Polyeder,  $g = \overline{0v}$  eine Gerade, die nicht parallel zu  $B$  ist. Die Vektorsumme  $B + [0, v]$  heißt ein  $d$ -Prisma mit Basis  $B$ . Offensichtlich gilt  $B + [0, v] = \text{conv}(B, B + v)$ .

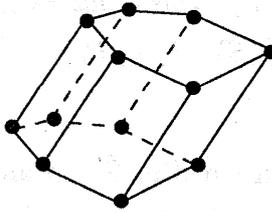


Abbildung 78:

Wir versuchen nun, mit Hilfe der Stützhyperebenen einen genaueren Überblick über beliebige konvexe Polyeder zu gewinnen.

**Definition.** Sei  $S$  ein konvexes Polyeder in  $\mathbb{R}^n$ .  $F \subseteq S$  heißt eine *Seite* von  $S$ , falls  $F = \emptyset$  oder  $F = S$  oder falls eine Stützhyperebene  $H$  an  $S$  existiert mit  $F = S \cap H$ .  $\emptyset$  und  $S$  heißen die *uneigentlichen Seiten*, alle anderen *eigentliche Seiten*. Die maximalen Seiten  $\neq S$  heißen die *Seitenflächen* von  $S$ . Eine Seite  $F$  heißt eine *k-Seite*, falls  $\dim \overline{F} = k$ . Die Menge aller Seiten von  $S$  wird mit  $\mathcal{F}(S)$  bezeichnet.

**Satz 6.16** Sei  $S$  konvexes Polyeder.

- (i) Für  $F \in \mathcal{F}(S)$  gilt  $\text{ext}(F) = \text{ext}(S) \cap F$  und  $F = \text{conv}(\text{ext}F)$ .
- (ii) Es gibt nur endlich viele Seiten.
- (iii) Sei  $F_1, \dots, F_\ell \in \mathcal{F}(S)$ , dann ist  $\bigcap_{i=1}^{\ell} F_i \in \mathcal{F}(S)$ .
- (iv)  $\mathcal{F}(S)$  bildet mit der Inklusion einen Verband.
- (v) Die Ecken sind die einpunktigen Seiten.
- (vi)  $\text{bd}(S) = \bigcup_{i=1}^k F_i$ , wobei  $F_1, \dots, F_k$  die Seitenflächen sind.

(vii) Sei  $F_1 \in \mathcal{F}(S)$ ,  $F_2 \subseteq F_1$ . Dann gilt  $F_2 \in \mathcal{F}(S) \Leftrightarrow F_2 \in \mathcal{F}(F_1)$ . Es ist also  $\mathcal{F}(F_1) = \{F_2 \in \mathcal{F}(S) : F_2 \subseteq F_1\}$ .

**Beweis.** O.B.d.A. nehmen wir  $\dim \bar{S} = n$  an.

(i) haben wir schon in 6.12(v) gesehen.

(ii) ist eine unmittelbare Folgerung von (i).

(iii) Ist  $\bigcap_{i=1}^{\ell} F_i = \emptyset$ , so ist nichts zu zeigen. Sei  $v \in \bigcap_{i=1}^{\ell} F_i$  und  $H_i = \{x : u_i \cdot x = \alpha_i\} = \{x : u_i \cdot (x - v) = 0\}$  Stützhyperebene mit  $F_i = S \subseteq H_i$ , wobei wir o.B.d.A.  $S \subseteq \{x : u_i \cdot (x - v) \geq 0\}$  annehmen können, für  $i = 1, \dots, \ell$ . Es sei  $H = \{x : u \cdot (x - v) = 0\}$  mit  $u = \sum_{i=1}^{\ell} u_i$ . Da für  $z \in S - \bigcap_{i=1}^{\ell} F_i$   $u_i \cdot (z - v) > 0$  für mindestens ein  $i$  gilt, ist  $u \cdot (z - v) > 0$ , also insbesondere  $u \neq 0$ , d.h.  $H$  ist eine Hyperebene. Wir haben nun  $S \subseteq \{x : u \cdot (x - v) \geq 0\}$  und  $v \in H$ , also ist  $H$  eine Stützhyperebene an  $S$ . Sei  $y \in \bigcap_{i=1}^{\ell} F_i$ , dann ist  $u \cdot (y - v) = \sum_{i=1}^{\ell} u_i \cdot (y - v) = 0$ , also  $y \in S \cap H$ . Ist andererseits  $y \in S - F_i$  für ein  $i$ , so folgt  $u_i \cdot (y - v) > 0$ , und somit  $u \cdot (y - v) > 0$ , d.h.  $y \notin S \cap H$ . Wir haben somit  $\bigcap_{i=1}^{\ell} F_i = S \cap H \in \mathcal{F}(S)$ .

iv) Ist eine direkte Folgerung von iii).

v) Ist  $H$  eine Stützhyperebene an  $S$  mit  $S \cap H = \{p\}$ , so kann  $p$  nicht im Innern eines Intervalles aus  $S$  liegen, also  $p \in \text{ext}(S)$ . Es seien  $F_1, \dots, F_k$  die Seitenflächen mit zugehörigen Stützhyperebenen  $H_1, \dots, H_k$ . Im Beweis von 6.13 haben wir gesehen, daß  $S = \bigcap_{i=1}^k (H_i \cup H_i^+)$ . Ein Punkt  $p \in \text{ext}(S)$  liegt, da er Randpunkt ist, auf einigen der  $H_i$ 's, z.B.  $H_1, \dots, H_h$ . Dann gilt aber nach dem ersten Teil des Beweises in 6.13  $\{p\} = \bigcap_{i=1}^h H_i = \bigcap_{i=1}^h F_i$ , also  $\{p\} \in \mathcal{F}(S)$  nach iii).

vi) Nach 6.12(v) ist  $\bigcap_{i=1}^k F_i \subseteq \text{bd}(S)$ . Umgekehrt geht durch jeden Randpunkt eine Stützhyperebene, also gilt auch die umgekehrte Inklusion.

vii) Seien  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(S)$  mit  $\emptyset \neq F_2 \subsetneq F_1 \neq S$ . Dann gilt  $F_1 = S \cap H_1$ ,  $F_2 = S \cap H_2$  für zwei Stützhyperebenen  $H_1, H_2$  an  $S$ , also  $F_2 = F_1 \cap H_2 = F_1 \cap (\bar{F}_1 \cap H_2)$ . Nach der Dimensionsgleichung 1.13(iii)

folgt  $\dim(\overline{F_1} \cap H_2) = \dim \overline{F_1} - 1$ , also ist  $\overline{F_1} \cap H_2$  Hyperebene in  $\overline{F_1}$ . Wäre nun  $u, v \in F_1$  in verschiedenen Halbräumen von  $\overline{F_1} \cap H_2$  bezüglich  $\overline{F_1}$  und  $w \in ]u, v[ \cap (\overline{F_1} \cap H_2)$ , so hätten wir  $u, v \in S, w \in H_2$ , was nicht geht, da  $H_2$  Stützhyperebene an  $S$  ist. Also ist  $\overline{F_1} \cap H_2$  in  $\overline{F_1}$  Stützhyperebene an  $F_1$ , d.h.  $F_2 \in \mathcal{F}(F_1)$ . Umgekehrt seien  $F_1 \in \mathcal{F}(S), F_2 \in \mathcal{F}(F_1)$  mit  $\emptyset \neq F_2 \subsetneq F_1 \neq S, v \in F_2$ . Nach i) gilt  $\text{ext}(F_2) \subseteq \text{ext}(F_1) \subseteq \text{ext}(S)$  und  $F_2 = \text{conv}(\text{ext}F_2)$ .  $H_1 = \{x : u_1 \cdot (x - v) = 0\}$  sei Stützhyperebene an  $S$  mit  $F_1 = S \cap H_1$  und  $S \subseteq \{x : u_1 \cdot (x - v) \geq 0\}$ ,  $H_2 = \{x \in \overline{F_1} : u_2 \cdot (x - v) = 0\}$  sei Stützhyperebene in  $\overline{F_1}$  mit  $F_2 = F_1 \cap H_2$  und  $F_1 \subseteq \{x \in \overline{F_1} : u_2 \cdot (x - v) \geq 0\}$ . Sei  $\alpha := \max(|u_2 \cdot (p - v)| : p \in \text{ext}(S) - \text{ext}(F_1)), \beta := \min(u_1 \cdot (p - v) : p \in \text{ext}(S) - \text{ext}(F_1))$  und  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  mit  $0 < \varepsilon < \frac{\beta}{\alpha}$  (oder  $\varepsilon > 0$ , falls  $\alpha = 0$ ). Wir definieren die Hyperebene  $H(\varepsilon) = \{x : (u_1 + \varepsilon u_2) \cdot (x - v) = 0\}$  und behaupten  $H(\varepsilon)$  ist Stützhyperebene an  $S$  mit  $F_2 = S \cap H(\varepsilon)$ . Zunächst haben wir  $F_2 \subseteq H_2 \subseteq H(\varepsilon)$ , also  $F_2 \subseteq S \cap H(\varepsilon)$ , da für  $z \in H_2$  gilt  $H_2 \subseteq H_1$ , also  $(u_1 + \varepsilon u_2) \cdot (z - v) = u_1 \cdot (z - v) + \varepsilon u_2 \cdot (z - v) = 0$ . Sei  $p \in \text{ext}(S) - \text{ext}(F_1)$ . Dann ist  $(u_1 + \varepsilon u_2) \cdot (p - v) \geq \beta - \varepsilon \alpha > 0$ . Sei  $p \in \text{ext}(F_1) - \text{ext}(F_2)$ .

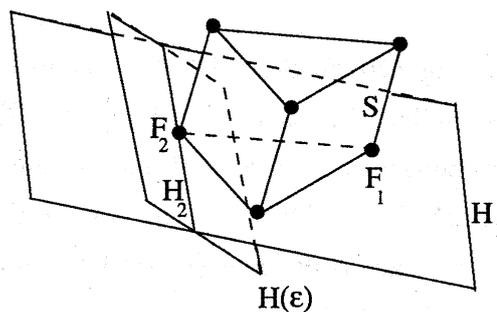


Abbildung 79:

Dann ist  $(u_1 + \varepsilon u_2) \cdot (p - v) = \varepsilon u_2 \cdot (p - v) > 0$ . Für  $p \in \text{ext}(F_2)$  ist  $(u_1 + \varepsilon u_2) \cdot (p - v) = 0$  wie gesehen. Da  $H(\varepsilon) \cup H(\varepsilon)^+$  konvex ist, erhalten wir  $S = \text{conv}(\text{ext}(S)) \subseteq H(\varepsilon) \cup H(\varepsilon)^+$ , d.h.  $H(\varepsilon)$  ist Stützhyperebene an  $S$ .

Ist nun  $z = \sum \lambda_i p_i \in S \cap H(\varepsilon)$  konvexe Kombination aus  $\text{ext}(S)$ , so haben wir  $0 = (u_1 + \varepsilon u_2) \cdot \sum \lambda_i (p_i - v) = \sum \lambda_i (u_1 + \varepsilon u_2) \cdot (p_i - v)$ , d.h. es muß  $(u_1 + \varepsilon u_2) \cdot (p_i - v) = 0$  sein für alle  $\lambda_i > 0$  also  $p_i \in \text{ext}(F_2)$  und daher  $z \in F_2$ .  
□

**Definition.** Sei  $S \in \mathbb{R}^n$  ein konvexes  $d$ -Polyeder. Mit  $f_k(S)$  bezeichnen wir die Anzahl der  $k$ -Seiten von  $S$ ,  $k = -1, 0, 1, \dots, d$ . Die 0-Seiten sind also die *Ecken* von  $S$  (nach Satz 6.16 (v)), die 1-Seiten heißen die *Kanten* von  $S$ . Im Fall  $d = 3$  heißen die 2-Seiten die *Flächen* von  $S$ .

Es ist also stets

$$f_{-1}(S) = f_d(S) = 1 \text{ und } f_k(S) \leq \binom{f_0(S)}{k+1}$$

, da jede  $k$ -Seite  $k+1$  unabhängige Punkte aus  $\text{ext}(S)$  enthält und verschiedene Seiten verschiedene affine Hüllen haben.

**Beispiele.**

- a) *Simplices.* Jede eigentliche Seite ist die konvexe Hülle von Punkten aus  $\text{ext}(S)$ , also selbst Simplex. Ist  $A \subseteq \text{ext}(S)$ ,  $|A| = d$ , so ist  $\bar{A}$  eine Stützhyperebene mit  $A = S \cap \bar{A}$ , also ist die konvexe Hülle jeder  $d$ -Untermenge auch Seite. Durch Induktion und Satz 6.16 (vii) folgt daraus, daß die konvexe Hülle jeder  $(k+1)$ -Untermenge von  $\text{ext}(S)$  eine  $k$ -Seite von  $S$  ist, also daß

$$f_k(S) = \binom{d+1}{k+1} \quad \text{für } k = -1, 0, 1, \dots, d.$$

- b) *Pyramiden.* Sei  $S$  eine  $d$ -Pyramide mit Basis  $B$ . Aus der Definition berechnet man leicht

$$f_k(S) = f_k(B) + f_{k-1}(B) \quad \text{für } k = -1, 0, \dots, d.$$

Aus Figur ?? ersehen wir zum Beispiel

$$f_0(S) = 6 + 1 = 7, f_1(S) = 6 + 6 = 12, f_2(S) = 1 + 6 = 7.$$

c) *Würfel*. Sei  $W$  der Würfel. Dann haben wir  $f_0 = 8, f_1 = 12, f_2 = 6$ .

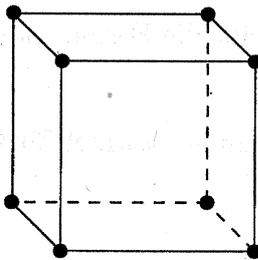


Abbildung 80: Würfel

Einer der schönsten Sätze in der Theorie der konvexen Polyeder ist die Eulersche Polyederformel:

**Satz 6.17** *Sei  $S$  ein konvexes  $d$ -Polyeder. Dann gilt*

$$\sum_{k=-1}^d (-1)^k f_k(S) = 0.$$

**Beweis** Wir werden die Formel für  $d \leq 3$  beweisen.

- $d = 0$ .  $S$  ist ein einzelner Punkt, also ist  $-f_{-1} + f_0 = -1 + 1 = 0$ .
- $d = 1$ .  $S$  ist ein abgeschlossenes Intervall auf einer Geraden.  
Also  $-f_{-1} + f_0 - f_1 = -1 + 2 - 1 = 0$ .

- $d = 2$ .  $S$  ist ein Polygon. Jede der  $f_0$  Ecken ist in mindestens zwei Kanten enthalten, andererseits aber auch in höchstens zwei Kanten, da von drei Kanten eine in der Mitte wäre, die zugehörige Gerade also keine Stützgerade sein könnte. Also ist jede Ecke in genau zwei Kanten enthalten und umgekehrt enthält jede Kante genau zwei Ecken, d.h.  $f_0 = f_1$  und somit  $-f_{-1} + f_0 - f_1 + f_2 = -1 + f_0 - f_0 + 1 = 0$ .
- $d = 3$ . Im Fall  $d = 3$  heißt die Formel  $f_0 - f_1 + f_2 = 2$ .

Wir wollen eine etwas allgemeinere Formel für Graphen beweisen.

Zunächst einige

**Definitionen.** Ein *Graph* ist ein Paar  $(E, K)$  bestehend aus einer endlichen Menge  $E$  (deren Elemente *Ecken* heißen) zusammen mit einer Untermenge  $K = \{\{v_i, v_j\} : v_i, v_j \in E\}$  von Eckenpaaren (deren Elemente wir *Kanten* nennen). Gilt  $k = \{v_i, v_j\}$ , so sagen wir  $v_i, v_j$  sind *inzident* mit  $k$  und  $v_i, v_j$  sind *benachbart*. Die Anzahl  $\gamma(v_i) := |\{v_j : \{v_i, v_j\} \in K\}|$  vom Nachbarn von  $v_i$  heißt der *Grad* von  $v_i$ . Eine Folge  $v_0, v_1, \dots, v_k$  mit  $\{v_{i-1}, v_i\} \in K$  für  $i = 1, \dots, k$  heißt ein *Weg*, gilt  $v_0 = v_k$  und sind alle  $v_i$  ansonsten verschieden, so sprechen wir von einem *Kreis*. Der Graph heißt *zusammenhängend*, falls je zwei Ecken  $v, w$  durch einen Weg  $v = v_0, v_1, \dots, v_k = w$  verbunden sind.

Im Graph von der nachfolgenden ist z.B.  $\gamma(u) = \gamma(v) = \gamma(w) = 3, \gamma(x) = 4$ .  $\{u, v, w, x\}$  ist ein Kreis.

Für unsere Zwecke interessieren wir uns für die Teilfamilie der ebenen Graphen. Ein Graph  $(E, K)$  heißt *eben*, falls  $(E, K)$  so in  $\mathbb{R}^2$  eingebettet ist - Ecken als Punkte, Kanten als Jordan'sche Kurven - daß Kanten einander nur in den zugehörigen Eckpunkten treffen. Die kleinsten zusammenhängenden Stücke, in die die Ebene durch  $(E, K)$  zerlegt wird, heißen die *Regionen*

(inklusive die äußere) von  $(E, K)$ .

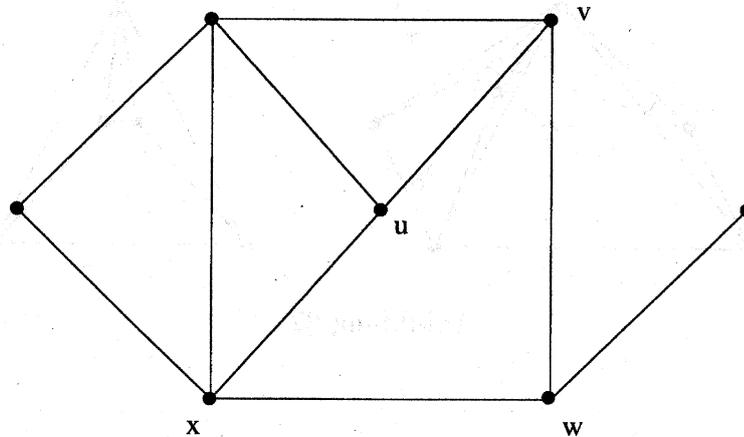


Abbildung 81:

Der Graph aus obiger Abbildung ist eben und hat fünf Regionen, sieben Ecken und zehn Kanten.

Wie hängen nun 3-Polyeder mit ebenen Graphen zusammen? Sei  $S$  ein konvexes 3-Polyeder,  $F_0$  eine Seitenfläche. Wir wählen  $v \notin S$  so, daß von allen affinen Hüllen von Seitenflächen nur  $\overline{F_0}$  den Polyeder  $S$  von  $v$  trennt. Daß so ein  $v$  existiert, sieht man folgendermaßen. Es seien  $H_i = \{x : u_i(x - a_i) = 0\}$  die Stützhyperebenen an  $S$  mit  $F_i = S \cap H_i$  und  $S \subseteq \{x : u_i(x - a_i) \geq 0\}$ ,  $\|u_i\| = 1$ , für alle  $i$ , wobei  $F_i$  alle Seitenflächen  $\neq F_0$  durchläuft. Ist  $w \in \text{int}(F_0)$  (bezogen auf  $\overline{F_0}$ ), so gilt  $\varepsilon_i = u_i(w - a_i) > 0$  für alle  $i$ . Wir wählen  $v \notin S$  auf der anderen Seite von  $\overline{F_0}$  mit  $\|v - w\| < \varepsilon = \min \varepsilon_i$ . Dann haben wir  $u_i(v - a_i) = u_i(w - a_i) - u_i(w - v) \geq \varepsilon - \|w - v\| > 0$  für alle  $i$ . Es seien  $E, K$  und  $F$  die 0, 1, 2-Seiten von  $S, v$  gewählt wie angegeben und  $\text{relint}(F_0)$  das Innere von  $F_0$  bezogen auf  $\overline{F_0}$ . Es sei  $\varphi$  die Projektion von  $\text{bd}(S) - \text{relint}(F_0)$  vom Zentrum  $v$  aus auf  $F_0$ , also  $\varphi(x) = vx^+ \cap F_0$ . Das

Tripel  $(\varphi(E), \varphi(K), \varphi(F))$  heißt ein *Schlegeldiagramm* von  $S$  bezüglich  $F_0$ .

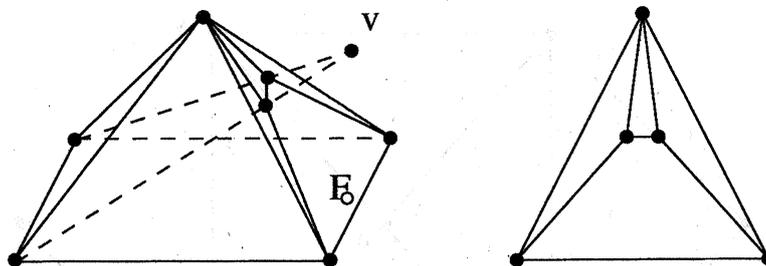


Abbildung 82:

**Satz 6.18** *Es sei  $S$  ein konvexes 3-Polyeder und  $V, K, F$ , die Mengen der Ecken, Kanten und Flächen von  $S$ . Ein Schlegeldiagramm bezüglich einer Fläche  $F_0$  ist ein zusammenhängender ebener Graph  $(\varphi(E), \varphi(K))$ , dessen Ecken, Kanten und Regionen bijektiv den Ecken, Kanten und Flächen von  $S$  entsprechen (wobei  $F_0$  der äußeren Region entspricht).*

**Beweis.** Sei  $x \in \text{bd}(S) - F_0$ .  $vx^+ \cap S$  ist konvex abgeschlossen, also  $vx^+ \cap S = [x, w], w \in [x, w], w \in \text{bd}(S)$ , d.h.  $w \in F_0$  nach Voraussetzung über  $v$ . Also existiert  $\varphi(x)$  für alle  $x$ .  $\varphi$  ist klarerweise bijektiv.  $\varphi$  erhält die Kollinearität und Ordnung, denn sei  $[x, y] \subseteq \text{bd}(S) - F_0$ , dann ist  $\varphi[x, y] = \text{conv}(v, x, y) \cap F_0$  ein konvexes Polyeder, d.h.  $\varphi[x, y] = [\varphi(x), \varphi(y)]$ . Insbesondere führt also  $\varphi$  Ecken in Ecken (auf  $F_0$ ) und Kanten in Kanten (auf  $F_0$ ) über, die sich wegen der Bijektivität von  $\varphi$  nur an den Ecken treffen.  $(\varphi(E), \varphi(K))$  ist somit ein ebener Graph. Ist  $F_i \neq F_0$  eine Fläche, so haben wir  $\varphi(F_i) = \text{conv}(F_i \cup v) \cap F_0$ .  $\varphi(F_i)$  ist also ein konvexes Polygon in  $F_0$ , d.h. eine Region von  $(\varphi(E), \varphi(K))$ . Ist umgekehrt  $w \in F_0$  ein Punkt, der auf keiner Kante aus  $\varphi(K)$  liegt, so ist  $\varphi^{-1}(w) \in \text{int}(F_i)$  für ein  $F_i \neq F_0$

(bezogen auf  $\overline{F_i}$ ). Also liegt  $w$  in der Region  $\varphi(F_i)$ , d.h. die Regionen von  $(\varphi(E), \varphi(K))$  entsprechen bijektiv den Flächen  $F_i \neq F_0$  und bedecken  $F_0$ . Aus diesem letzten ist nun auch klar, daß  $(\varphi(E), \varphi(K))$  zusammenhängend ist.  $\square$

Die Euler'sche Formel wird nun aus dem folgenden Graphensatz folgen.

**Satz 6.19** *Sei  $(E, K)$  ein zusammenhängender ebener Graph und  $f_0, f_1, f_2$  die Anzahl der Ecken, Kanten bzw. Regionen. Dann gilt  $f_0 - f_1 + f_2 = 2$ .*

**Beweis.** Sei  $|E| = f_0$ . Wir führen Induktion nach der Anzahl der Regionen. Ist  $f_2 = 1$ , dann enthält  $(E, K)$  keinen Kreis und es muß daher eine Ecke  $a$  geben mit  $\gamma(a) = 1$  (denn ansonsten könnten wir aus jeder Ecke wieder herausgehen und müßten wegen der Endlichkeit von  $E$  letztlich einen Kreis produzieren). Lassen wir  $a$  und die indizierende Kante weg, so entsteht wieder ein kreisloser zusammenhängender Graph mit  $f_0' = f_0 - 1, f_1' = f_1 - 1, f_2' = 1$ . Nach  $f_0 - 1$  Schritten bleibt eine einzelne Ecke übrig, das heißt  $1 = f_0 - (f_0 - 1), 0 = f_1 - (f_0 - 1)$ , also  $f_0 = f_1 + 1$  und somit  $f_0 - f_1 + f_2 = 2$ . Es sei nun  $f_2 \geq 2$  und  $k$  eine Kante, die auf einem Kreis liegt. Entfernen wir  $k$ , so ist der neue Graph nach wie vor zusammenhängend mit  $f_0' = f_0, f_1' = f_1 - 1, f_2' = f_2 - 1$ , da die zwei an  $k$  angrenzenden Regionen verschmolzen wurden. Nach Induktion haben wir somit  $f_0 - f_1 + f_2 = f_0' - f_1' + f_2' = 2$ .  $\square$

**Satz 6.20** *Sei  $S$  ein konvexes 3-Polyeder mit  $f_i$   $i$ -Seiten,  $i = 0, 1, 2$ . Dann gilt  $f_0 - f_1 + f_2 = 2$*

Zum Abschluß wollen wir noch einige reguläre Figuren studieren. Es sei  $S$  ein konvexes 3-Polyeder mit  $f_0, f_1$  bzw.  $f_2$  Ecken, Kanten bzw. Flächen. Die Ecke  $v_i$  sei in  $\gamma(v_i)$  Kanten enthalten,  $i = 1, \dots, f_0$ . Da jede Ecke Durchschnitt von Flächen ist, muß  $\gamma(v_i) \geq 3$  sein. Da jede Kante genau 2 Ecken

enthält, erhalten wir die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{f_0} \gamma(v_i) = 2f_1$$

Die Fläche  $F$  enthalte  $\rho(F_i)$  Kanten (wie auch Ecken). Es ist natürlich  $\rho(F_i) \geq 3$ . Da jede Kante in genau 2 Flächen enthalten ist (dies sieht man z.B. mit Hilfe des Schlegel Diagrammes), so erhalten wir eine weitere Gleichung

$$\sum_{i=1}^{f_2} \rho(F_i) = 2f_1.$$

Zusammen mit der Euler Formel können diese Relationen zur näheren Bestimmung der  $f_i$ 's benutzt werden. Als Beispiel beweisen wir den folgenden Satz über reguläre Polyeder.

**Satz 6.21** *Es sei  $S$  ein konvexes 3-Polyeder mit  $\gamma(v_i) = p$  für alle Ecken  $v$  und  $\rho(F_j) = q$  für alle Flächen. Dann sind für  $f_0, f_1, f_2, p, q$  nur folgende Werte möglich:*

$f_0$	$f_1$	$f_2$	$p$	$q$	
4	6	4	3	3	Tetraeder
6	12	8	4	3	Oktaeder
8	12	6	3	4	Würfel
12	30	20	5	3	Ikosaeder
20	30	12	3	5	Dodekaeder

**Beweis.** Aus  $pf_0 = 2f_1 = qf_2$  folgt  $pf_0 = \frac{f_0 - f_1 + f_2}{\frac{1}{p} - \frac{1}{2} + \frac{1}{q}} = \frac{4pq}{2(p+q) - pq}$ . Da  $2(p+q) - pq > 0$  sein muß haben wir  $(p-2)(q-2) < 4$ . Daraus errechnen sich nun sofort die angegebenen Werte.  $\square$

Eine Realisierung dieser 5 möglichen  $(f_0, f_1, f_2)$ -Vektoren werden durch die Platonischen Polyeder geleistet (deren Existenz natürlich noch gezeigt wer-

den müßte). In der unteren Zeichnung sind die zugehörigen Schlegel Diagramme abgebildet.

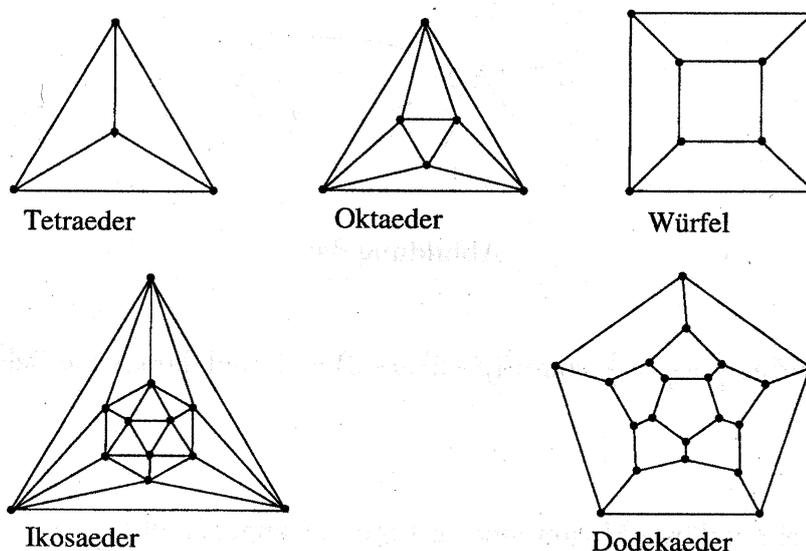


Abbildung 83:

Ein verwandtes Problem betrifft reguläre Polygonmuster. Wir wollen die Ebene lückenlos mit regulären Polygonen mit  $p$  Ecken jeweils bedecken, so daß jede Ecke in genau  $q$  Polygonen enthalten ist. Wir sprechen dann von einem *regulären*  $\{p, q\}$ -Muster.

**Satz 6.22** *Reguläre  $\{p, q\}$ -Muster sind nur für  $p = 6, q = 3$ ;  $p = 4, q = 4$  und  $p = 3, q = 6$  möglich.*

**Beweis.** Sei  $v$  eine beliebige Ecke und  $\alpha$  die Winkelgröße eines Innenwinkels eines (und damit jedes) an  $v$  anstoßenden Polygons. Bezeichnen wir wie üblich die Größe des vollen Winkels mit  $2\pi$ , so haben wir  $\alpha = \frac{2\pi}{q}$ . Anderer-

seits ist die Winkelsumme eines konvexen  $p$ -gons, wie man leicht sieht, gleich  $(p-2)\pi$  und somit  $\alpha = \frac{p-2}{p}\pi = \left(1 - \frac{2}{p}\right)\pi$ .

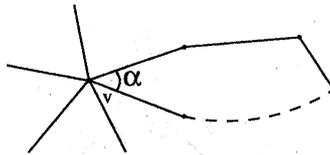


Abbildung 84:

Wir schließen  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$ , somit  $(p-2)(q-2) = 4$ , und daraus die Behauptung.  $\square$

Die drei regulären Muster sind in Figur ?? angedeutet

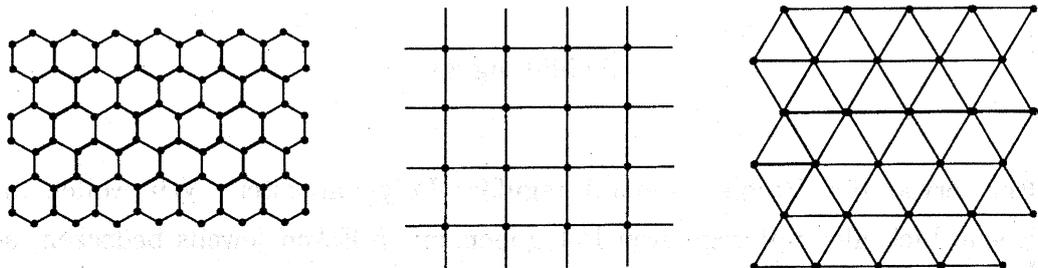


Abbildung 85:

### Aufgaben

1. Verschärfe das Trennunglemma. Seien  $A, A' \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex und  $A'$  beschränkt mit  $cl(A) \cap cl(A') = \emptyset$ . Dann können  $A$  und  $A'$  strikt getrennt werden.

2. Verschärfe das Stützlemma. Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex und  $C \subseteq bd(A)$  konvex. Dann existiert eine Stützhyperebene  $H$  an  $A$  mit  $C \subseteq A \cap H$ .
3. Es sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $|A| = n + 2$ . Beweise, daß Untermengen  $A', A'' \subseteq A$  existieren mit  $A' \cap A'' = \emptyset$  und  $conv(A'') \neq \emptyset$ .  
(Hinweis: Verwende 6.5).
4. Beweise mit Hilfe von 3. den Helly'schen Satz. Es sei  $\{A_1, \dots, A_m\}$  eine Familie von konvexen Mengen in  $\mathbb{R}^n$ ,  $m \geq n + 1$ . Haben je  $n + 1$  der Mengen  $A_i$  einen nichtleeren Durchschnitt, so gilt  $\bigcap_{i=1}^m A_i \neq \emptyset$ .
5. Seiten können allgemein für beliebige abgeschlossene konvexe Mengen  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  definiert werden. Es sei  $exp(A)$  die Menge der einpunktigen Seiten. Zeige, daß  $exp(A) \subseteq ext(A) \subseteq cl(expA)$ .
6. Zeige, daß die konvexe Hülle einer offenen Menge in  $\mathbb{R}^n$  wieder offen ist. Finde eine abgeschlossene Menge  $A \neq \emptyset$ , so daß  $conv(A)$  eine offene echte Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  ist.
7. Erweitere den Begriff des Schlegel Diagramms zu  $d$ -Polyedern. Bestimme alle Schlegel Diagramme von 3-Polyedern mit höchstens 6 Ecken.
8. Zeige, daß der Graph eines Schlegel Diagramms eines 3-Polyeders 3-fach zusammenhängend ist, d.h. daß nach Wegnahme zweier beliebiger Ecken (samt inzidierender Kanten) der Graph noch zusammenhängend ist.
9. Sei  $S$  ein  $d$ -Prisma mit Basis  $B$ . Zeige, daß  $f_0(S) = 2f_0(B)$  und  $f_k(S) = 2f_k(B) + f_{k-1}(B)$  für  $k > 0$ .
10. Sei  $S$  ein konvexes  $d$ -Polyeder und  $F$  eine  $k$ -Seite,  $-1 \leq k \leq d - 1$ . Zeige unter Annahme von 6.17, daß  $\sum_{j=k}^d (-1)^j h_j(F) = 0$ , wobei  $h_j(F)$

die Anzahl der  $j$ -Seiten von  $S$  ist, welche  $F$  enthalten falls  $j \geq k$  oder welche in  $F$  enthalten sind, falls  $j \leq k$ .

## 7 Topologie der Flächen

Wir wollen die Theorie der Polyeder verallgemeinern, um auch nicht konvexe Polyeder einzuschließen und sie auf ihre topologischen Eigenschaften hin zu untersuchen.

**Definition.** Ein Hausdorff'scher, zusammenhängender, topologischer Raum  $X$  heißt eine  $n$ -dimensionale *Mannigfaltigkeit*, falls jeder Punkt eine Umgebung hat, welche homöomorph zur offenen Einheitskugel  $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$  ist.

**Beispiel.**  $\mathbb{R}$  und die 1-Sphäre  $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$  sind 1-dimensionale Mannigfaltigkeiten und es ist ein bekannter Satz der Topologie, daß  $\mathbb{R}$  und  $S^1$  bis auf Homöomorphie die einzigen separablen 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten sind. Von nun an betrachten wir stets  $\mathbb{R}^3$ .

**Definition.** Eine kompakte 2-dimensionale Mannigfaltigkeit in  $\mathbb{R}^3$  heißt eine *geschlossene Fläche* in  $\mathbb{R}^3$ .

Ziel dieses Kapitels ist es, alle geschlossenen Flächen zu klassifizieren (bis auf Homöomorphie natürlich). Beispiele geschlossener Flächen sind die 2-Sphäre (= Kugeloberfläche), der Torus, der Würfel:

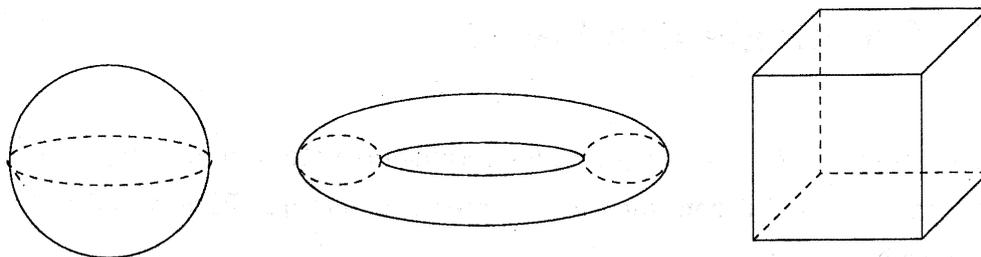


Abbildung 86: 2-Sphäre, Torus, Würfel

Die fundamentale Definition für alles weitere ist die folgende:

**Definition.** Ein *Polyeder* in  $\mathbb{R}^3$  ist eine endliche Familie  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 \cup \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$  von Teilmengen von  $\mathbb{R}^3$ , so daß

- (i)  $A \in \mathcal{K}_0 \Rightarrow |A| = 1$
- $B \in \mathcal{K}_1 \Rightarrow B$  homöomorph zu  $\mathbb{R}$
- $C \in \mathcal{K}_2 \Rightarrow C$  homöomorph zu  $\mathbb{R}^2$ .

Die Elemente aus  $\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$  heißen *Ecken*, *Kanten* und *Seitenflächen* von  $\mathcal{K}$ .

(ii) Je zwei Mengen aus  $\mathcal{K}$  sind disjunkt.

(iii)  $\bigcup_{A \in \mathcal{K}} A$  ist eine geschlossene Fläche.

$E(\mathcal{K}) := |\mathcal{K}_0| - |\mathcal{K}_1| + |\mathcal{K}_2|$  heißt die geschlossene *Euler-Charakteristik* des Polyeders  $\mathcal{K}$ .

Offenbar ist jedes konvexe 3-Polyeder ein Polyeder im Sinne der obigen Definition, und mit Hilfe des Schlegel Diagrammes folgt, daß jedes konvexe 3-Polyeder homöomorph zur 2-Sphäre ist.

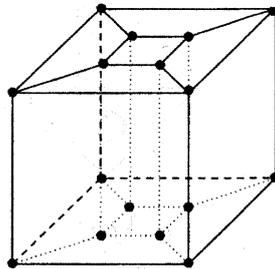


Abbildung 87:

Obige Abbildung gibt ein Beispiel eines nichtkonvexen Polyeders  $\mathcal{K}$  mit 16 Ecken, 32 Kanten und 16 Seitenflächen, indem man aus dem Würfel ein Loch herauschneidet. Man erkennt, daß dieses Polyeder homöomorph zum Torus ist. Ferner ist  $E(\mathcal{K}) = 0$ . Unter einem *Polygon* verstehen wir eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^3$ , welche homöomorph zur Kreisscheibe ist und dessen Rand durch  $n \geq 1$  Punkte in  $n$  Bögen (homöomorph zu  $[0, 1]$ ) zerlegt ist. Die Bögen heißen die *Seiten* des Polygons und die Punkte die *Ecken* des Polygons. Wir zitieren den folgenden Satz, der die Beschränkung auf Polyeder erlaubt.

**Satz 7.1** *Jede geschlossene Fläche ist homöomorph zu einem Polyeder.*

Unsere Aufgabe besteht also darin, Polyeder auf ihre topologischen Eigenschaften hin zu klassifizieren. Zunächst müssen wir eine handliche Beschreibung finden, wie die Seitenflächen, Kanten und Ecken eines Polyeders zusammengesetzt sind.

**Beispiel.** Gegeben das Tetraeder. Wir betrachten die vier Seiten.

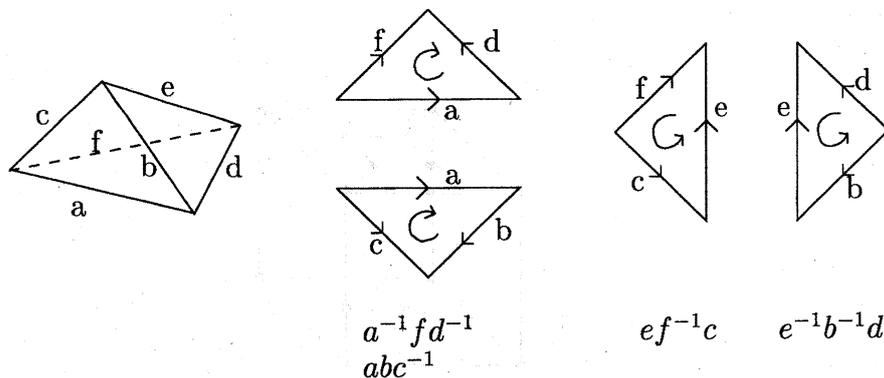


Abbildung 88: Tetraeder

Für jede Seite erklären wir einen Durchlaufsinne (in diesem Beispiel, in dem wir von außen daraufblicken und den Gegenuhrzeigersinn wählen). Für jede Kante wählen wir einen Durchlaufsinne, so daß die Kanten richtig identifiziert werden können. Ist die Kante  $k$  im Rand der Seite  $s$ , so schreiben wir  $k$  bzw.  $k^{-1}$ , falls der Durchlaufsinne von  $k$  mit dem von  $s$  übereinstimmt bzw. nicht übereinstimmt.

Wir erhalten dadurch folgende kombinatorische Definition der Polyeder: Gegeben eine endliche Zahl von Polygonen, deren Seiten in Paaren gegeben sind. Außerdem ist eine Orientierung der Seiten gegeben. Wir identifizieren jedes Paar von Seiten unter Beachtung der Orientierung und nennen die identifizierten Seiten *Kanten*. Falls die Ecken und Kanten mit der vorgegebenen Inzidenz einenzusammenhängenden Graphen ergeben, so heißt das Gebilde ein *Polyeder*.

Wir haben also drei Informationen:

- |  |   |  |
|--|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>a. Menge der Polygone</li> <li>b. Paarung der Seiten</li> <li>c. Orientierung der Seiten</li> </ul> | } | heißt Ebene Repräsentierung des Polyeders. |
|--|---|--|

Um ein Polyeder symbolisch zu beschreiben, gehen wir so vor: Wir wählen je einen Buchstaben für jede Seite und je eine Reihe für jedes Polygon. Wir wählen einen Durchlaufsinne der Polygone und Seiten und schreiben  $k$  bzw.  $k^{-1}$ , je nachdem ob die Orientierungen von Seite und Polygon übereinstimmen oder nicht. Also erhalten wir ein Schema  $\Sigma$  von Buchstaben, so daß gilt:

- (i) Jeder Buchstabe kommt genau zweimal vor.
- (ii) Die Menge der Reihen kann nicht in zwei disjunkte nichtleere Teile zerlegt werden, so daß (i) gilt.

Bedingung (ii) entspricht dem Zusammenhang des Graphen (bzw. der Fläche).

**Beispiel.** Das Tetraeder aus obiger Abbildung hat die ebene Repräsentierung:

$$\begin{array}{l} abc^{-1} \\ a^{-1}fd^{-1} \\ ef^{-1}c \\ e^{-1}b^{-1}d \end{array}$$

**Satz 7.2** Sei ein Polyeder  $\mathcal{K}$  mit Schema  $\Sigma$  gegeben. Die folgenden Operationen in  $\Sigma$  ergeben jeweils Schemata, welche ebenfalls ebene Repräsentierungen von  $\mathcal{K}$  sind:

- (i) Vertausche die Buchstaben einer Reihe zyklisch.
- (ii) Ersetze  $b$  durch  $b^{-1}$  und  $b^{-1}$  durch  $b$ .

(iii) Wechsle alle Exponenten einer Reihe und drehe die zyklische Ordnung der Reihe um.

**Beweis.** (i) ist klar. (ii) bedeutet, daß wir den Durchlaufsinne der Seite  $b$  umkehren, (iii) sagt, daß wir den Durchlaufsinne eines Polygons umdrehen.  $\square$

**Definition.** Ein Polyeder heißt *orientierbar*, falls eine ebene Repräsentierung existiert, in der jede Seite mit beiden Exponenten, also  $k$  und  $k^{-1}$ , auftritt, andernfalls *nichtorientierbar*.

Wir zitieren die topologische Kennzeichnung:

Eine geschlossene Fläche (oder allgemeiner eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit) ist orientierbar, falls für jede einfache geschlossene Kurve  $C$  eine Rotationsrichtung (z.B. im Uhrzeigersinn) erhalten bleibt, wenn wir einmal um  $C$  herumgehen.

Orientierbar heißt, daß die Fläche zweiseitig ist. Das Möbiusband in Figur ?? ist einseitig.



Abbildung 89: Möbius-Band

Das Tetraeder ist orientierbar, wie aus der obigen Repräsentierung hervorgeht. Allgemeiner haben wir

**Satz 7.3** Jedes konvexe Polyeder ist orientierbar.

**Beweis.** Man betrachte ein Schlegeldiagramm und orientiere jede innere Region im Uhrzeigersinn und die äußere Region im Gegenuhrzeigersinn.  $\square$

**Beispiele.** Die einfachsten Schemata und zugehörigen Polyeder (oder Flächen) sind in den nachfolgenden Zeichnungen abgebildet.

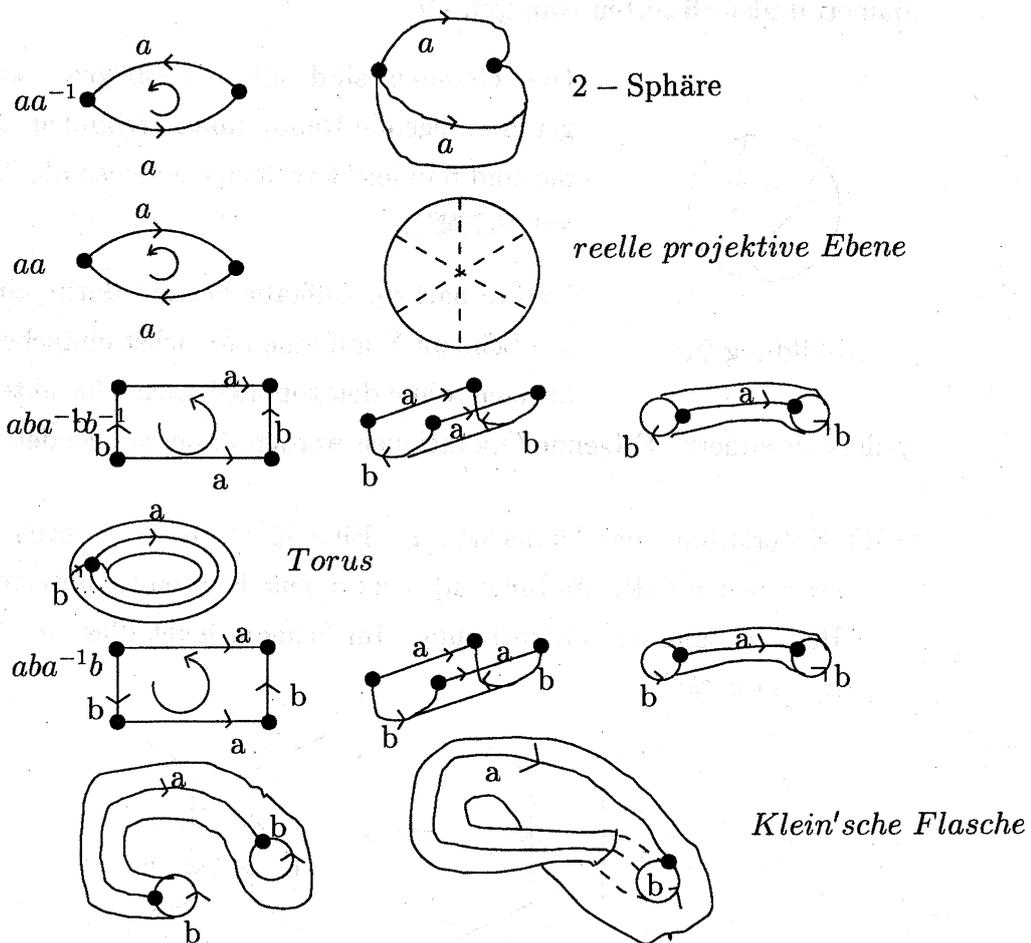


Abbildung 90: Einfache Schemata und dazugehörige Polyeder

Die 2-Sphäre und der Torus sind orientierbar. Die reelle projektive Ebene-

ne kann nur durch Identifizierung diametral gegenüberliegender Randpunkte realisiert werden. Die Klein'sche Flasche (wie alle anderen nichtorientierbaren Flächen) kann nur durch Durchdringung realisiert werden.

Warum ist das obige Polyeder ein Modell für die reelle projektive Ebene? Die *Punkte* sind alle im Inneren der Kreisscheibe gelegenen Punkte und die diametral identifizierten Randpunkte.

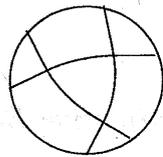


Abbildung 91:

Die *Geraden* sind alle Kreisbögen, welche gegenüberliegende Randpunkte verbinden. Die Axiome sind nun leicht verifiziert, ebenso die Abbildung auf  $PG(\mathbb{R}^2)$ .

Unsere nächste Aufgabe besteht darin, ein gegebenes Schema  $\Sigma$  auf eine möglichst einfache Form zu bringen, ohne den topologischen Charakter des Polyeders zu ändern. Folgende Operationen werden dabei verwendet:

(U1) Unterteilung der Dimension 1. Eine Kante  $a$  wird durch Einfügen einer neuen Ecke (im Inneren) in zwei neue Kanten  $b, c$  unterteilt, unter Beibehaltung der Orientierung. Im Schema heißt dies:  $a \rightarrow bc$  bzw.  $a^{-1} \rightarrow c^{-1}b^{-1}$ .

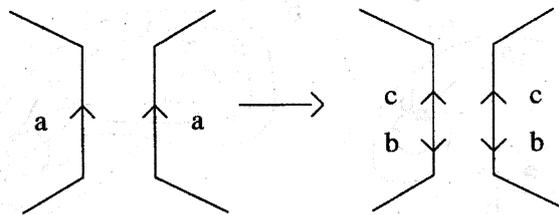


Abbildung 92:

(C1) Komposition der Dimension 1. Dies ist die Umkehroperation von (U1).

Im Schema heißt dies:  $bc \rightarrow a$  bzw.  $c^{-1}b^{-1} \rightarrow a^{-1}$ .

(U2) Unterteilung der Dimension 2. Zwei Ecken eines Polygons werden durch Einfügen einer neuen Kante  $e$  (im Inneren des Polygons) verbunden, wodurch zwei Polygone entstehen (unter Beibehaltung des Durchlaufsinns des Polygons). Im Schema heißt dies:

$$b \dots ed \dots a \rightarrow \begin{array}{l} b \dots ce^{-1} \\ ed \dots a \end{array}$$

(C2) Komposition der Dimension 2. Dies ist die Umkehroperation von (U2).

Im Schema heißt dies:

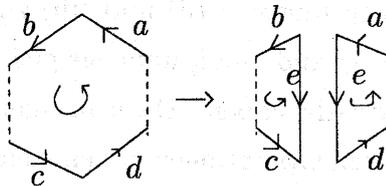


Abbildung 93:

$$\begin{array}{l} b \dots ce^{-1} \\ ed \dots a \end{array} \rightarrow b \dots cd \dots a$$

**Definition.** Zwei Polyeder  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{K}'$  heißen *elementar verwandt*, bezeichnet  $\mathcal{K} \approx \mathcal{K}'$ , falls  $\mathcal{K}'$  aus  $\mathcal{K}$  durch eine endliche Folge der vier Operationen (U1) - (C2) hervorgeht.

Die elementare Verwandtschaft ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation, und wir haben:

**Satz 7.4** Seien  $\mathcal{K} \approx \mathcal{K}'$ . Dann gilt:

- (i)  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{K}'$  sind homöomorph.
- (ii)  $\mathcal{K}$  orientierbar  $\Leftrightarrow \mathcal{K}'$  orientierbar.
- (iii)  $E(\mathcal{K}) = E(\mathcal{K}')$ .

**Beweis.** (i) ist klar. (ii) ist aus den Definitionen der Operationen direkt zu entnehmen. In (U1) wird die Zahl der Ecken und Kanten jeweils um 1 vermehrt, während die Zahl der Polygone gleich bleibt. In (U2) wird die Zahl der Kanten und Polygone um 1 vermehrt, während die Eckenzahl gleich bleibt, also bleibt die Euler-Charakteristik jeweils unverändert.  $\square$

Unser Ziel ist, die Umkehrung von (ii) und (iii) zu beweisen, daß  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{K}'$  genau dann elementar verwandt sind, wenn sie gleichen Orientierungscharakter und Euler-Charakteristik haben. Dazu bringen wir jedes Schema durch eine Folge von elementaren Operationen auf eine eindeutige Normalform, aus der dann das Ergebnis abzulesen ist.

Sei  $\mathcal{K}$  orientierbar mit Schema  $\Sigma$ . Wir führen folgende Schritte durch:

- (i) Durch eine Folge von Operationen (C2) erreichen wir, daß  $\Sigma$  genau eine Reihe hat.
- (ii) Einfache Normalisierung. Sei die Reihe  $Paa^{-1}Q$  mit  $P \neq \emptyset$ ,  $Q \neq \emptyset$  ( $P$  und  $Q$  sind eine Folge von Buchstaben).

$$Paa^{-1}Q \xrightarrow{(U2)} \left\{ \begin{array}{l} Pab \xrightarrow{(C1)} Pc \\ b^{-1}a^{-1}Q \xrightarrow{(C1)} c^{-1}Q \end{array} \right\} \xrightarrow{(C2)} PQ.$$

Entweder ist nun  $\Sigma: aa^{-1}$ , dann sind wir fertig und nennen  $aa^{-1}$  die Normalform ( $H_0$ ) der 2-Sphäre mit Euler-Charakteristik  $E(H_0) = 2$ . Oder wir haben mindestens zwei verschiedene Buchstaben und  $\Sigma$ :

$aQa^{-1}U$  mit  $Q \neq \emptyset$ . Sei  $|Q|$  minimal,  $b \in Q$ , dann muß  $b^{-1} \in U$  sein. Also haben wir  $\Sigma: PaQbRa^{-1}Sb^{-1}T$ .

(iii) Henkelnormalisierung.

$$\begin{aligned} PaQbRa^{-1}Sb^{-1}T &\xrightarrow{(U_2)} \left\{ \begin{array}{c} PaQbRc \\ c^{-1}a^{-1}Sb^{-1}T \end{array} \right\} \xrightarrow{(C_2)} QbRcPSb^{-1}Tc^{-1} \\ &\xrightarrow{(U_2)} \left\{ \begin{array}{c} c^{-1}QbRcd \\ d^{-1}PSb^{-1}T \end{array} \right\} \xrightarrow{(C_2)} Rcdc^{-1}QTd^{-1}PS \xrightarrow{(U_2)} \left\{ \begin{array}{c} c^{-1}QTc \\ e^{-1}d^{-1}PSRcd \end{array} \right\} \\ &\xrightarrow{(C_2)} QTede^{-1}d^{-1}PSR \longrightarrow PSRQTede^{-1}d^{-1}. \end{aligned}$$

Der Name Henkelnormalisierung wird deswegen verwendet, weil wir den Henkel  $ede^{-1}d^{-1}$  aufsetzen (siehe Abbildung Einfache Schemata und dazugehörige Polyeder).

Durch mehrmalige Anwendung von 2. und 3. können wir schließlich  $\Sigma$  auf die *Normalform* bringen:

$$(H_p) \quad a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1} \dots a_pb_p a_p^{-1}b_p^{-1}.$$

Was ist die Euler-Charakteristik von  $(H_p)$ ?  $|\mathcal{K}_2| = 1$ ,  $|\mathcal{K}_1| = 2p$  ist klar. Bevor wir die Seiten identifizieren, hat das Polygon  $4p$  Ecken. Nach der Identifizierung erhalten wir  $P_1 = P_4 = P_3 = P_2 = P_5 = P_8 = P_7 = P_6 = P_9 = \dots = P_{4p-1} = P_{4p-2}$ , d.h.  $|\mathcal{K}_0| = 1$ , und somit

$$E(H_p) = 2 - 2p \quad (p \geq 1).$$

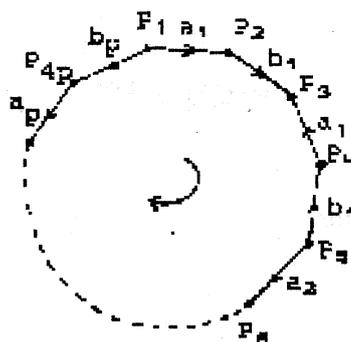


Abbildung 94:

Sei  $\mathcal{K}$  nichtorientierbar mit Schema  $\Sigma$ . Wir führen folgende Schritte durch:

- (i) Durch eine Folge von Operationen (C2) erhalten wir eine Reihe.
- (ii) Einfache Normalisierung.

Dies ergibt die Form  $\Sigma : PcQcR$ . Falls alle Mengen  $P, Q, R$  leer sind, sind wir fertig. Ist  $P = ab \dots d$ , so sei  $P^{-1} := d^{-1} \dots b^{-1}a^{-1}$ .

- (iii) Kreuzhaubennormalisierung .

$$PcQcR \xrightarrow{(U_2)} \left\{ \begin{array}{l} Pcd^{-1} \\ dQcR \end{array} \right\} \xrightarrow{(C_2)} P^{-1}dRdQ \xrightarrow{(U_2)} \left\{ \begin{array}{l} dRe \\ e^{-1}dQP^{-1} \end{array} \right\} \xrightarrow{(C_2)} \\ ReePQ^{-1} \longrightarrow PQ^{-1}Ree.$$

Dies heißt Kreuzhaubennormalisierung, weil wir eine Fläche  $ee$  anhängen, in der gegenüberliegende Punkte identifiziert werden (siehe Abbildung Einfache Schemata und dazugehörige Polyeder).

$\Sigma$  ist nun von der Form  $\Sigma : Wc_1c_1c_2c_2 \dots c_t c_t$ , wobei in  $W$  jeder Buchstabe (falls  $W \neq \emptyset$ ) mit verschiedenen Exponenten aufscheint. Durch

einfache und Henkelnormalisierung bringen wir  $\Sigma$  auf die Form

$$c_1 c_1 c_2 c_2 \dots c_t c_t a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_s b_s a_s^{-1} b_s^{-1}.$$

Nun transformieren wir der Reihe nach jeden Henkel in zwei Kreuzhauben durch

(iv)

$$Rccaba^{-1}b^{-1} \xrightarrow{(U2)} \left\{ \begin{array}{l} a^{-1}b^{-1}Rcd \\ d^{-1}cab \end{array} \right\} \xrightarrow{(C2)} \\ Rcd a^{-1}d^{-1}ca \xrightarrow{(iii)} Rdad^{-1}aee \xrightarrow{(iii)} Rddeeff.$$

Also erhalten wir schließlich die *Normalform*

$$c_1 c_1 c_2 c_2 \dots c_q c_q.$$

Zur Berechnung der Euler-Charakteristik haben wir  $|\mathcal{K}_2| = 1$ ,  $|\mathcal{K}_1| = q$ .  
Ferner ist nach Identifizierung  $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = \dots = P_{2q}$ , also  
 $|\mathcal{K}_0| = 1$ , und somit

$$E(C_q) = 2 - q \quad (q \geq 1).$$

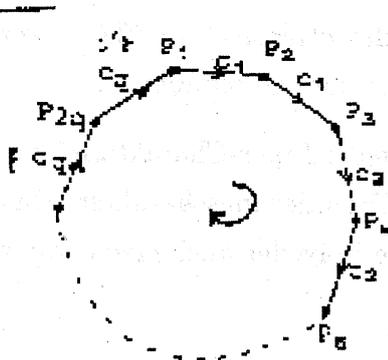


Abbildung 95:

Da je zwei verschiedene Normalformen  $(H_p)$  verschiedene Euler-Charakteristiken haben, desgleichen zwei Normalformen  $(C_q)$ , so haben also zwei nicht elementar verwandete Polyeder verschiedenen Orientierungscharakter oder verschiedene Charakteristik. Also:

**Satz 7.5** *Zwei Polyeder sind genau dann elementar verwandt, wenn sie gleichen Orientierungscharakter und gleiche Euler-Charakteristik haben.*

Als Folgerung haben wir:

**Satz 7.6** *Für jedes Polyeder  $\mathcal{K}$  gilt  $E(\mathcal{K}) \leq 2$  genau dann, wenn  $\mathcal{K}$  homöomorph zur 2-Sphäre ist.*

Unser Klassifizierungsproblem der geschlossenen Flächen ist damit fast beantwortet. Wir wissen aufgrund von 7.1, daß es bis auf Homöomorphie höchstens folgende Flächen geben kann:

$S_p$  homöomorph zum Polyeder mit Normalform  $(H_p)$       $(p = 0, 1, 2, \dots)$   
 $N_q$  homöomorph zum Polyeder mit Normalform  $(C_p)$       $(p = 1, 2, \dots)$

**Definition**  $S_p$  heißt die *orientierbare Fläche vom Geschlecht  $p$* ,  $N_q$  die *nichtorientierbare Fläche vom Geschlecht  $q$* .

Nach 7.5 können wir von der Euler-Charakteristik einer geschlossenen Fläche sprechen wie auch vom Orientierungscharakter. Da aus der Homologietheorie folgt, daß homöomorphe Polyeder auch elementar verwandt sind, haben wir in Zusammenfassung:

**Satz 7.7** *Zwei geschlossene Flächen sind genau dann homöomorph, wenn sie gleichen Orientierungscharakter und gleiche Euler-Charakteristik haben (bzw. gleiches Geschlecht).*

Daß tatsächlich alle Flächen  $S_p$  und  $N_q$  existieren, wollen wir anhand von Modellen demonstrieren.

Das Standardmodell für  $S_p$  ist die Kugeloberfläche, an der  $p$  Henkel angebracht sind. Die untere Abbildung zeigt  $S_3$  und ein dazu homöomorphes Polyeder mit ebener Repräsentierung.



Abbildung 96:

Aus der Figur ist klar, daß das Polyeder orientiert ist. Die linke Hälfte der ebenen Repräsentierung entspricht der vorderen Hemisphäre der Fläche, die rechte Hälfte der hinteren Hemisphäre. Die Anzahl der Ecken, Kanten und Seiten ist für beliebiges  $p$  :  $|\mathcal{K}_0| = 4p$ ,  $|\mathcal{K}_1| = 8p$  und  $|\mathcal{K}_2| = 2p + 2$ , also haben wir  $E = 2 - 2p$ .

Für die nichtorientierte Fläche  $N_q$  gibt es mehrere nützliche Modelle. Aus der Kugeloberfläche schneiden wir  $q \geq 1$  kreisförmige Löcher heraus und identifizieren gegenüberliegende Randpunkte (wir setzen also  $q$  Kreuzhauben auf), oder setzen auf den Torus  $q - 2 \geq 1$  Kreuzhauben auf.

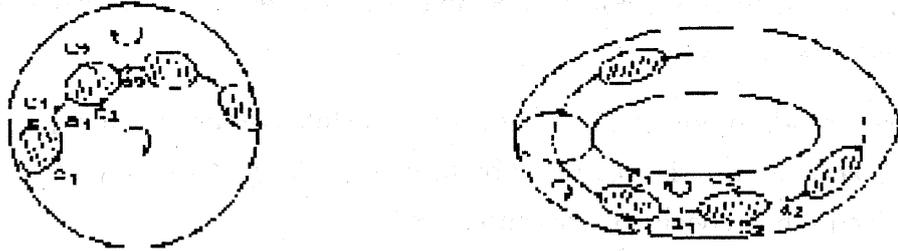


Abbildung 97:

Die Anzahl der Ecken, Kanten und Seiten ist im ersten Fall  $|\mathcal{K}_0| = q$ ,  $|\mathcal{K}_1| = 2q$  und  $|\mathcal{K}_2| = 2$ , im zweiten Fall  $|\mathcal{K}_0| = q - 1$ ,  $|\mathcal{K}_1| = 2q - 2$  und  $|\mathcal{K}_2| = 1$ , also in jedem Fall  $E = 2 - q$ .

Es ist klar, daß analog auf  $S_p$  Kreuzhauben aufgesetzt werden können, wobei  $t$  Kreuzhauben auf  $S_p$  ein Modell der Fläche  $N_{t+2p}$  ergeben.

Ein weiteres Modell erhält man folgendermaßen: Die Möbiusfläche  $M_q$  der Ordnung  $q$  ist ein Möbiusband (siehe Abbildung) mit  $q - 1$  „Schnallen“, die nach einer Drehung um  $180^\circ$  geschlossen werden.  $M_q$  hat eine einzige geschlossene Randkurve ( $a_1, a_2, a_3, \dots$  in nachfolgender Abbildung). Darauf setzen wir noch ein Flächenstück homöomorph zur Kreisscheibe. Die nachfolgende Abbildung zeigt den Fall  $q = 4$ .

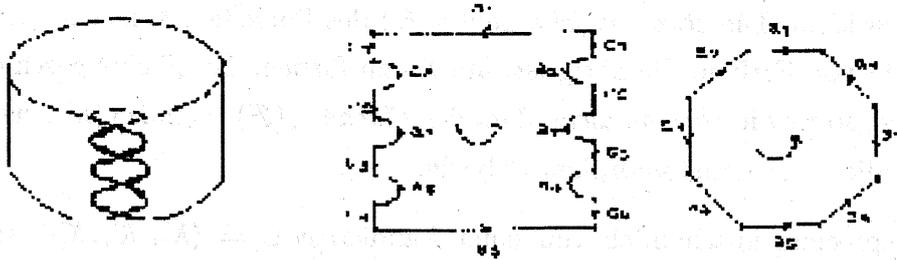


Abbildung 98: 3-schnalliges Möbiusband

Wir erhalten  $|\mathcal{K}_0| = 2q$ ,  $|\mathcal{K}_1| = 3q$  und  $|\mathcal{K}_2| = 2$ , also  $E = 2 - q$

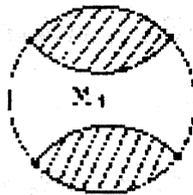


Abbildung 99:

Schneiden wir umgekehrt z.B. aus der reellen projektiven Ebene aus der Abbildung Einfache Schemata und dazugehörige Polyeder ein Loch (entsprechend der Kreisscheibe), so erhalten wir das Möbiusband  $M_1$ .

Zum Abschluß besprechen wir das Färbungsproblem auf geschlossenen Flächen. Sei  $\mathcal{K} = (\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$  ein Polyeder. Unsere Aufgabe besteht darin, die Elemente  $\mathcal{K}_2$  so zu färben, daß zwei aneinandergrenzende Seitenflächen (d.h. mit gemeinsamer Kante) verschiedene Farben erhalten.

**Definition.** Das Polyeder  $\mathcal{K}$  heißt *k-färbbar*, falls  $\mathcal{K}_2$  mit  $k$  Farben gefärbt werden kann. Die *chromatische Zahl*  $\chi(\mathcal{K})$  des Polyeders  $\mathcal{K}$  ist die minimale Anzahl von Farben, die nötig ist, um  $\mathcal{K}_2$  zu färben. Ist  $\mathcal{F}$  eine geschlossene Fläche, so ist die *chromatische Zahl der Fläche*  $\chi(\mathcal{F}) := \max \chi(\mathcal{K})$ , erstreckt über alle zu  $\mathcal{F}$  homöomorphen Polyeder.

Wir sprechen anschaulich von einer Landkarte  $\mathcal{L} = (\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$  auf der Fläche  $\mathcal{F}$ , die durch die polyedrische Zerlegung entsteht, und nennen wie bei ebenen Graphen (siehe Kapitel 6) die Elemente aus  $\mathcal{K}_2$  die *Regionen* von  $\mathcal{L}$ . Bei einer Färbung von  $\mathcal{L}$  müssen angrenzende Regionen also verschieden gefärbt werden. Die chromatische Zahl  $\chi(\mathcal{F})$  ist demnach die minimale Zahl von Farben, die genügt, um jede beliebige Landkarte auf  $\mathcal{F}$  zu färben.

Offensichtlich gilt:

$$\chi(S_p) \leq \chi(S_{p+1})$$

$$\chi(N_q) \leq \chi(N_{q+1})$$

### Beispiele.

(i)  $S_0$  hat  $\chi(S_0) \geq 4$ , da das Tetraeder (welches homöomorph zu  $S_0$  ist) klarerweise chromatische Zahl 4 hat.

(ii)  $\chi(S_1) \geq 7$ . Die untere Abbildung zeigt eine Landkarte auf dem Torus mit 7 Regionen, von denen je zwei eine gemeinsame Kante haben.

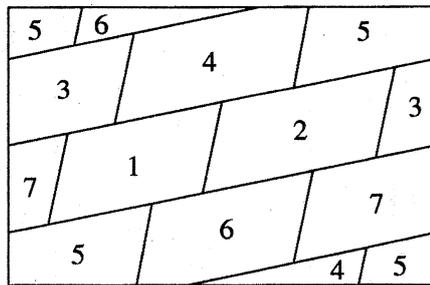


Abbildung 100: Landkarte auf dem Torus mit 7 Regionen

- (iii)  $\chi(N_1) \geq 6$ . In der unteren Abbildung ist eine Landkarte auf der reellen projektiven Ebene abgebildet mit 6 paarweise angrenzenden Regionen, also benötigen wir 6 Farben.

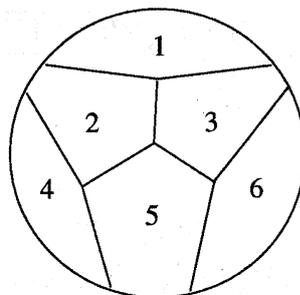


Abbildung 101: Landkarte auf der reellen projektiven Ebene abgebildet mit 6 paarweise angrenzenden Regionen

- (iv)  $\chi(N_3) \geq 7$ . Die untere Abbildung zeigt eine Landkarte auf dem Möbiusband  $M_3$  mit 7 paarweise angrenzenden Ländern. Die darüberliegende Kreisscheibe (siehe Abbildung 3-schnalliges Möbiusband) kann mit 1 gefärbt werden.

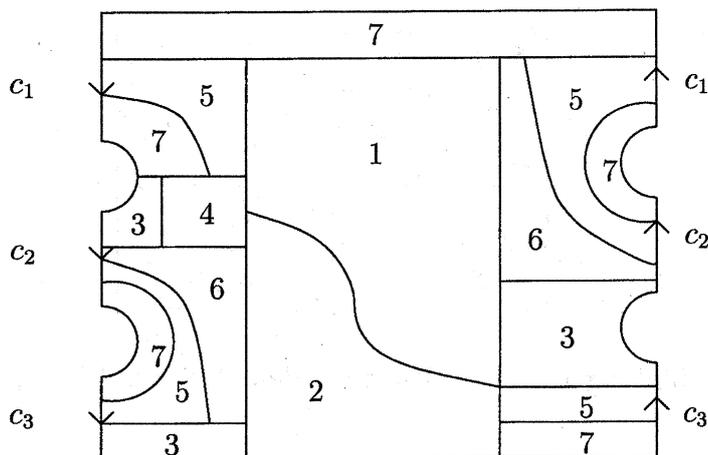


Abbildung 102: Möbiusband mit 7 paarweise angrenzenden Ländern

**Satz 7.8** Sei  $\mathcal{F}$  eine geschlossene Fläche mit Euler-Charakteristik  $E(\mathcal{F}) \leq 1$ . Dann gilt:

$$\chi(\mathcal{F}) \leq \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24E(\mathcal{F})}}{2} \right\rfloor.$$

**Beweis.** Für  $e \leq 2$  sei  $h(e)$  definiert durch  $h(e) := \frac{7 + \sqrt{49 - 24e}}{2}$ . Wir haben  $h^2(e) - 7h(e) + 6e = 0$ , also  $6 \left(1 - \frac{e}{h(e)}\right) = h(e) - 1$ . Es sei  $\mathcal{K} = (\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$  ein zu  $\mathcal{F}$  homöomorphes Polyeder mit  $f_i = |\mathcal{K}_i|$ ,  $i = 0, 1, 2$ , also  $E(\mathcal{F}) = f_0 - f_1 + f_2$ . Jede Kante inzidiert mit zwei Ecken und ebenso mit zwei Regionen. Durch Operationen (C2) können wir erreichen, daß jede Ecke mit mindestens 3 Kanten inzidiert. Bezeichnet  $d$  die durchschnittliche Anzahl von Kanten, die mit einer Seite inzidieren, so haben wir also

$$3f_0 \leq 2f_1 = df_2, \quad f_0 - f_1 + f_2 = E(\mathcal{F}),$$

somit

$$f_1 \leq 3(f_1 - f_0) = 3(f_2 - E(\mathcal{F})).$$

Daraus folgt :

$$d = \frac{2f_1}{f_2} \leq \frac{6(f_2 - E(\mathcal{F}))}{f_2} = 6 \left( 1 - \frac{E(\mathcal{F})}{f_2} \right).$$

Wir führen Induktion nach  $f_2$ . Ist  $f_2 \leq h(E(\mathcal{F}))$ , d.h.  $f_2 \leq \lfloor h(E(\mathcal{F})) \rfloor$ , so ist die Behauptung trivialerweise richtig. Sei also  $f_2 > h$  und  $e = E(\mathcal{F})$ .

Fall i)  $e \leq 0$ . Dann haben wir  $d \leq 6 \left( 1 - \frac{e}{f_2} \right) \leq 6 \left( 1 - \frac{e}{h(e)} \right) = h(e) - 1$ . Es existiert also eine Region  $C$ , die an höchstens  $\lfloor h(e) \rfloor - 1$  andere Regionen angrenzt. Kontrahieren wir  $C$  zu einem Punkt (siehe Abbildung 103)

so kann das neue Polyeder nach Induktionsvoraussetzung mit  $\lfloor h(e) \rfloor$  Farben gefärbt werden, also auch das ursprüngliche indem wir  $C$  mit einer der für die angrenzenden Seiten nicht verwendeten Farben färben.

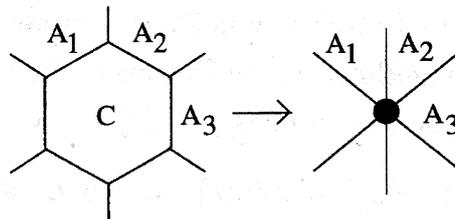


Abbildung 103:

Fall ii)  $e = 1$ . Hier ist  $d \leq 6 \left( 1 - \frac{1}{f_2} \right) < 6 = h(1)$ . Wir können nun denselben Induktionsschluß wie in Fall i) machen.  $\square$

Warum wurde im Beweis von Satz 7.9 der Fall  $E(\mathcal{F}) = 2$ , d.h.  $\mathcal{F}$  homöomorph zur 2-Sphäre, ausgeschlossen? Hier haben wir  $d \leq 6 \left( 1 - \frac{2}{f_2} \right) < 6$ , aber  $h(2) = 4$ . Also können wir mit dem Induktionsschluß aus 7.9 nur  $\chi(S_0) \leq 6$  schließen. Schon lange war bekannt, daß  $\chi(S_0) \leq 5$  ist. Daß  $\chi(S_0) \leq 4$  und somit  $\chi(S_0) = 4$  (das Tetraeder benötigt 4 Farben) tatsächlich gilt, war lange Zeit als *4-Farben Vermutung* bekannt und wurde 1977 bewiesen. Als Folgerung haben wir nun:

### Satz 7.9

$$(i) \chi(S_p) \leq \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48p}}{2} \right\rfloor \quad (p \geq 0)$$

$$(ii) \chi(N_q) \leq \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 24q}}{2} \right\rfloor \quad (q \geq 1).$$

**Beispiele.**  $\chi(S_0) = 4$  haben wir schon besprochen.  $\chi(S_1) \leq 7$  und daher  $\chi(S_1) = 7$  aufgrund der Abbildung: (Landkarte auf dem Torus mit 7 Regionen).  $\chi(N_1) \leq 6$  und damit  $\chi(N_1) = 6$  aufgrund von Abbildung: (Landkarte auf der reellen projektiven Ebene abgebildet mit 6 paarweise angrenzenden Regionen).  $\chi(N_3) \leq 7$  und damit  $\chi(N_3) = 7$  aufgrund von der Abbildung (Möbiusband mit 7 paarweise angrenzenden Ländern). Daraus folgt  $\chi(N_2) = 6$  oder 7. Tatsächlich gilt  $\chi(N_2) = 6$ .

Um die Umkehrung in 7.9 zu beweisen, versuchen wir eine Landkarte  $\mathcal{L}_n$  auf  $\mathcal{F}$  zu zeichnen mit  $n$  Regionen, die paarweise aneinander grenzen. Für  $\mathcal{L}_n$  gilt also  $|\mathcal{K}_2| = n$ ,  $|\mathcal{K}_1| = \binom{n}{2}$ .

Es sei  $\gamma(\mathcal{L}_n) = \min(p)$ , so daß  $\mathcal{L}_n$  auf  $S_p$  gezeichnet werden kann, analog  $\bar{\gamma}(\mathcal{L}_n) = \min(q)$ , so daß  $\mathcal{L}_n$  auf  $N_q$  gezeichnet werden kann. Man sieht mit einer ähnlichen Überlegung wie in 7.9, daß  $\gamma(\mathcal{L}_n) \geq \left\lfloor \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rfloor$ ,  $\bar{\gamma}(\mathcal{L}_n) \geq \left\lfloor \frac{(n-3)(n-4)}{6} \right\rfloor$ .

Daß tatsächlich Gleichheit gilt für alle  $\gamma(\mathcal{L}_n)$  und ebenso für alle  $\bar{\gamma}(\mathcal{L}_n)$  mit der einzigen Ausnahme  $\bar{\gamma}(\mathcal{L}_n) = 3$ , wurde erst in den letzten Jahren bewiesen. Als abschließendes Ergebnis zeigen wir, daß Gleichheit in den Formeln für  $\gamma$  und  $\bar{\gamma}$  auch die Gleichheit in 7.9, also den berühmten Farbensatz für geschlossene Flächen impliziert.

**Satz 7.10** *Für jede geschlossene Fläche  $\mathcal{F}$  mit Ausnahme der Klein'schen Flasche  $N_2$  gilt:*

$$\chi(\mathcal{F}) = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24E(\mathcal{F})}}{2} \right\rfloor$$

für  $N_2$  ist

$$\chi(\mathcal{F}) = 6.$$

**Beweis.** Es sei  $\mathcal{L}_n$  eine Landkarte auf  $S_p$  mit  $n$  maximal. Dann gilt  $n \leq \chi(S_p) \leq \left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+48p}}{2} \right\rfloor$  nach 7.9. Aus der Maximalität von  $n$  folgt  $\left\lceil \frac{(n-2)(n-3)}{12} \right\rceil > p$ , somit  $n^2 - 5n + 6 - 12p = \left(n - \frac{5+\sqrt{1+48p}}{2}\right) \left(n - \frac{5-\sqrt{1+48p}}{2}\right) > 0$ . Wir erhalten  $n > \frac{5+\sqrt{1+48p}}{2}$ , also  $\frac{7+\sqrt{1+48p}}{2} - 1 < \chi(S_p) \leq \frac{7+\sqrt{1+48p}}{2}$ , d.h.  $\chi(S_p) = \left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+48p}}{2} \right\rfloor$ . Sei  $N_q$  gegeben. Wir wissen schon  $\chi(N_1) = \chi(N_2) = 6$ ,  $\chi(N_3) = 7$ . Sei nun  $\mathcal{L}_n$  eine Landkarte auf  $N_q$ ,  $q \geq 4$ , mit  $n$  maximal. Dann ist  $n \geq 8$  und es gilt  $n \leq \chi(N_q) \leq \left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+24q}}{2} \right\rfloor$ . Wie im orientierbaren Fall schließ wir nun  $\left\lceil \frac{(n-2)(n-3)}{6} \right\rceil > q$ , somit  $n^2 - 5n + 6 - 6q = \left(n - \frac{5+\sqrt{1+24q}}{2}\right) \left(n - \frac{5-\sqrt{1+24q}}{2}\right) > 0$ , und daraus  $\frac{7+\sqrt{1+24q}}{2} - 1 < n \leq \chi(N_q) \leq \frac{7+\sqrt{1+24q}}{2}$ , also  $\chi(N_q) = \left\lfloor \frac{7+\sqrt{1+24q}}{2} \right\rfloor$ .  $\square$

### Aufgaben

1. Wie viele elementare Operationen benötigt man, um einen Würfel in einen Tetraeder zu transformieren?
2. Transformiere das Schema  $a_1 a_2 \dots a_t a_t \dots a_2 a_1$  in die Normalform.
3. Gegeben ein Polygon mit  $2n$  Kanten. Man identifiziere Paare von Seiten, so daß das resultierende Polyeder orientierbar und möglichst großes (möglichst kleines) Geschlecht hat. Wie groß (wie klein) kann das Geschlecht sein?
4. Es sei  $\mathcal{K}$  ein Polyeder mit folgenden Eigenschaften: Jede Ecke inzidiert mit 4 Kanten und jede Seitenfläche mit 5 Kanten, und es gilt  $9 \leq |\mathcal{K}_2| \leq 15$ . Zeige, daß  $\mathcal{K}$  nicht orientierbar ist.

5. Es  $\mathcal{L}$  eine Landkarte auf dem Torus mit  $\chi(\mathcal{L}) = 7$ . Zeige, daß  $\mathcal{L}$  eine Teillandkarte  $\mathcal{L}_7$  besitzt, d.h. 7 Regionen, die paarweise aneinander grenzen.

6. Zeichne  $\mathcal{L}_9$  auf die Fläche  $N_5$ .

**Literatur**

- [Cox61] Coxeter, Introduction to Geometry, 1961
- [Hi1899] Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Teubner, 1899
- [HiC52] Hilbert-Cohn-Vossen, Geometry and the Imagination, Chelsea, 1952
- [Cra70] Crapo-Rota, Combinatorial Geometries, MIT Press, 1970
- [Art57] Artin, Geometric Algebra, Interscience, 1957
- [Baer52] Baer, Linear Algebra and Projective Geometry, Academic Press, 1952
- [Mur69] Murtha-Willard, Linear Algebra and Geometry, Holt, 1969
- [Lenz75] Lenz, Grundlagen der Elementarmathematik, DVW, 1975
- [Grü67] Grünbaum, Convex Polytopes, Interscience 1967
- [Rin74] Ringel, Map Color Theorem, Springer, 1974

*[The text in this section is extremely faint and illegible. It appears to be a list of references or a section of a paper, but the specific words and sentences cannot be discerned.]*

## Index

- äußere Halbgerade, 76
- äußeres Winkelfeld, 76
- $\mathcal{F}(S)$ , 141
  - 1. Kongruenzsatz für Dreiecke, 96
  - 2. Kongruenzsatz für Dreiecke, 97
  - 3. Kongruenzsatz für Dreiecke, 105
- 4-Farben Vermutung, 175
- 4. Kongruenzsatz für Dreiecke, 110
- Abbildung
  - semilineare, 47
- abhängig (von), 8
- Abschluß, 58
- absolute Geometrie, 96
- Achse, 64
- affine Kombination, 18
- affiner Raum, 25
- Affinität, 52
- archimedische Gruppe, 92
- Axiom
  - das Pasch'sche, 71
- Basis, 8
- benachbart, 146
- Bew( $V$ ), 121
- Bewegung, 121
- Bilinearform
  - symmetrische, 116
- Dehnung, 31
  - Existenz von, 35
- Desargues
  - Satz von, 27
- Desargues'scher Euklidischer
  - Raum, 111
- Desargues'scher Raum, 63
- Dimension, 12, 14
- Dreieck, 6
  - sungleichung, 110
    - 1. Kongruenzsatz für, 96
    - 2. Kongruenzsatz für, 97
    - 3. Kongruenzsatz für, 105
    - 4. Kongruenzsatz für, 110
  - kongruente, 96
  - rechtwinkliges, 109
- Dreiecksungleichung, 110
- eben, 146
- Ebene, 5
  - affine, 14
- Ecken, 129, 144, 146, 156, 157
- eigentliche Seite, 141
- elementar
  - verwandt, 163
- Erzeugendensystem, 8
- Euklidische Geometrie, 96

Euler-Charakteristik, 156

Extremalpunkt, 126

Fläche

chromatische Zahl von, 172

geschlossene, 155

nichtorientierbar, 168

orientierbar, 168

vom Geschlecht  $p$ , 168

vom Geschlecht  $q$ , 168

Flächen, 144

Fußpunkt

eines Lotes, 102

Geometrie

absolute, 96

Euklidische, 96

geordneter affiner Raum, 81

Gerade, 162

rechtwinklige, 102

senkrechte, 102

Geraden, 5

affine, 14

gleiche, 21

parallele, 21, 25

schneidende, 22

windschiefe, 22

Größe

eines Winkels, 106

Grad, 146

Graph, 146

Gruppe

archimedische, 92

geordnete, 83

orthogonale, 122

Halbgerade, 73

äußere, 76

innere, 76

Halbraum

offen bzw. abgeschlossen, 74

Henkelnormalisierung, 165

homogene Koordinaten, 60

Hyperebene, 12

uneigentliche, 63

Innenwinkel, 99

innere Halbgerade, 76

inneres Winkelfeld, 76

Intervall

offen bzw. abgeschlossen, 72

Intervalltopologie, 89

inzident, 146

Inzidenzraum, 5

planarer, 8

$k$ -Seite, 141

Kanten, 144, 146, 156, 158

kollinear, 6

Kollineation, 30

Kombination

- affine, 18
- komplanar, 6
- kongruent
  - Dreiecke, 96
  - Strecke, 94
  - Winkel, 96
- konvex, 125
  - abhängig, 126
  - d-Polyeder, 129
  - Erzeugendensystem, 125
  - Hülle, 125
  - Kombinationen, 128
  - Polyeder, 129
- konvexe Hülle, 125
- konvexe Kombinationen, 128
- konvexes d-Polyeder, 129
- konvexes Polyeder, 129
- Koordinaten
  - homogene, 60
- Koordinierungssatz, 63
- Kreis, 146
- Kreuzhaubennormalisierung, 166
- lexikographisch, 88
- Lot, 102
- Mannigfaltigkeit
  - n-dimensionale, 155
- Metrik
  - euklidische, 91
  - metrischer Raum, 93
- Mittelpunkt, 102
- Muster
  - reguläres, 151
- Nebenwinkel, 98
- Normalform, 165, 167
- Oli, 161
- Ordnung des affinen Raumes, 27
- Ordnungstopologie, 77
- Orientierungsfunktion, 91
- orthogonal, 122
- Ortsvektor, 13
- Parallele Unterräume, 29
- Parallelenaxiom, 25
- Parallelklassen, 33
- Parallelprojektion, 82
- Perspektivitäten, 64
- Polyeder, 156, 158
  - Ecken eines, 156
  - k-färbbar, 172
  - Kanten eines, 156
  - nichtorientierbarer, 160
  - orientierbarer, 160
  - Seitenflächen eines, 156
- Polygon, 157
  - Ecken eines, 157
  - Kanten eines, 157
  - Seitenflächen eines, 157

- Polygone, 129
- Produkt
  - inneres, 117
- Produkttopologie, 89
- Projektion, 117
- projektiver Raum, 57
- Projektivitäten, 65
- Punkt, 5, 162
  - affiner, 14
  - Streckenverhältnis von Punkten, 51
- Punktinversion, 35
- Pythagoras
  - Satz von, 113
- Rand, 74
- Raum
  - affiner, 15, 25
  - Desargues'scher, 63
  - Desargues'scher Euklidischer, 111
  - geordneter, 71
  - geordneter affiner, 81
  - metrischer, 93
  - Ordnung des affinen, 27
  - projektiver, 57
  - zusammenhängender, 130
- rechtwinklig, 102
- Region, 172
- Regionen, 146
- reguläres Muster, 151
- Satz von Desargues, 27
  - kleiner, 35
- Satz von Pythagoras, 113
- Scheitel, 73
- Scheitelwinkel, 98
- Schiefkörper
  - geordneter, 83, 86
- Schlegeldiagramm, 148
- Seite, 141
  - eigentliche, 141
  - uneigentliche, 141
- Seiten, 157
- Seitenflächen, 141
- Seitenflächen, 156
- senkrecht, 102
- Sequenz
  - exakte, 65
- Stützhyperebene, 132
- Stützlemma, 134
- stetig geordnet, 78
- Strecke, 94
  - Länge der, 106
  - Mittelpunkt einer, 51
- Streckenverhältnis, 51
- Summe, 107
  - zweier Winkel, 109
- Thorsten, 172

Translation, 31, 82

-sebene, 38

Existenz von, 35

parallele, 32

Parallelklassen von, 33

Translationsebene, 38

trennen (strikt trennen), 132–133

Trennungslemma, 133

unabhängig, 8

uneigentliche Seite, 141

Unterraum, 6

parallele, 29

affiner, 14

aufgespannter, 8

erzeugter, 8

linearer, 14

Weg, 146

Winkel, 75

Größe des, 106

kongruent, 96

rechter, 100

spitzer, 108

stumpfer, 108

Winkelfeld

äußeres, 76

inneres, 76

Zahl

chromatisch, 172

chromatische einer Fläche, 172

zusammenhängend, 146

zusammenhängender Raum, 130

