Berlin Mathematical School

Freie Universität Berlin

Prof. Günter M. Ziegler
Albert Haase

Institut für Mathematik
Arbeitsgruppe Diskrete Geometrie

Geometrie – Übungsblatt 1

Bitte geben Sie die Aufgaben vor der Vorlesung am **Montag, den 27. April 2015** bei Professor Ziegler ab. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem Stern markiert.

Aufgabe 1: *Ellipsen* (2 + 3 + 3 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass in jeder Ellipse die kürzere Halbachse mindestens so lang ist wie der Abstand zwischen Brennpunkt und dem Scheitel der längeren Halbachse. Wann gilt Gleichheit?

(b) Wie kann man (mit Zirkel und Lineal) die Brennpunkte einer Ellipse konstruieren, wenn eine Zeichnung der Ellipse mit den Symmetrieachsen vorgegeben ist?

(c) Zeichnen Sie auf der Briefmarke in Abbildung 1 die Brennpunkte der innersten und der äußersten Ellipse möglichst genau ein. (Die Bilddatei finden Sie auch auf `http://jeff560.tripod.com/images/kepler43.jpg`.)

(d*) Überprüfen Sie mit Hilfe eines mathematischen Zeichenprogramms wie zum Beispiel *Cinderella*, ob es sich hier wirklich um korrekte Ellipsen handelt.

(e*) Diskutieren Sie andere Ellipsen auf Kepler-Briefmarken auf der Webseite `http://jeff560.tripod.com/stamps.html`.

Aufgabe 2: *Spiegelungen* (3 + 3 Punkte)

(a) Gegeben sei ein Vektor $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Gesucht ist die Spiegelungsabbildung $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, die an der Normalenebene[1] zu x spiegelt. Geben Sie die Abbildung in der Form $g(v) = Av + b$ an, wobei $A \in \mathrm{O}(n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$.

(b) Betrachten Sie den n-dimensionalen Würfel $[0,1]^n$. Geben Sie zunächst für $n = 2$ und $n = 3$ eine orthogonale Abbildung (als Matrix) an, die die Ecke $(1, \dots, 1)$ auf $(0, \sqrt{2})$ bzw. $(0, 0, \sqrt{3})$ abbildet.

(c*) Verallgemeinern Sie b) auf den Fall $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

[1] Mit Normalenebene ist hier diejenige Ebene des $\mathbb{R}^3$ gemeint, die senkrecht auf x steht und den Punkt x enthält.

Abbildung 1: Kepler-Briefmarke.

Aufgabe 3: *Transformationen* (2 + 2 + 2 Punkte)

(a) Gegeben sei eine euklidische Bewegung (Isometrie) im $\mathbb{R}^n$ der Form $Ax + b$. Berechnen Sie ihre Inverse.

(b) Gegeben seien alle Vektoren des $\mathbb{R}^4$, die jeweils 2 Nullen und 2 Einträge der Form ± 1 enthalten; zum Beispiel $(0, 1, -1, 0)$. Wie viele sind es insgesamt? Die konvexe Hülle dieser Vektoren wird als *24-Zell* bezeichnet. Berechne Sie die Längen der Vektoren. Wie lautet der minimale Winkel zweier solcher Vektoren?

(c) Was kann unter Verwendung von b) über die Kusszahl[2] $K(4)$ ausgesagt werden? *Zusatzaufgabe:* Küssen manche Sphären mehr als eine?

[2] Zur Definition der Kusszahl siehe Wikipedia. Der Radius der Sphären darf beliebig (aber für alle gleich und > 0) gewählt werden. Warum?