Berlin Mathematical School

Freie Universität Berlin

Prof. Günter M. Ziegler
Albert Haase

Institut für Mathematik
Arbeitsgruppe Diskrete Geometrie

Geometrie – Übungsblatt 2

Bitte geben Sie die Aufgaben vor der Vorlesung am **Montag, den 4. Mai 2015** bei Professor Ziegler ab. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem Stern markiert.

Aufgabe 1: *Ebene Pflasterungen* (2 + 3 + 3 Punkte)

Gegeben seien $m \geq 1$ Polygone (von einem einzigen geschlossenen Polygonzug begrenzte abgeschlossene Bereiche der Ebene) $M_1, \ldots, M_m \subset \mathbb{R}^2$. Eine Menge $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots\}$ von Polygonen heißt *ebene Pflasterung*, falls

(i) $P_i^\circ \cap P_j^\circ = \emptyset$ für alle $i \neq j$ (wobei P_i° das Innere von P_i bezeichne),
(ii) $\bigcup_{i\geq 1} P_i = \mathbb{R}^2$ und
(iii) jedes $P \in \mathcal{P}$ isometrisch (kongruent) zu einem der M_i ist.

Die *Symmetriegruppe* einer ebenen Pflasterung $\mathcal{P}$ ist

$$\mathrm{Sym}(\mathcal{P}) := \left\{ g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2) : g(\mathcal{P}) = \mathcal{P} \right\}.$$

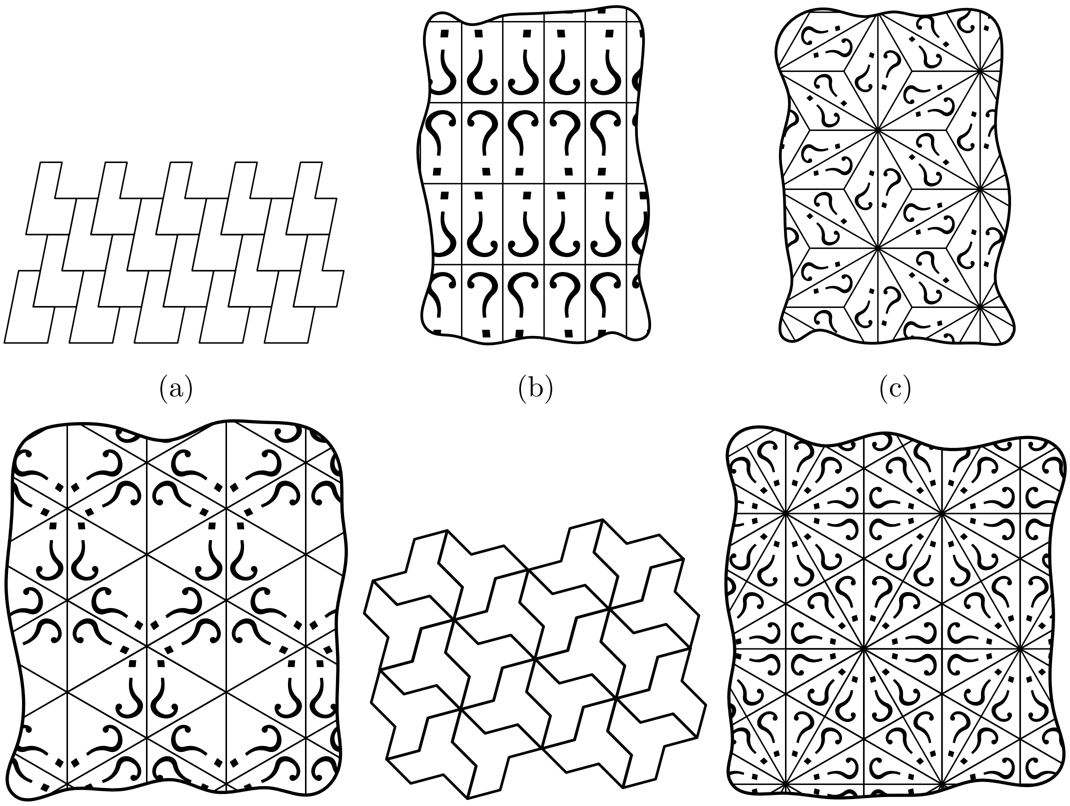
Die Gruppe $\mathrm{Sym}(\mathcal{P})$ heißt *kristallographisch*, wenn sie 2 linear unabhängige Translationen enthält. Ein Element der Symmetriegruppe wird als *Symmetrie* bezeichnet.

(I) Sei G die Symmetriegruppe einer ebenen Pflasterung $\mathcal{P}$. Ist G kristallographisch?[1]

(II) In Abbildung 1 sind 6 Pflasterungen der Ebene angedeutet. Beschreiben Sie für die Pflasterungen (d)-(f) einerseits die Symmetrien, die einen Fixpunkt haben (welche Punkte in der Pflasterung sind solche Fixpunkte), andererseits die Translationen. (Pflasterungen (a)-(c) werden in der Übung behandelt.)

(III) Wie lässt sich die Menge aller Symmetrien aus den beiden Typen unter (II) gewinnen? Beschreiben Sie jeweils einen Fundamentalbereich für die Untergruppe aller Translationen in der Symmetriegruppe.

[1] J. S. Fjodorow hat 1891 gezeigt, dass es bis auf Isomorphie nur 17 kristallographische Symmetriegruppen von ebenen Pflasterungen gibt. Diese nennt man *Tapetengruppen*.



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

Abbildung 1: Plasterungen der Ebene

Aufgabe 2: *Gruppe von Drehungen* (2 + 2 + 2 (+3) Punkte)

Gegeben sei der dreidimensionale Würfel $[0, 1]^3$. Betrachten Sie die Drehungen, die den Würfel auf sich selbst abbilden, also „nur" die Ecken permutieren.

(a) Bestimmen Sie alle Drehachsen und geben Sie jeweils beispielhaft eine Drehung an.

(b) Wir fassen alle Drehungen inklusive der Identität zu einer Menge G zusammen. Welche Kardinalität hat G?

(c) Man kann zeigen, dass G eine Gruppe ist. Bestimmen Sie eine Untergruppe H von G der Ordnung 3 und weisen Sie nach, dass H eine Gruppe ist. Verwenden Sie hierbei *nicht* die Tatsache, dass G eine Gruppe ist.

(d*) Geben Sie G an. Es gibt mehrere Möglichkeiten, dies zu tun. Sie können alle Elemente aufzählen, eine Präsentation angeben (mit Beweis), oder aber die Elemente gruppieren und genau beschreiben. Zu welcher Gruppe ist G isomorph?

Aufgabe 3: *Bahnen von Gruppenwirkungen* (2 + 2 + 2 Punkte)

Gegeben sei die Gruppe G aus Aufgabe 2. Falls noch Unklarheiten bezüglich der Gruppe bestehen, siehe folgenden Wikipedia-Artikel. In dieser Aufgabe betrachten wir die Gruppenwirkung von G auf $[-1,1]^3$, die ein Gruppenelement auf seine entsprechende Drehung abbildet.

Gegeben seien nun folgende Punkte auf der Oberfläche des Würfels:

$$x \coloneqq (1,1,1),\ y \coloneqq (1,0,1),\ z \coloneqq (0,0,1),\ u \coloneqq (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1),\ v \coloneqq (\tfrac{1}{2},0,1),\ w \coloneqq (\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{2},1).$$

(a) Geben Sie die Bahnen (Orbits) von x, y, z, u, v und w an.

(b) Ist die Gruppenwirkung diskret? Transitiv?[2]

(c) Betrachten Sie die konvexen Hüllen der Bahnen Gx, Gy und Gz.[3] Um welche geometrischen Objekte handelt es sich?

[2]Eine Gruppenwirkung von einer Gruppe G auf einen topologischen Raum X heißt *transitiv*, falls für alle $x_1, x_2 \in X$ ein $g \in G$ existiert, mit $g \cdot x_1 = x_2$.

[3]Die *konvexe Hülle* einer Menge von Punkten ist die Menge aller Affinkombinationen mit nichtnegativen Koeffizienten.