Berlin Mathematical School

Freie Universität Berlin

Prof. Günter M. Ziegler
Albert Haase

Institut für Mathematik
Arbeitsgruppe Diskrete Geometrie

Geometrie – Übungsblatt 3

Bitte geben Sie die Aufgaben vor der Vorlesung am **Montag, den 11. Mai 2015** bei Professor Ziegler ab.

Aufgabe 1: *Gruppenwirkungen* (2 + 2 + 6 Punkte)

Im Folgenden sei G eine Gruppe, die auf eine Menge X wirkt. Falls X ein topologischer Raum ist (zum Beispiel ein metrischer Raum), so nennen wir die Gruppenwirkung *diskret*, falls alle Bahnen Gx diskrete Teilmengen von X sind.[1]

(a) Ist jede freie Gruppenwirkung transitiv? Ist jede transitive Gruppenwirkung frei? Beweise oder widerlege.

(b) Sei $X = \mathbb{R}^2$ und sei $G = \mathbb{Z}^2$. Geben Sie eine Gruppenwirkung von G auf X an, die diskret bzw. nicht diskret ist. Ist eine solche Gruppenwirkung transitiv? Beweisen Sie ihre Aussagen.

(c) Sei $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{+1, -1\}$ die Gruppe mit zwei Elementen und $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$. Wir betrachen die zwei Gruppenwirkungen von G auf X, die gegeben sind durch

GW1: $\varphi(-1)(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, -x_2, -x_3)$.

GW2: $\psi(-1)(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, -x_3)$.

(i) Überprüfen Sie beide Gruppenwirkungen auf die Eigenschaften „frei“, „transitiv“, „treu“ und „diskret“.

(ii) Hat jede Gruppenwirkung einer endlichen Gruppe auf einen metrischen Raum eine dieser Eigenschaften? Mehrere dieser Eigenschaften? Beweisen Sie ihre Aussagen.

(iii) Beschreiben Sie für beide Gruppenwirkungen den Quotienten X/G.

---

[1] Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ ist diskret, falls für jedes $y \in Y$ eine Umgebung U_y von y in X existiert, die keine weiteren Punkte aus Y enthält.

Aufgabe 2: *Affinkombinationen* (2 + 2 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass, falls $\sum_i \lambda_i = 0$, der Vektor

$$\lambda_1 D(p_1, p) + \ldots + \lambda_m D(p_m, p)$$

von der Wahl des Punktes $p \in A$ unabhängig ist und daher $\sum_i \lambda_i p_i$ wohldefiniert ist.

(b) Zeigen Sie außerdem, dass im Fall $\sum_i \lambda_i = 0$ und $\sum_i \mu_i = 0$ folgende Gleichheit gilt

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i + \sum_{i=1}^{m} \mu_i p_i = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i + \mu_i) p_i.$$

Aufgabe 3: *Parallelprojektion* (3 + 3 Punkte)

Sei $V = U \oplus W$ eine direkte Summenzerlegung eines Vektorraums V in zwei Untervektorräume.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $p, q \in V$ die affinen Unterräume $p+U$ und $q+W$ sich in genau einem Punkt schneiden. Folgern Sie daraus, dass die Parallelprojektion

$$\pi_L^W : V \longrightarrow L$$

auf den affinen Unterraum $L = p + U$ entlang des Untervektorraums W wohldefiniert ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung π_L^W affin ist.