Berlin Mathematical School

Freie Universität Berlin

Prof. Günter M. Ziegler
Albert Haase

Institut für Mathematik
Arbeitsgruppe Diskrete Geometrie

Geometrie – Übungsblatt 4

Bitte geben Sie die Aufgaben vor der Übung am **Freitag, den 22. Mai 2015** ab.

Aufgabe 1: *Satz von Menelaus* (5 Punkte)

Beweisen Sie die folgende Aussage: Seien A, B, C die Ecken eines Dreiecks in der Ebene. Die Punkte A', B' und C' auf den Geraden BC, CA und AB (mit $\{A, B, C\} \cap \{A', B', C'\} = \emptyset$) sind genau dann kollinear, wenn

$$\frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA'}}{\overrightarrow{A'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{B'A}} = -1\,. \tag{1}$$

Aufgabe 2: *Affine Unabhängigkeit* (5 Punkte)

Es seien $p_1, \dots, p_m$ Punkte eines affinen Raums. Zeigen Sie die Äquivalenz der drei folgenden Aussagen:

(a) Die Punkte $\{p_1, \dots, p_m\}$ sind affin unabhängig.

(b) Keiner der Punkte $\{p_1, \dots, p_m\}$ kann als affine Kombination der anderen dargestellt werden.

(c) Die Vektoren $p_2 - p_1, \dots, p_m - p_1$ sind linear unabhängig.

(d) Für jeden Punkt p_i gibt es eine Hyperebene, die den Punkt nicht enthält — aber alle anderen.

Aufgabe 3: *Affine Abbildungen* (4 Punkte)

Seien A und B affine Räume über dem K-Vektorraum V der Dimension größer 1. Welche Eigenschaften muss der Körper K erfüllen, sodass folgende Äquivalenz gilt: Eine bijektive Abbildung $f\colon A \longrightarrow B$ is genau dann affin, wenn sie Geraden auf Geraden abbildet.

Aufgabe 4: *Semidirekte Produkte* (2 + 2 + 2 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Symmetriegruppe D_{2n} eines regelmäßigen n-Ecks isomorph ist zu einem semidirekten Produkt der Form $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \ltimes (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

(b) Zeigen Sie, dass sich $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ als ein semidirektes Produkt aus $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ und $\mathbb{R}^*$ schreiben lässt. Ist dies ein direktes Produkt?

(c) Zeigen Sie, dass ein semidirektes Produkt genau dann ein direktes Produkt ist, wenn beide Faktoren normale Untergruppen sind.