Berlin Mathematical School

Freie Universität Berlin

Prof. Günter M. Ziegler
Albert Haase

Institut für Mathematik
Arbeitsgruppe Diskrete Geometrie

Geometrie – Übungsblatt 5

Bitte geben Sie die Aufgaben vor der Übung am **Dienstag, den 9. Juni 2015** ab.

Aufgabe 1: *Gram'sche Matrix* (5 Punkte)

(a) Seien $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^d$ gegeben. Beweisen Sie folgende Aussage: Die Determinante der Gram'schen Matrix $G(v_1, \ldots, v_m)$ ist genau dann ungleich null, wenn $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Gram'sche Matrix positiv semidefinit ist, und dass jede positiv semidefinite Matrix die Gram'sche Matrix eines Systems von Vektoren ist.

Aufgabe 2: *Volumina* (5 Punkte)

(a) Zerlegen Sie den Würfel $[0,1]^d$ in $d!$ kongruente Simplizes und berechnen Sie damit sein Volumen.

(b) Zerlegen Sie ein Parallelotop im $\mathbb{R}^d$ in $d!$ Simplizes mit gleichem Volumen.

(c) Es sei B^d die d-dimensionale Einheitskugel. Zeigen Sie, dass das Volumen von B^d mindestens $\frac{2^d}{d!}$ beträgt.

Aufgabe 3: *Gittersimplizes* (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass das Volumen eines Gittersimplex im $\mathbb{R}^d$ mindestens $\frac{1}{d!}$ beträgt.

(b) Zeigen Sie, dass es im dreidimensionalen Raum leere Gittersimplizes mit beliebig großem Volumen gibt. Gilt dies ebenfalls für ebene, leere Gittersimplizes?

Aufgabe 4: *Hyperbel* (2 + 2 + 2 Punkte)

Es sei

$$H := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \right\}$$

eine Hyperbel. Ihre Brennpunkte sind

$$F_1 := \left(-\sqrt{a^2+b^2}, 0 \right) \quad \text{und} \quad F_2 := \left(\sqrt{a^2+b^2}, 0 \right).$$

a) Zeigen Sie, dass für alle Punkte aus $p \in H$ gilt:

$$| \, \|p - F_1\| - \|p - F_2\| \, | = 2a.$$

b) Zeigen Sie, dass 2 Punkte im $\mathbb{R}^2$ und ein Abstand $c > 0$ eine Hyperbel eindeutig definieren.

c) Berechne die Gleichung einer Tangenten an H im Punkt $(x_0, y_0) \in H$.