Berlin Mathematical School

Freie Universität Berlin

Prof. Günter M. Ziegler
Albert Haase

Institut für Mathematik
Arbeitsgruppe Diskrete Geometrie

Geometrie – Übungsblatt 6

Bitte geben Sie die Aufgaben vor der Übung am **Dienstag, den 16. Juni 2015** ab.

Aufgabe 1: *Bisektoren* (6 Punkte)

Seien A und B Punkte in der Ebene, die auf unterschiedlichen Seiten einer Geraden ℓ gelegen sind, sodass $\operatorname{dist}(A, \ell) > \operatorname{dist}(B, \ell)$.

(a) Zeigen Sie, dass es genau einen Punkt $P \in \ell$ mit der Eigenschaft gibt, dass die Gerade ℓ Bisektor des Winkels $\angle(APB)$ ist.

(b) Beweisen Sie, dass der Punkt P aus Teil (a) die Differenz der Abstände von A und B zu Punkten auf ℓ maximiert:

$$AP - PB = \max\{AX - XB \colon X \in \ell\}.$$

Aufgabe 2: *Parabolspiegel* (5 Punkte)

Es sei C eine Parabel in der Ebene und ℓ ihre Direktrix. Für einen Punkt $X \in C$ sei t die Tangente an C im Punkt X. Es bezeichne P den Lotfußpunkt von X auf ℓ. Zeigen Sie, dass die Tangente t ein Bisektor des Winkels $\angle(FXP)$ ist. Erklären Sie, warum diese Eigenschaft für einen Parabolspiegel von Bedeutung ist.

Aufgabe 3: *Quadriken 1* (6 Punkte)

(a) Beschreiben Sie alle möglichen Quadriken $Q \subset \mathbb{R}^3$, deren Gleichung die folgende Form hat:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{x_k^2}{a_k^2} - \frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}^2} - \cdots - \frac{x_{k+\ell}^2}{a_{k+\ell}^2} = 1 \qquad \text{für } 1 \leq k,\ 0 \leq \ell, \text{ und } k + \ell \leq 3,$$

wobei $a_1 \geq \cdots \geq a_k > 0 < a_{k+1} \leq \cdots \leq a_{k+\ell}$.

(b) Das (inzwischen ausgetauschte) Banner der Webseite `mathematik.de` zeigt eine Formel und eine Form (Siehe Abbildung 1). Welche Form beschreibt die Formel? Welche Formel beschribt die Form?

Aufgabe 4: *Quadriken 2* (3 (+3) Punkte)

(a) Wie lautet die Anzahl der Freiheitsgrade, die zur Verfügung stehen, um eine Quadrik im $\mathbb{R}^2$ zu definieren? Beweise.

(b)* Wie lautet die Anzhal der Freiheitsgrade, die zur Verfügung stehen, um eine Quadrik im $\mathbb{R}^n$ zu definieren? Beweise.

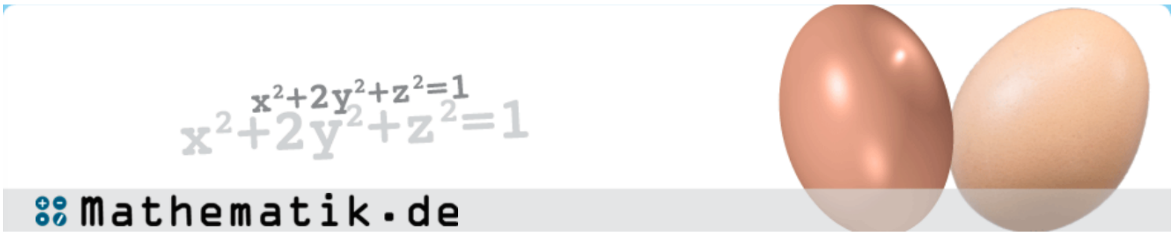

Abbildung 1: Banner der Website `mathematik.de`