Prof. Günter M. Ziegler
Albert Haase

Institut für Mathematik
Arbeitsgruppe Diskrete Geometrie

Geometrie – Übungsblatt 7

Bitte geben Sie die Aufgaben vor der Übung am **Dienstag, den 23. Juni 2015** ab.

Aufgabe 1: *Konfokale Familien* (6 Punkte)

(a) Sei $a > b > 0$. Zeige Sie, dass die Quadriken

$$Q_\lambda = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} = 1 \right\}, \quad \lambda < a^2, \lambda \neq b^2$$

konfokal sind. Was geschieht wenn $\lambda \longrightarrow b^2$ und bei $\lambda \longrightarrow a^2$?

(b) Bestimmen Sie die Gleichungen der konfokalen Familie von Parabeln mit Brennpunkt $(0, 0)$ und Direktrices parallel zur x-Achse.

Aufgabe 2: *Rang und Typ einer 2-Dimensionalen Quadrik* (4 Punkte)

Es sei $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid P(x) = 0\}$, wobei

$$P(x) = \tilde{x}^\top \tilde{A} \tilde{x}, \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}, \tilde{A} = \begin{pmatrix} c & b^\top \\ b & A \end{pmatrix}.$$

Wir bezeichnen den Rang von A mit $r = \operatorname{rank} A$ und den Rang von $\tilde{A}$ mit $\tilde{r} = \operatorname{rank} \tilde{A}$. Beweisen Sie:

- $\tilde{r} = 1 \Leftrightarrow Q$ ist eine Gerade.
- $\tilde{r} = 2 \Leftrightarrow Q$ ist ein Punkt oder zwei Geraden.
- $\tilde{r} = 3, r = 1 \Leftrightarrow Q$ ist eine Parabel.
- $\tilde{r} = 3, r = 2 \Leftrightarrow Q$ ist eine Ellipse oder eine Hyperbel.

Aufgabe 3: *Polarität und Parabeln* (5 Punkte)

Für jeden Punkt $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ definieren wir das Polare (Duale) p° zu p als die Gerade mit der Gleichung $y = ax - b$; für jede Gerade ℓ mit der Gleichung $y = cx + d$ definieren wir das Polare ℓ° zu ℓ als den Punkt $(c, -d)$. Beweisen Sie:

(a) Die so definerte Polarität ist involutiv: $(p^\circ)^\circ = p$ und $(\ell^\circ)^\circ = \ell$.

(b) $p \in \ell \Leftrightarrow \ell^\circ \in p^\circ$.

(c) $p \in p^\circ$ genau dann, wenn p auf der Parabel $y = \frac{x^2}{2}$ liegt.

Aufgabe 4: *Affin vs. Euklidisch* (5 Punkte)

Es sei C eine Hyperbel mit Asymptoten a_1 und a_2 und es sei ℓ eine Gerade. Seien P_1, P_2 die Schnittpunkte von ℓ mit a_1 und a_2. Beweisen Sie: Wenn ℓ die Hyperbel in zwei Punkten Q_1 und Q_2 schneidet, dann gilt $P_1Q_1 = P_2Q_2$, und wenn ℓ an C tangential ist, dann ist der Tangentialpunkt Q der Mittelpunkt von P_1P_2.

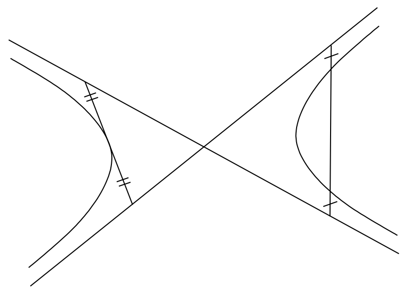

Abbildung 1: Skizze zu Aufgabe 4.