Prof. Günter M. Ziegler
Albert Haase

Institut für Mathematik
Arbeitsgruppe Diskrete Geometrie

Geometrie – Übungsblatt 8

Bitte geben Sie die Aufgaben vor der Übung am **Dienstag, den 30. Juni 2015** ab.

Aufgabe 1: *Polarität bezüglich eines Hyperboloids* (6 Punkte)

Sei $Q \subset \mathbb{R}^3$ ein einschaliges Hyperboloid mit Zentrum im Koordinatenursprung, und sei $\ell \subset Q$ eine Gerade auf dem Hyperboloid. Mit Polarität (Dualität) ist im Folgenden die Polarität bezüglich Q gemeint. Zeigen Sie:

(a) Das Polare jedes Punktes auf ℓ enthält ℓ.

(b) Die Gerade ℓ° ist selbstdual: $\ell^\circ = \ell$.

(c) Jede selbstduale Gerade im $\mathbb{R}^3$ liegt vollständig auf dem Hyperboloid.

Aufgabe 2: *Reeller projektiver Raum* (4 Punkte (+2))

Für $n \geq 1$ bezeichne $\mathbb{R}P^n$ den n-dimensionalen reellen projektiven Raum. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussaugen:

(a) $\mathbb{R}P^n$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

(b) $\mathbb{R}P^n$ ist ein kompakter topologischer Raum.

(c) $\mathbb{R}P^n$ ist wegzusammenhängend und Hausdorff.

(d) $\mathbb{R}P^n$ ist ein metrischer Raum.

(e)* $\mathbb{R}P^n$ ist einfach zusammenhängend für $n \geq 2$.

Aufgabe 3: *Projektive Quadriken* (4 Punkte)

Eine *projektive Quadrik* ist eine Teilmenge $Q \subset \mathbb{R}P^n$ der Form

$$Q = \{[v] \in \mathbb{R}P^n \colon v^t M v = 0\}$$

für eine von null verschiedene symmetrische Matrix $M \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$. Eine *affine* Quadrik ist die Nullstellenmenge eines Polynoms in $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ vom Grad 2, wie in der Vorlesung definiert.

(a) Beweisen oder widerlegen Sie: Für jede projektive Quadrik $Q \subset \mathbb{R}P^n$ ist $\widetilde{Q} := Q \cap \mathbb{R}^n = \{[v] \in Q \colon [v] = [(1,x)] \text{ für ein } x \in \mathbb{R}^n\}$ eine affine Quadrik.

(b) Für welche affinen Quadriken $\widetilde{Q}$ existiert eine projektive Quadrik Q, sodass $Q \cap \mathbb{R}^n = \widetilde{Q}$?

Aufgabe 4: *Projektive Unterräume* (6 Punkte)

(a) Es sei V ein vierdimensionaler Vektorraum. Zeigen Sie, dass sich je zwei Ebenen im zugehörigen projektiven Raum $\mathrm{P}(V)$ in einer Geraden schneiden.

(b) Es sei V ein dreidimensionaler Vektorraum über dem Körper $F_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Wieviele Punkte und Geraden enthält $\mathrm{P}(V)$? Wieviele Punkte liegen auf jeder Geraden, wieviele Geraden gehen durch jeden Punkt?