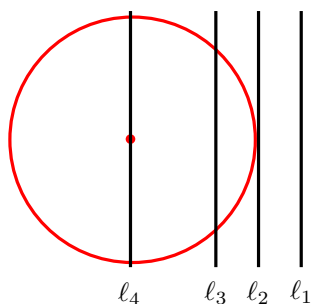


Geometrie – Übungsblatt 9

Bitte geben Sie die Aufgaben vor der Übung am **Dienstag, den 7. Juli 2015** ab.

Aufgabe 1: *Projektive Transformationen I* (6 Punkte)

- (a) Gegeben sei ein Quadrat Q in der affinen Ebene mit Ecken A, B, C und D (zyklisch bezeichnet). Geben Sie die gebrochen-lineare Funktion f an, welche die Ecken A und B fixiert und die Ecken C und D vertauscht. Wählen Sie hierzu ein konkretes Q .
- (b) Betrachten Sie Abbildung 1. Beschreiben Sie für $i = 1, \dots, 4$ das Bild derjenigen projektiven Transformation, welche die Gerade ℓ_i auf die (projektive) Gerade im Unendlichen abbildet.



Abbildungung 1: Kreis und Geraden in der affinen Ebene, wobei ℓ_2 den Kreis berührt.

Aufgabe 2: *Projektive Transformationen II* (6 Punkte)

- (a) Es sei $n \geq 2$ gerade und $g: \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ eine projektive Transformation. Zeigen Sie, dass g einen Fixpunkt hat.
- (b) Geben Sie für $n \geq 1$ ungerade projektive Transformationen $f_n: \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ an, welche keine Fixpunkte haben.

Aufgabe 3: *Gebrochen-lineare Transformationen*

(4 Punkte)

a) Geben Sie die gebrochen-linearen Transformationen an, welche die folgenden geordneten Basen aufeinander abbilden:

(i) $((0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)) \rightarrow ((0, 0), (1, 0), (0, 1), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})),$

(ii) $((0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)) \rightarrow ((0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)).$

b) Gegeben seien die folgenden affinen Quadriken:

(i) Der Einheitskreis $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$

(ii) Die Normalparabel $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y\}.$

Geben Sie die gebrochen-lineare Transformation an, welche K auf P abbildet.

Aufgabe 4: *Projektive Dualität*

(4 Punkte)

Es sei m ein Punkt in der projektiven Ebene P und m^* die Menge aller Geraden durch den Punkt m . Zeigen Sie, dass m^* eine Gerade ist.