Berlin Mathematical School

Freie Universität Berlin

Prof. Günter M. Ziegler

Albert Haase

Institut für Mathematik

Arbeitsgruppe Diskrete Geometrie

Geometrie – Übungsblatt 10

Bitte geben Sie die Aufgaben vor der Übung am **Dienstag, den 14. Juli 2015** ab.

Aufgabe 1: *Doppelverhältnis* (8 Punkte)

Betrachten Sie die Vergrößerung des sogenannten „Dürer-Polyeders“ D in Abbildung 1. Wir nehmen an, dass es sich bei D um einen entlang einer Hauptdiagonalen affin-verzerrten Würfel handelt, dessen obere und untere Ecke abgeschnitten wurden. Genauer meinen wir damit die zwei Ecken der langen Diagonalen, welche jeweils im gleichen Abstand von einer zur langen Diagonalen orthogonalen Ebene abgeschnitten werden. Das Dürer-Polyeder D ist somit bereits durch eine der sechs pentagonalen Seitenflächen vollständig bestimmt.

(a) Betrachten Sie Abbildung 2. Argumentieren Sie, warum die abgebildete pentagonale Seitenfläche bereits durch das Längenverhältnis $\mathrm{LV}(A,B,C,D) := \frac{BC}{AC}$ und den Winkel α (bis auf Skalierung) bestimmt ist.

(b) Erklären sie, warum es im Hinblick auf die Bestimmung des Dürer-Polyeders anhand der Zeichnung weniger sinnvoll ist $\mathrm{LV}(A,B,C,D)$ zu berechnen. Was ist der Vorteil, wenn wir stattdessen das Doppelverhältnis $\mathrm{DV}(A,B,C,D)$ betrachten?

(c) Zeigen Sie, dass das Doppelverhältnis $\mathrm{DV}(A,B,C,D)$ bereits das Längenverhältnis $\mathrm{LV}(A,B,C,D)$ eindeutig festlegt.

(d) Berechnen Sie das Doppelverhältnis $\mathrm{DV}(A_2,B_2,C_2,D_2)$ anhand von Abbildung 1.

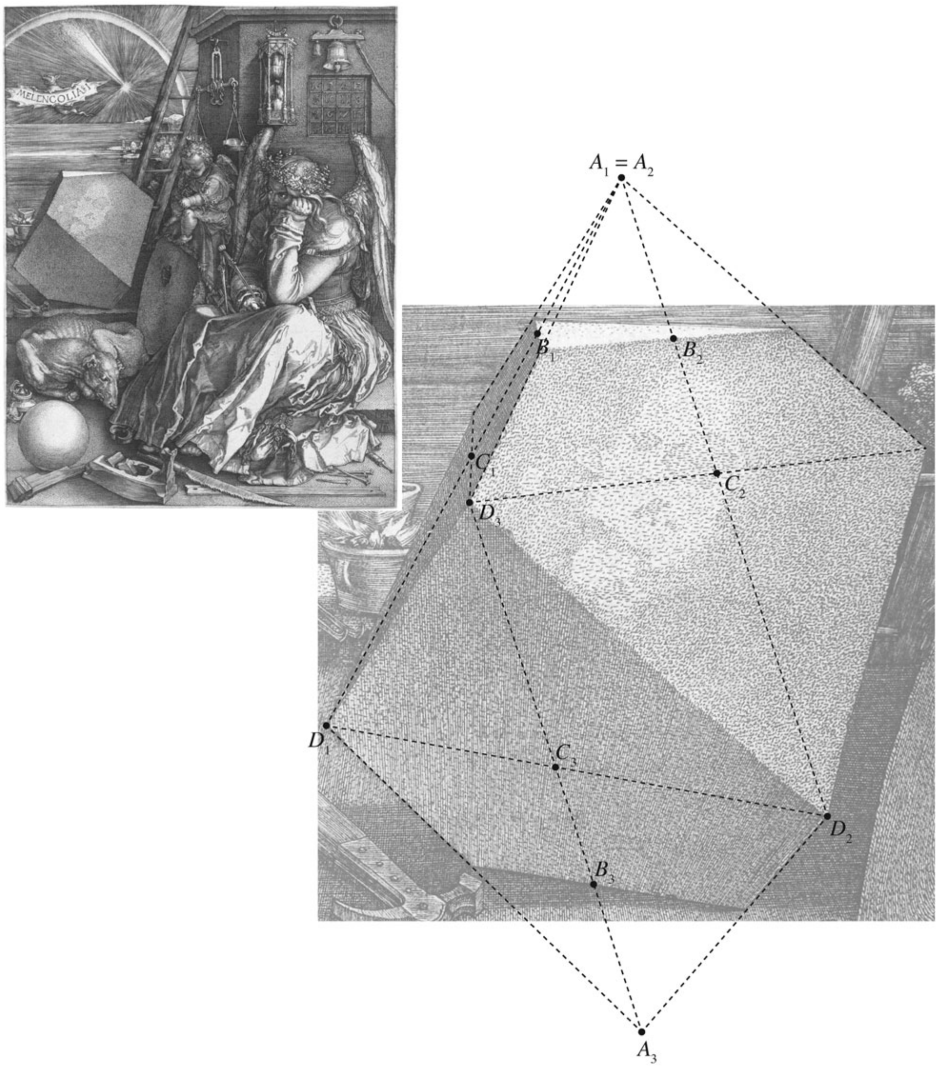

Abbildung 1: Albrecht Dürer, *Melencolia I* und Vergrößerung des Dürer-Polyeders.

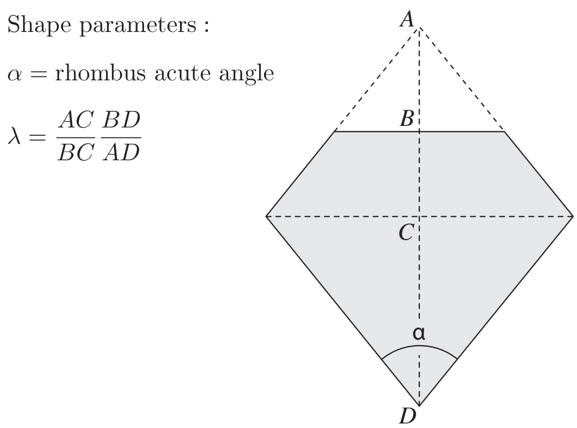

Abbildung 2: Schematische Ansicht einer Seitenfläche des Dürer-Polyeders.

Aufgabe 2: *Sphärische n-Ecke* (6 Punkte)

Für $n \geq 1$ ist ein *sphärisches* $(n+1)$-*Eck* $C_{n+1} \subset S^2$ mit den Ecken $v_0, v_1, \dots, v_n$ die Menge, die sich als Schnitt von positiven abgeschlossenen Halbsphären $H_0^+, H_2^+, \dots$ $\dots, H_{2n}^+$ ergibt, welche die Eigenschaft haben, dass v_i und v_{i+1} im Großkreis H_i liegen und die Punkte $\{v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+2}, \dots, v_n\}$ in der offenen positiven Halbsphäre $H_{i,>}^+$ enthalten sind. Eine *Seite* $v_i v_{i+1}$ von C_{n+1} ist der Schnitt von H_i mit C_{n+1}. Wir nennen C_{n+1} *regulär*, falls alle Seiten die gleiche Länge haben und alle Winkel gleich sind.

Zeigen Sie, dass reguläre sphärische n-Ecke für $n = 3, 4$ und 5 mit Winkel $120°$ existieren und berechnen Sie ihre Kantenlängen und Flächeninhalte. Gibt es reguläre sphärische 6-Ecke mit Winkel $120°$?

Aufgabe 3: *Sphärische Transformationen* (4 Punkte)

Es seien v_1, v_2, v_3 sowie w_1, w_2, w_3 die Ecken von zwei sphärischen Dreiecken mit der Eigenschaft, dass $|v_i - v_j| = |w_i - w_j|$. Zeigen Sie, dass eine Orthogonaltransformation $f \in \mathrm{O}(3)$ existiert, welche v_i auf w_i abbildet für $i = 1, 2, 3$.

Aufgabe 4: *Winkelhalbierende* (2 Punkte)

Gegeben sei eine sphärisches Dreieck Δ mit Ecken v_1, v_2, v_3. Definieren Sie zunächst den Begriff „Winkelhalbierende“ und zeigen Sie, dass sich die drei Winkelhalbierenden in einem Punkt schneiden.