

Geometrie

<https://www.mi.fu-berlin.de/kvv/course.htm?cid=11063>

— vorläufiges Skript (ohne Garantie) —
— Ich bin dankbar für Hinweise auf Fehler, Korrekturen, Verbesserungsvorschläge, etc. —
— Version vom 23. April 2013 —

Prof. Günter M. Ziegler

Fachbereich Mathematik und Informatik

FU Berlin, 14195 Berlin

Tel. 030 838 75 668

ziegler@math.fu-berlin.de

<http://page.mi.fu-berlin.de/gmziegler/>

FU Berlin, Sommersemester 2013

Diese Vorlesung für das Bachelorstudium soll als natürliche Fortsetzung von Lineare Algebra I und II Fundamente legen für Vorlesungen/Zyklen wie Diskrete Geometrie, Algebraische Geometrie und Differentialgeometrie.

Sie behandelt grundlegende Modelle der Geometrie, insbesondere

- euklidische, affine, sphärische, projektive und hyperbolische Geometrie, Möbiusgeometrie, Polarität und Dualität
- Strukturgruppen, Messen (Längen, Winkel, Volumina), explizite Berechnungen und
- Anwendungen, Beispiele sowie Illustrationsthemen.

Dabei werden weitere Bezüge hergestellt, zum Beispiel zur Funktionentheorie und zur Numerik.

- [1] Marcel Berger. *Geometry I*. Universitext. Springer, Berlin Heidelberg, 1987.
- [2] David A. Brannan, Matthew F. Esplen, and Jeremy J. Gray. *Geometry*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2012.
- [3] Gerd Fischer. *Analytische Geometrie*. Vieweg, Wiesbaden, 2001. 7. Auflage.
- [4] V. V. Prasolov and V. M. Tikhomirov. *Geometry*, volume 200 of *Translations of Math. Monographs*. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [5] Thilo Rörig. Lecture notes for the Geometry I Course at TU Berlin, Winter 2012. <http://dgd.service.tu-berlin.de/wordpress/geometryws12/>.
- [6] Alexey B. Sossinsky. *Geometries*, volume 64 of *Student Math. Library*. Amer. Math. Soc., Providence RI, 2012.

Vorbemerkungen

Dies ist eine “allgemeine” Geometrie-Vorlesung für Bachelor-Studierende.

Ich will dabei meine Begeisterung für Geometrie vermitteln, interessante Beispiele, Strukturen und Effekte vorführen, insbesondere aber Werkzeuge für die Arbeit mit geometrischen Strukturen vermitteln, die dann in ganz unterschiedliche Richtungen hilfreich sein können, insbesondere für Vorlesungszyklen wie “Diskrete Geometrie I–III” (den ich in den kommenden Semestern selber halten werde), Differentialgeometrie, Algebraische Geometrie, aber auch für Vorlesungen wie Geometry Processing und Algorithmische Geometrie.

Hier kommt ein grober Zeitplan, den wir schrittweise anpassen werden:

1. Was ist Geometrie?	8. April
2. Euklidische Geometrie, I: Der \mathbb{R}^n mit einem Skalarprodukt	12. April
3. Euklidische Geometrie, II: Spiegelungen, euklidische Bewegungen	(J.P.) 15. April
4. Diskrete Untergruppen, Spiegelungsgruppen, reguläre Polytope	19. April
5. Kristallographische Gruppen, *Hochdimensionale Effekte	22. April
6. Affine Geometrie, I	26. April
7. Affine Geometrie, II	29. April
8. Mannigfaltigkeiten, Transformationsgruppen und ihre Dimension	(J.P.) 3. Mai
9. Kegelschnitte und Quadriken, I	6. Mai
10. Kegelschnitte und Quadriken, II	10. Mai
11. *Kegelschnitte und Quadriken, III	13. Mai
12. Projektive Geometrie, I	17. Mai
— Pfingstmontag —	20. Mai
13. Projektive Geometrie, II	24. Mai
14. *Projektive Geometrie, III	27. Mai
15. “Was ist eine Geometrie”	31. Mai
16. Sphärische und elliptische Geometrie, I	3. Juni
17. Sphärische und elliptische Geometrie, II	7. Juni
18. *Sphärische und elliptische Geometrie, III	10. Juni
19. Möbiusgeometrie, I	14. Juni
20. Möbiusgeometrie, II	(J.P.) 17. Juni
21. *Möbiusgeometrie, III: Ford-Kreise und Ford-Kugeln	(J.P.) 21. Juni
22. Hyperbolische Geometrie, I	24. Juni
23. Hyperbolische Geometrie, II	28. Juni
24. *Hyperbolische Geometrie, III: Volumenschranken für Triangulierungen	1. Juli
25. Geometrie-Modelle und ihr Zusammenhang	5. Juli
26. Wiederholung / Übersicht / Perspektiven	8. Juli
27. Abschlussklausur	15. Juli

0 Was ist Geometrie? Was ist eine Geometrie? Was soll Geometrie?

0.1 Begriff

Geo = Erde, Metrie = Vermessung
Dürer 1525 “Messung, Messkunst”

0.2 Geschichte

“5000 Jahre Geometrie” (siehe [3]) in 7 Büchern:

300 v.Chr. Euklid “Elemente”: Axiomatik, ..., Ikosaeder

1525 Albrecht Dürer “Unterweysung der Messung”: Darstellende Geometrie, Perspektive, Kegelschnitte

1637 René Descartes “Discours de la Methode”: Koordinaten (siehe auch Fermat, etc.)

1827 August Möbius “Barycentrischer Calkul”: homogene Koordinaten, projektive Geometrie, Freiheitsgrade

... Gauß, Lobachevsky 1827, Bolyai 1831, etc.: “nicht-euklidische Geometrien”

1872 Felix Klein “Erlanger Programm”: einheitliche Konzeption

1854 Bernhard Riemann “Über die Hypothesen, die der Geometrie zugrunde liegen”: Differentialgeometrie, Riemann’sche Geometrie

1899 David Hilbert “Grundlagen der Geometrie”: moderne Axiomatik

0.3 Begriffe

- Euklidische Geometrie
- Projektive Geometrie
- Hyperbolische Geometrie
- Sphärische Geometrie, Elliptische Geometrie
- Möbiusgeometrie, Kreisgeometrie
- ...
- Differentialgeometrie, Riemann’sche Geometrie, ... → [Ecker, Polthier]
- Algebraische Geometrie, torische Geometrie, ... → [Altmann]
- Arithmetische Geometrie ... → [Esnault]
- Diskrete Geometrie, Polyedergeometrie, ... → [Ziegler, ...]
- Algorithmische Geometrie, Geometry Processing, ... → [Rote, Polthier]
- ...
- Darstellende Geometrie
- Grundlagen der Geometrie
- ...
- “anschauliche Geometrie” [2]
- “unvergängliche Geometrie” [1]

0.4 Eine Geometrie

Beispiel: d -dimensionale Euklidische Geometrie (\mathbb{R}^d mit starren Bewegungen, die Abstände erhalten). Dort werden wir unter anderem die folgenden Daten sammeln/beweisen

- **Menge:** \mathbb{R}^d
- **Gruppe:** $\text{Eukl}(d) \cong \mathbb{R}^n \rtimes \text{O}(n)$
 - Dimension der Gruppe = Anzahl der Freiheitsgrade = $\binom{d+1}{2}$
 - Erzeuger: Spiegelungen an Hyperebene
- **Invarianten:** Abstände, Winkel, affine Räume, Kugeln/Sphären, ...
- **Charakterisierung:** Jede bijektive Abbildung, die Abstände erhält, ist eine euklidische Bewegung
- **Objekte:** zum Beispiel Kugelpackungen, Gitter, reguläre Polyeder, ...

0.5 Problematische Begriffe

zu definieren/klären/charakterisieren:

- Dimension (u.a. Dimension einer Transformationsgruppe!)
- Volumen (u.a. von Polyedern, Kugeln, etc. – braucht man Analysis dafür?)
- Winkel

- [1] Harold Scott Macdonald Coxeter. *Unvergängliche Geometrie*. Birkhäuser, Basel, 1981. Übersetzung der 2. Auflage von “Introduction to Geometry”, 1. Auflage 1963.
- [2] David Hilbert and Stephan Cohn-Vossen. *Anschauliche Geometrie*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1932. Second edition 1996.
- [3] Christoph J. Scriba and Peter Schreiber. *5000 Jahre Geometrie*. Springer, Berlin Heidelberg, 2001.

1 Euklidische Geometrie

1.1 Der \mathbb{R}^n mit einem Skalarprodukt

1.1.1 Lineare und affine Unterräume

Modell: \mathbb{R}^n reeller Vektorraum mit der Standardbasis e_1, \dots, e_n und dem entsprechenden “euklidischen” Koordinatensystem.

Untervektorräume $U \subseteq \mathbb{R}^n$ der Dimension $\dim U$, mit $0 \leq \dim U \leq n$.

“Innere Beschreibung”:

$$U = \text{span}\{v_1, \dots, v_r\} = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r : \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}\}, \quad \text{mit } r \geq \dim U.$$

Hier gilt $r = \dim U$ wenn $\{v_1, \dots, v_r\}$ linear unabhängig ist; in diesem Fall sind die λ_i *Koordinaten* für U .

“Äußere Beschreibung”: durch ein *homogenes lineares Gleichungssystem*

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}, \quad \text{mit } A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad m \geq n - \dim U.$$

Hier hat A den Rang $n - \dim U$, und es gilt $m = n - \dim U$ wenn die Zeilen von A linear unabhängig sind.

Affine Unterräume $U \subseteq \mathbb{R}^n$ der Dimension $\dim U$, mit $-1 \leq \dim U \leq n$, sind die Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen, wobei \emptyset als affiner Unterraum der Dimension -1 betrachtet wird.

“Äußere Beschreibung”: $U = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$, mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n - \dim U$, $b \in \mathbb{R}^m$ durch ein *lineares Gleichungssystem*. Wenn b nicht im Spaltenraum von A liegt, dann ergibt dies $U = \emptyset$. Ansonsten ist b ein Punkt in U , A hat den Rang $n - \dim U$, d.h. $\dim U = n - \text{rank} A$, und es gilt $m = n - \dim U$ wenn die Zeilen von A linear unabhängig sind.

“Innere Beschreibung”: $U = u_0 + \text{span}\{v_1, \dots, v_r\}$, mit $r \geq \dim U$ und $u_0 \in \mathbb{R}^n$. Hier gilt $r = \dim U$ wenn $\{v_1, \dots, v_r\}$ linear unabhängig sind. Jeder Basispunkt mit einer (geordneten) Basis liefert uns *Koordinaten* für U . Symmetrischere Alternative: *baryzentrische Koordinaten*

$$U = \{\mu_0 u_0 + \dots + \mu_r u_r : \mu_0, \dots, \mu_r \in \mathbb{R}, \mu_0 + \dots + \mu_r = 1\},$$

wobei u_0, \dots, u_r *affin erzeugen* — zum Beispiel $b, b + v_1, \dots, b + v_r$. Die Punkte u_0, \dots, u_r sind *affin unabhängig* wenn es keine nicht-triviale Abhängigkeit $\mu_0 u_0 + \dots + \mu_r u_r = 0$ mit $\mu_0 + \dots + \mu_r = 0$ gibt.

Unter anderem haben wir als affine Unterräume: Punkte, Geraden, Ebenen (Dimension 2), \dots , Hyperebenen (Dimension $n - 1$). Ein affiner Unterraum hat keinen natürlichen Basispunkt.

1.1.2 Abstände

Definition 1.1 (Metrik). Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist $d(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ der *Abstand* zwischen den durch x, y bestimmten Punkten.

Bemerkung: Diese fundamentale Definition beschreibt, wie Abstände gemessen werden; sie ist elementargeometrisch durch den *Satz von Pythagoras* motiviert!

Definition 1.2 (Norm). Die *Norm* von $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet die Länge des Vektors $0x$, also der Abstand des Punktes x vom Nullpunkt: $|x| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Damit lässt sich die Metrik auch als $d(x, y) = |x - y|$ beschreiben.

Definition 1.3 (Standard-Skalarprodukt). Für $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Proposition 1.4 (Polarisierung). *Aus der Norm kann das Skalarprodukt rekonstruiert werden, da für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$*

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2\langle x, y \rangle.$$

Proposition 1.5 (Dreiecksungleichung). *Für $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ gilt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, mit Gleichheit nur wenn x, y, z in der richtigen Reihenfolge auf einer (affinen) Geraden liegen.*

Beweis. OBdA $y = 0$, dann reduziert sich die Ungleichung nach Quadrieren auf $-\langle x, z \rangle \leq |x||z|$, also die Cauchy-Schwarz¹-Ungleichung. \square

1.1.3 Orthogonalität

Definition 1.6 (Orthogonalität). Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ sind *orthogonal*, wenn $\langle x, y \rangle = 0$.

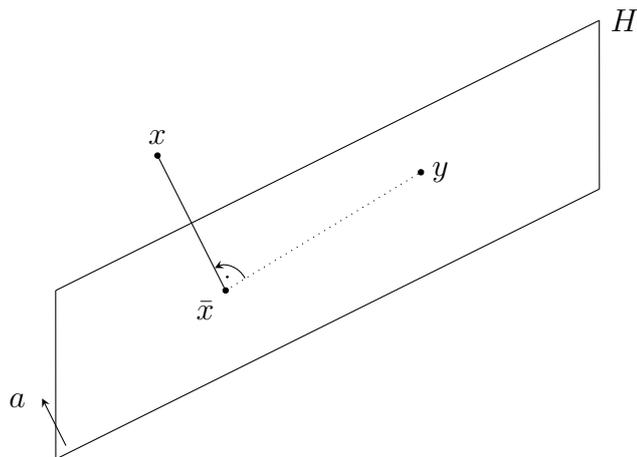
Orthogonalisierung. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ kann man $\bar{y} := y - \frac{\langle y, x \rangle}{|x|^2} x$. Und es gilt $\bar{y} \neq 0$, wenn y nicht von x linear abhängig ist. Iteration dieses Schemas ergibt die *Gram-Schmidt Orthogonalisierung*. (Einfacheres Rechenschema, wenn man die Vektoren jeweils auf Länge 1 normiert.)

Orthogonale Projektion eines Punkts x auf eine Hyperebene $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle = \alpha\}$ für $a \neq 0$: der eindeutige Bildpunkt $\bar{x} \in H$ lässt sich auf unterschiedliche Weise beschreiben/charakterisieren.

Aufgabe. Für eine Hyperebene $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle = \alpha\}$ mit $a \neq 0$ und einen Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ sind äquivalent:

- (i) $d(\bar{x}, x)$ ist minimal für $\bar{x} \in H$
- (ii) $\langle x - \bar{x}, y - \bar{x} \rangle = 0$ für alle $y \in H$
- (iii) $\bar{x} = x + ta$ mit $t \in \mathbb{R}$ so dass $\bar{x} \in H$
- (iv) $\bar{x} = x + \frac{\alpha - \langle a, x \rangle}{\langle a, a \rangle} a$

¹Hermann Amandus Schwarz (1843-1921 Berlin), http://de.wikipedia.org/wiki/Hermann_Amandus_Schwarz



1.1.4 Beispiele: Punktmengen mit wenigen Abständen

Theorem 1.7. *Im \mathbb{R}^n gibt es $n + 1$ Punkte, aber keine $n + 2$ Punkte, die paarweise voneinander denselben Abstand haben.*

Beweis (für den ersten Teil der Aussage). Betrachte die Punktmenge $e_1, \dots, e_n, t(e_1 + \dots + e_n)$ (für Abstand $\sqrt{2}$). Das liefert eine quadratische Gleichung für t , mit zwei Lösungen für t . \square

Aufgabe. Man beweise, dass $k + 1$ Punkte, die paarweise denselben Abstand 1 haben, affin unabhängig sind, also einen affinen Raum der Dimension k aufspannen.

Problem. Wie viele Punkte kann es im \mathbb{R}^n geben, zwischen denen nur zwei verschiedene Abstände auftreten? — nicht vollständig gelöst!

Beispiel 1.8. Zwischen den $\binom{d}{2}$ Punkten $e_i + e_j \in \mathbb{R}^d$ ($1 \leq i < j \leq d$) gibt es nur zwei verschiedene Abstände.

Aufgabe. Man beschreibe explizit $\binom{d+1}{2}$ Punkte im \mathbb{R}^d (oder $\binom{d}{2}$ Punkte im \mathbb{R}^{d-1}), zwischen denen es nur zwei verschiedene Abstände gibt.

Aufgabe. (*) Zwischen n Punkten in der Ebene \mathbb{R}^2 kann der größte Abstand höchstens n mal auftreten. (Hopf & Pannwitz, siehe [8])

1.1.5 Sphären und Bälle

Definition 1.9 (Bälle und Sphären). Der Einheitsball im \mathbb{R}^n ist

$$B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}.$$

Allgemeiner betrachten wir den Ball mit Mittelpunkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und Radius $r > 0$:

$$B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq r\}.$$

Die Einheitskugel im \mathbb{R}^n ist

$$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}.$$

Allgemeiner betrachten wir die Kugel mit Mittelpunkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und Radius $r > 0$:

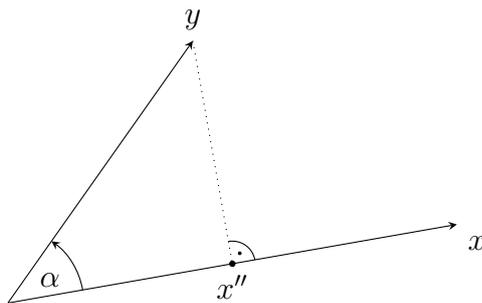
$$S(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}.$$

1.1.6 Winkel

Definition 1.10. Den Winkel zwischen zwei Vektoren $0x$ und $0y$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$ definieren wir als die Zahl $\alpha \in [0, \pi]$ mit

$$\langle x, y \rangle =: |x||y| \cos \alpha.$$

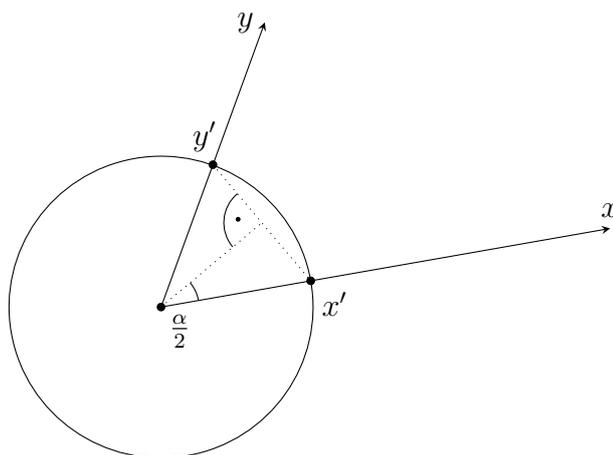
Warum ist das sinnvoll? Man überlegt sich (Gram–Schmidt Orthogonalisierung! Zeichnung!), dass für $x'' := \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} x$ das Dreieck $0x''y$ rechtwinklig ist — und deshalb $\cos \alpha = \frac{|x''|}{|y|} = \frac{\langle x, y \rangle}{|x||y|}$.



Alternative (braucht Analysis/Geometrie auf der Kugel(!), aber vielleicht intuitiver): Den Winkel $\sphericalangle(x, y)$ zwischen zwei Vektoren $x, y \neq 0$ definieren wir als den *Abstand* zwischen $x' := \frac{1}{|x|}x$ und $y' := \frac{1}{|y|}y$, aber gemessen auf der Einheitskugel $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$. Man überlegt sich (Trigonometrie!), dass dann $|x' - y'| = 2 \sin(\frac{\alpha}{2})$ ist, also

$$\alpha = 2 \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}|x' - y'|\right).$$

Jetzt muss man natürlich zeigen, dass die beiden Definitionen dasselbe liefern!



Lemma 1.11 (Winkel sind additiv. Dreiecksungleichung für Winkel!). Für Vektoren $x, y, z \neq 0$ gilt

$$\sphericalangle(x, z) \leq \sphericalangle(x, y) + \sphericalangle(y, z),$$

mit Gleichheit nur wenn x, y, z linear abhängig sind, mit y “zwischen” x und z liegt.

Beweis. Dreiecksungleichung auf der Kugel. □

1.1.7 Volumen

Volumen kann man für “geeignete” Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ unterschiedlich definieren:

1. elementar: Zerschneiden und Zusammensetzen (Isometrien)
2. mit Hilfe der Determinantenfunktion (für Würfel, Spate, etc.)
3. Riemann’sches Volumen: mit kleinen Würfelchen ausschöpfen (vgl. Analysis-Vorlesung).

Das führt zu dem Riemann-Integral $\text{vol}(A) := \int_A 1 dx$.

Die Volumengleichheit z.B. von Parallelotopen, also Formeln von der Form

$$\text{vol}\{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n : 0 \leq \lambda_i \leq 1\} = |\det(a_1, \dots, a_n)|$$

folgen leicht mit Hilfe von Analysis-Methoden — aber lässt sich lässt sich Volumengleichheit von Polyedern “elementar” durch Zerlegungsgleichheit in kongruente Stücke begründen? Das war “Hilberts drittes Problem”; es wurde von Dehn *negativ* gelöst: Es gibt Tetraeder mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe, die nicht “zerlegungsgleich” sind. Siehe [1, Kap. 9] [2].

1.2 Kongruenztransformationen

Definition 1.12 (Kongruenztransformationen). Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Kongruenztransformation* oder *euklidische Abbildung* oder *Isometrie* wenn sie Abstände erhält, also

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Wir betrachten erst einmal Beispiele.

1.2.1 Translationen

Translationen: $T_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto x + a$.

Die Translationen bilden eine abelsche Gruppe, die wir mit $(\mathbb{R}^n, +)$ identifizieren können.

1.2.2 Spiegelungen

Die Spiegelung von x an der Hyperebene $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle = \alpha\}$ mit $a \neq 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$S_H : x \mapsto x + 2 \frac{\alpha - \langle a, x \rangle}{\langle a, a \rangle} a.$$

ist eine Kongruenztransformation. Sie ist auch eine *Involution*: doppelt spiegeln ergibt die Identität, $S_H \circ S_H = \text{id}$.

Spiegelung an einem affinen Unterraum: Genauso!

1.2.3 Orthogonale Abbildungen

Proposition 1.13. *Isometrien, die den Nullpunkt festhalten, sind orthogonale Abbildungen. Solche Abbildungen sind also insbesondere linear, und können also in der Form $x \mapsto Ax$ beschrieben werden, mit orthogonaler Matrix A .*

Beweis. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Isometrie mit $f(0) = 0$. Dann gilt insbesondere $|f(x)| = |x|$ für alle x , und deshalb $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ wegen *Polarisation*:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2 - |x - y|^2).$$

Nun sei e_1, \dots, e_n eine Orthonormalbasis (ONB), zum Beispiel die Standardbasis (wir setzen ja das Standardskalarprodukt voraus). Dann gilt für jeden Vektor

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i,$$

und deshalb, weil auch $f(e_1), \dots, f(e_n)$ eine ONB ist, und weil f das Skalarprodukt erhält,

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \langle f(x), f(e_i) \rangle f(e_i) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle f(e_i).$$

Daran sieht man, dass f linear ist. □

Lemma 1.14. Eine lineare Abbildung $x \mapsto Ax$ ist genau dann orthogonal, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen gilt:

- sie eine Orthonormalbasis auf eine Orthonormalbasis abbildet,
- sie jede Orthonormalbasis auf eine Orthonormalbasis abbildet,
- die Spalten von A eine Orthonormalbasis bilden,
- $A^t A = E_n$,
- die Zeilen von A eine Orthonormalbasis bilden.

Jede orthogonale Abbildung hat Determinante $+1$ oder -1 . Die orthogonalen Abbildungen des \mathbb{R}^n (und damit die darstellenden Matrizen) bilden eine Gruppe, die *orthogonale Gruppe*

$$O(n) = \{A \in \mathbb{R}^n : A^t A = E_n\}.$$

Die orientierungserhaltenden orthogonalen Abbildungen bilden eine Untergruppe, die *spezielle orthogonale Gruppe*

$$SO(n) = \{A \in \mathbb{R}^n : A^t A = E_n, \det A = 1\}.$$

Die Gruppe $O(n)$ ist nicht kommutativ für $n \geq 2$, $SO(n)$ ist nicht kommutativ für $n > 2$.

Theorem 1.15 (Normalformsatz für orthogonale Abbildungen). Für jede orthogonale Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt es eine Zerlegung des \mathbb{R}^n in ein- und zweidimensionale invariante orthogonale Unterräume, so dass

- auf jedem der ein-dimensionalen invarianten Unterräumen ist die Abbildung die Identität oder ihr Negatives,
- auf jedem der zwei-dimensionalen invarianten Unterräumen ist die Abbildung eine Drehung um einen Winkel im Intervall $]0, \pi[$.

Äquivalent dazu: für jede orthogonale Matrix $A \in O(n)$ gibt es $S \in O(n)$ so dass $S^{-1}AS$ eine Blockdiagonalmatrix ist

$$S^{-1}AS = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, D(\alpha_1), \dots, D(\alpha_k))$$

mit Einsen, Minus-Einsen und 2×2 Drehmatrizen zu Winkeln $0 < \alpha_i < \pi$ auf der Diagonale, also $D(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Lemma 1.16. Jede orthogonale Abbildung der Determinante $+1$ kann stetig (innerhalb der Gruppe $O(n)$!) in die Identität deformiert werden.

Jede orthogonale Abbildung der Determinante -1 kann stetig in die Spiegelung $s_1 : x \mapsto x - 2x_1 e_1$ deformiert werden.

Korollar 1.17. Für $n \geq 1$ hat die Gruppe $O(n) \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$ zwei Zusammenhangskomponenten, nämlich die spezielle orthogonale Gruppe $SO(n)$ und die Nebenklasse $SO(n)s_1 = \{A \in \mathbb{R}^n : A^t A = E_n, \det A = -1\}$.

Korollar 1.18. Jede orthogonale Abbildung des \mathbb{R}^n kann aus höchstens n Spiegelungen an Hyperebenen durch den Nullpunkt erzeugt werden. Im Allgemeinen reichen dafür jedoch $n - 1$ Spiegelungen nicht aus.

1.2.4 Allgemeine Kongruenztransformationen

Die Gruppe der Isometrien des \mathbb{R}^n (also der “euklidischen Bewegungen” oder “Kongruenztransformationen”) enthält einerseits die Untergruppe der Translationen — die wir mit \mathbb{R}^n identifizieren — andererseits die orthogonalen Abbildungen, also die Isometrien, die den Nullpunkt festlassen.

Die Schnittmenge zwischen diesen beiden Untergruppen enthält nur die Nullabbildung (die einzige Translation, die den Nullpunkt festlässt).

Jede Isometrie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ kann man als “orthogonale Abbildung gefolgt von einer Translation” beschreiben, also als $f : x \mapsto Ax + b$ für $A \in O(n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Dabei sind $b = f(0)$ und damit auch A durch f eindeutig festgelegt.

Theorem 1.19. *Die volle Gruppe der euklidischen Bewegungen ist*

$$\text{Eukl}(n) = \{f : f(x) = Ax + b \text{ für ein } A \in O(n), b \in \mathbb{R}^n\}.$$

Achtung: Trotzdem ist die Gruppe der euklidischen Bewegungen **nicht** einfach das Produkt $\mathbb{R}^n \times O(n)$, weil die Translationen und die orthogonalen Abbildungen nicht kommutieren. Sie kann strukturell beschrieben werden als ein *semidirektes* Produkt “ $\mathbb{R}^n \rtimes O(n)$ ”, das gebildet werden kann, weil die Gruppe der orthogonalen Abbildungen $O(n)$ als eine Gruppe von Automorphismen auf der Gruppe der Translationen (isomorph zu \mathbb{R}^n) wirkt. (Siehe Fischer [3, Abschnitte I.3.4–I.3.6].) In dem semidirekten Produkt bilden die Translationen eine *normale* Untergruppe: Jede Konjugation einer Translation $x \mapsto x + a$ hat die Form

$$x \mapsto S^{-1}(((Sx + b) + a) - b) = x + S^{-1}a,$$

ist also eine Translation.

1.2.5 Erzeugung durch Spiegelungen

Korollar 1.20. *Jede Kongruenztransformation im \mathbb{R}^n kann als Produkt von höchstens $n + 1$ Spiegelungen an Hyperebenen dargestellt werden — von denen alle, bis auf möglicherweise die letzte, Hyperebenen durch den Nullpunkt sind.*

Im Allgemeinen reichen dafür jedoch n Spiegelungen nicht aus.

Aufgabe. Wie sieht die letzte Spiegelung konkret aus? Man beweise damit die Aussage. (Korollar 1.18 darf benutzt werden.)

1.2.6 Hauptsatz der Euklidischen Geometrie

Theorem 1.21. *Sind p_0, \dots, p_m und p'_0, \dots, p'_m Punkte im \mathbb{R}^n mit*

$$d(p_i, p_j) = d(p'_i, p'_j) \quad \text{für alle } i, j \ (0 \leq i < j \leq m),$$

so gibt es eine euklidische Transformation $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax + b$, mit $A \in O(n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$, so dass $f(p_i) = p'_i$ für alle i gilt, $0 \leq i \leq m$.

Wenn die Punkte p_i nicht alle auf einer Hyperebene liegen (was insbesondere $m \geq n$ erzwingt), dann ist diese euklidische Transformation eindeutig bestimmt.

Beweis. Nach einer Verschiebung um den Vektor $b := p'_0 - p_0$ dürfen wir annehmen, dass $p_0 = p'_0 = 0$ ist.

Nun wenden wir das Gram–Schmidt-Verfahren auf die Vektoren p_1, \dots, p_m an, und erhalten daraus eine Orthogonalbasis $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n$. Achtung: wenn die Vektoren p_i nicht linear unabhängig sind, können dabei einige Vektoren durchaus Null ergeben – diese werden dann nicht weiter berücksichtigt. Wenn die Vektoren nicht aufspannen, wird am Ende zu einer Orthogonalbasis ergänzt – in diesem Fall ist die Basis $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n$ nicht eindeutig durch die Folge p_1, \dots, p_m bestimmt.

Genauso erzeugen wir mit dem Gram–Schmidt-Verfahren aus der Folge p'_1, \dots, p'_m von Vektoren eine Orthogonalbasis $\hat{p}'_1, \dots, \hat{p}'_n$. Dabei läuft das Gram–Schmidt-Verfahren ganz analog ab, mit denselben Koeffizienten, weil nämlich die Koeffizienten aus Skalarprodukten zwischen den Vektoren entstehen, und diese (*Polarisierung!*) durch die Normen der Vektoren und ihrer Differenzen bestimmt sind, und diese Daten sind nach Annahme für die Folgen p_1, \dots, p_m und p'_1, \dots, p'_m gleich.

Nun definiert die Vorschrift $f : \hat{p}_j \mapsto \hat{p}'_j$ eine *orthogonale* Abbildung f (weil sie eine ONB auf eine ONB abbildet). Die Tatsache, dass die \hat{p}_j mit denselben Koeffizienten aus den p_i gewonnen werden, wie die \hat{p}'_j aus den p'_i ergibt insbesondere, dass auch die p_i mit denselben Koeffizienten aus den \hat{p}_j dargestellt werden können wie die p'_i aus den \hat{p}'_j . Also bildet f auch p_i auf p'_i ab.

In dem Fall, dass keine Basisergänzung nötig ist, die p_i also den \mathbb{R}^n aufspannen, ist die Abbildung f sogar eindeutig. \square

Korollar 1.22 (Kongruenzsatz “SSS”). *Wenn zwei Dreiecke im \mathbb{R}^n gleiche Seitenlängen haben, dann sind sie kongruent.*

1.2.7 Freiheitsgrade

Bemerkung 1.23 („Freiheitsgrade“ — Dimension der Gruppe der Kongruenztransformationen). Jede Kongruenztransformation bildet $(0, e_1, \dots, e_n)$ auf *orthogonalen Rahmen* ab. Für den ersten Punkt liegt das Bild beliebig im \mathbb{R}^n , der zweite liegt auf einer $(n-1)$ -dimensionalen Sphäre, der nächste auf einer $(n-2)$ -Sphäre, usw. Daher ist die Anzahl der „Freiheitsgrade“ insgesamt $n + (n-1) + \dots + 1 = \frac{1}{2}(n+1)n$.

Alternative Rechnung: wir müssen die Bilder von $n+1$ Punkten festlegen, das sind $(n+1)n$ Variable, aber es gibt $\binom{n+1}{2}$ Bedingungen/paarweise Distanzen, also ist die Anzahl der Freiheitsgrade: $(n+1)n - \binom{n+1}{2} = \frac{1}{2}(n+1)n$.

Technisch (Analysis III): die Gruppe ist eine *Lie-Gruppe*, also insbesondere eine *Mannigfaltigkeit* der Dimension $\binom{n}{2} + n = \binom{n+1}{2} = \frac{1}{2}n(n+1)$.

1.2.8 Anwendung von Kongruenztransformationen

Wenn wir “euklidische Geometrie” betreiben, dann interessieren uns Eigenschaften von Figuren, die sich unter Isometrien nicht ändern. Das sind insbesondere alle Eigenschaften, die sich aus Längen und Längenverhältnissen gewinnen lassen, darunter

- Volumen
- Winkel

Dementsprechend definieren wir Winkel in einem Dreieck einfach dadurch, dass wir (nach einer Isometrie) annehmen, dass die betreffende Ecke im Nullpunkt liegt, und die daran anliegenden Kanten eben Vektoren x, y sind.

Notation: Im Dreieck ABC bezeichnen wir den Winkel zwischen \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{AC} , also den “Winkel bei A ”, mit $\alpha := \sphericalangle BAC$.

Freiheitsgrade/Kongruenztransformationen ausnutzen!

Unter Verwendung von Kongruenztransformationen gelingt uns auch der vollständige Beweis von Satz 1.7:

Theorem 1.24. *Im \mathbb{R}^n gibt es $n+1$ Punkte, aber keine $n+2$ Punkte, die paarweise voneinander den Abstand 1 haben.*

Charakterisierung von Projektionen auf affinen Unterraum U durch $x \mapsto \bar{x} \in U$ mit

- $|x - \bar{x}|$ minimal
- $\langle x - \bar{x}, y - \bar{x} \rangle = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n, y \in U$.

Aufgabe. Projektionen: Charakterisierung von *linearen* Projektionen $x \mapsto Px$ durch $P^2 = P$, von *orthogonalen* Projektionen durch $P^t P = P$ (also insbesondere: die Matrix ist symmetrisch!).

1.3 Diskrete Bewegungsgruppen

Definition 1.25 (Gruppenwirkung). Eine *Gruppenwirkung* einer Gruppe G auf einem topologischen Raum X ordnet jedem Element g der Gruppe einen Homöomorphismus $\phi_g : X \rightarrow X$ zu, so dass dem neutralen Element e die Identität $\phi_e = \text{id}$ zugeordnet wird, und so dass die Verknüpfung der Gruppe der Komposition von Homöomorphismen entspricht, also $\phi_{gh}(x) = (\phi_g \circ \phi_h)(x)$.

(Üblicherweise wird die Wirkung nicht explizit genannt, und statt $\phi_g(x)$ schreibt man oft einfach $g \cdot x$ oder gx .)

Beispiel: die naheliegende Wirkung von der Gruppe der Kongruenztransformationen $\text{Eukl}(n) = \{x \mapsto Ax + b : A \in O(n), b \in \mathbb{R}^n\}$ und ihrer Untergruppen auf \mathbb{R}^n .

Definition 1.26 (Diskrete Transformationsgruppe). Die Wirkung einer Gruppe G auf einem topologischen Raum X ist *diskret*, wenn alle Bahnen $Gx = \{g \cdot x : g \in G\}$ (Orbits) diskret sind (also jeder Punkt des Orbits eine offene Umgebung hat, die keinen weiteren Punkt des Orbits enthält).

Beispiele 1.27. Jede endliche Gruppenwirkung (auf einem Hausdorff-Raum) ist diskret.

Die Wirkung von \mathbb{Z}^n auf \mathbb{R}^n (Translation um beliebige ganzzahlige Vektoren) ist diskret. Die Orbits sind Gitter und ihre Translate.

Beispiel 1.28. Die Wirkung von \mathbb{R}^n auf \mathbb{R}^n (Translation um beliebige reelle Vektoren) ist nicht diskret: Der einzige Orbit ist \mathbb{R}^n .

Die Wirkung von $O(n)$ auf \mathbb{R}^n ist nicht diskret. Die Orbits sind die Sphären rS^{n-1} mit $r > 0$, und der Nullpunkt.

Beispiel 1.29. Auf \mathbb{R}^2 sei $\langle D_\varphi \rangle$ die Gruppe, die durch eine Drehung um Winkel φ erzeugt wird. Diese wirkt genau dann diskret, wenn sie endlich ist, also für $\varphi = \frac{m'}{m}2\pi$.

Im indiskreten Fall gilt $\langle D_\varphi \rangle \cong \mathbb{Z}$. Im endlichen Fall gilt $\langle D_\varphi \rangle \cong \mathbb{Z}/m$.

Lemma 1.30. *Jede endliche Untergruppe von $\text{Eukl}(n)$ ist zu einer Untergruppe von $O(n)$ äquivalent (d.h. konjugiert bzgl. einer Translation).*

Beweis. Man rechnet nach, dass alle Bahnen denselben Schwerpunkt haben, und Translation dieses Schwerpunkts in den Nullpunkt identifiziert die Untergruppe mit einer Untergruppe von $O(n)$. \square

Endliche/diskrete Untergruppen erzeugen interessante und wichtige Muster und Strukturen (reguläre Polytope, Wurzelsysteme, Gitter, Pflasterungen, Mosaik) und sind auch aus Perspektive der Algebra (Lie-Gruppen, algebraische Gruppen) und der Anwendungen (Kristallographie, Kodierungstheorie) zentral wichtig.

Wir haben gesehen, dass $\text{Eukl}(n)$ durch Spiegelungen erzeugt ist. Uns interessieren auch die diskreten Untergruppen, die durch Spiegelungen erzeugt sind.

Definition 1.31 (Spiegelungsgruppen; kristallographische Gruppen). Eine diskrete Untergruppe $G \subset \text{Eukl}(n)$ heißt (endliche bzw. affine) *Spiegelungsgruppe* (oder *Coxeter-Gruppe*) wenn sie durch Spiegelungen erzeugt ist.

Eine diskrete Untergruppe $G \subset \text{Eukl}(n)$ heißt *kristallographisch*, wenn sie n linear unabhängige Translationen enthält.

Proposition 1.32. *Klassifikation der endlichen Untergruppen von $\text{Eukl}(2)$: jede solche Untergruppe ist*

- *entweder eine zyklische Gruppe C_m von Drehungen um ein Vielfaches von $2\pi/m$ um einen festen Punkt, $|C_m| = m$, für $m \geq 1$,*
- *oder eine Diedergruppe D_{2m} , also die Symmetriegruppe eines regelmäßigen m -Ecks, die durch Spiegelungen in zwei Achsen mit Winkel π/m erzeugt wird, $|D_{2m}| = 2m$, für $m \geq 1$.*

Beweis. Mit Lemma 1.30 reduziert man das auf die Analyse von Untergruppen von $O(2)$. \square

Beispiel 1.33. Die Symmetriegruppe des regulären $(n-1)$ -dimensionalen Simplex ist isomorph zu \mathfrak{S}_n . Sie ist eine Spiegelungsgruppe.

Die Symmetriegruppe des n -dimensionalen Würfels ist isomorph zu $\mathbb{Z}_2^n \rtimes \mathfrak{S}_n$. Dabei ist \mathbb{Z}_2^n die normale Untergruppe der Ordnung 2^n , die durch die Spiegelungen in den Koordinatenebenen erzeugt wird (also durch Diagonalmatrizen mit ± 1 in den Diagonaleinträgen dargestellt wird). Sie ist eine Spiegelungsgruppe.

Analog zu Simplex und Würfel:

Proposition 1.34. *Jede endliche Spiegelungsgruppe im \mathbb{R}^n wird durch die Spiegelungen in den Wänden eines simplizialen Kegels erzeugt, dessen Diederwinkel π/m_{ij} sind, für natürliche Zahlen $m_{ij} \geq 2$.*

Theorem 1.35 (Klassifikation der irreduziblen endlichen Coxeter-Gruppen). *Die endlichen irreduziblen Spiegelungsgruppen sind:*

- ▷ A_n : Symmetriegruppe des n -Simplex, $n \geq 1$,
- ▷ BC_n : Symmetriegruppe des n -Würfels, $n \geq 2$,
- ▷ D_n : Symmetriegruppe des Wurzelgitters vom Typ D
- ▷ E_6, E_7, E_8 : Symmetriegruppen des Wurzelgitters vom Ausnahmetyp E ,
- ▷ F_4 : Symmetriegruppe des 24-Zells,
- ▷ G_2 : Ausnahme Lie-Algebra (dieselbe Gruppe wie $I_2(6)$),
- ▷ H_3, H_4 : Symmetriegruppen von Ikosaeder/Dodekaeder und 120-Zell/600-Zell,
- ▷ $I_2(m)$: Symmetriegruppe des m -Ecks.

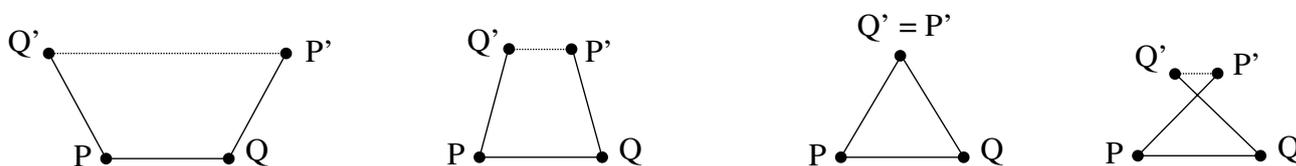
Achtung: Notations-Kollision bei C_m, D_m !

Es gibt eine analoge Klassifikation der affinen Spiegelungsgruppen, siehe Bourbaki.

Lemma 1.36 (Kristallographische Beschränkung). *Ist $G \subset \text{Eukl}(n)$ eine kristallographische Gruppe (somit diskret), und ist $f \in G$ eine orthogonale Abbildung, so treten als Drehwinkel in der Normalform (vgl Theorem 1.15) nur $2\pi/2, 2\pi/3, 2\pi/4$ und $2\pi/6$ auf.*

Beweis. Wegen Theorem 1.15 reicht es, sich auf zweidimensionale Unterräume einzuschränken. Wir betrachten daher nur den Fall $n = 2$.

Es sei P ein Drehzentrum mit Drehwinkel $2\pi/m$. (Für andere Winkel ist die Gruppe nicht diskret, s.o.) Die anderen Elemente von G bilden P auf unendlich viele andere Drehzentren Q_1, Q_2, \dots ab. Sei Q eines, das minimalen Abstand zu P hat. Dann bildet die Drehung um P um den Winkel $2\pi/n$ das Drehzentrum Q auf das Drehzentrum Q' ab, und eine Drehung um den Winkel $-2\pi/m$ bildet das Drehzentrum P auf das Drehzentrum P' ab.



Ist $m = 6$ so ist $P' = Q'$. Ist $m \geq 7$, oder $m = 5$, so liegt P' näher an Q' als P an Q , im Widerspruch zur Minimalität des Abstands. Es bleiben nur $n = 2, 3, 4$ oder 6 . \square

Dieser Satz wurde über lange Zeit fehlinterpretiert in dem Sinne, dass Kristalle keine fünfzählige Symmetrie haben können. Dies wurde theoretisch 1973/1974 von Roger Penrose und Robert Ammann (“Penrose-Pflasterungen”) und praktisch 1984 von Dan Shechtman (Nobelpreis für Chemie 2011).

Theorem 1.37 (Hilberts 18. Problem: Ludwig Bieberbach 1911). *Es gibt nur endlich viele kristallographische Gruppen in jeder Dimension.*

In der Ebene gibt es 17 verschiedene solche Gruppenwirkungen, im Raum sind es 230.

Beim Zählen muss man aufpassen, weil z.B. die Gruppen isomorph, aber die Gruppenwirkungen unterschiedlich sein könnten, etc. Leseempfehlung: Sossinsky [10, Chap. 4].

Beachte: $O(2)$ enthält unendlich viele verschiedene irreduzible Spiegelungsgruppen, nämlich $I_2(m)$, $m \geq 3$!

1.4 Hochdimensionale Effekte

1.4.1 Volumen von Kugel und Würfel

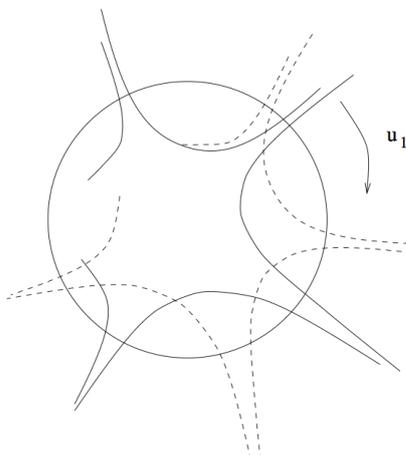
Das Volumen der Kugel vom Radius 1

$$\text{Vol}(B^n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \sim \frac{\pi^{n/2}}{\frac{n!}{2}} \sim \left(\frac{2\pi e}{n}\right)^{n/2}$$

ist für großes n (d.h. in hoher Dimension) verschwindend klein verglichen mit dem Volumen

$$\text{Vol}([-1, 1]^n) = 2^n \quad \text{oder auch} \quad \text{Vol}([0, 1]^n) = 1.$$

Daher die Zeichnung (auf Anregung von Vitaly Milman, 1998), die die Sphäre wie eine Amöbe zeigt:



Wer einen *zufälligen* Punkt in der Einheitskugel konstruieren will, kann also nicht einfach Zufallswerte in $[-1, 1]^n$ nehmen ...

1.4.2 Lange Diagonalen im Würfel

Setzen wir 2^n Bälle vom Radius 1 an die Ecken des n -Würfels $[-1, 1]^n$, dann berühren die sich gerade. Alle Bälle sind in $[-2, 2]^n$ enthalten.

Setzen wir noch einen möglichst großen Ball in den Mittelpunkt, so dass der die anderen Bälle gerade berührt. Radius: $\sqrt{n} - 1$.

Für $n > 4$ ist der innere Ball größer als die äußeren. Für $n > 9$ ragt er sogar aus dem Würfel $[-2, 2]^n$ heraus! (Siehe Matoušek [6, Chap. 13])

1.4.3 Kusszahlen und Gitterpackungen

Definition 1.38. Die *Kusszahl* κ_n ist die maximale Anzahl von disjunkten Kugeln vom Radius 1, die die Einheitskugel B^n vom Radius 1 berühren können, ohne sich zu überlappen.

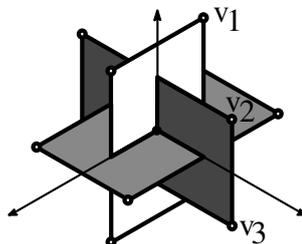
Äquivalent dazu: κ_n ist die maximale Anzahl von Vektoren $v_i \in \mathbb{R}^n$ mit $|v_i| = 1$ und $\langle v_i, v_j \rangle \leq 1$ für $i \neq j$.

Theorem 1.39.

- Für $n = 1$ gilt $\kappa_1 = 2$,
- Für $n = 2$ gilt $\kappa_2 = 6$,
- Für $n = 3$ gilt $\kappa_3 = 12$ (Newton–Gregory-Problem, Beweis van der Waerden und Schütte 1953),
- Für $n = 4$ gilt $\kappa_4 = 24$ (Konfiguration des 24-Zells, Beweis von Musin 2008),
- Für $n = 8$ gilt $\kappa_8 = 240$ (Konfiguration der E_8 -Wurzeln, Beweis von Levenstein 1979 und Odlyzko & Sloane 1979),
- Für $n = 24$ gilt $\kappa_{24} = 196560$ (Konfiguration des Leech-Gitters, Beweis von Levenstein 1979 und Odlyzko & Sloane 1979).

Beweise sind für $n = 1, 2$ trivial, für $n = 3$ trickreich aber elementar.

Aufgabe. Eine optimale Konfiguration für das Kusszahlproblem im \mathbb{R}^3 liefert das Matheon-Logo im Bild unten. Es zeigt drei Rechtecke, die paarweise senkrecht aufeinander stehen und deren Zentren im Punkt $(0, 0, 0)$ liegen. Für geeignete Verhältnisse der Seitenlängen liefern die zwölf Eckpunkte der Rechtecke die Mittelpunkte für zwölf Einheitskugeln, die eine dreizehnte Einheitskugel mit Mittelpunkt $(0, 0, 0)$ berühren. Was sind geeignete Verhältnisse der Seitenlängen? Und für welches Verhältnis der Seitenlängen ist $d(v_1, v_2) = d(v_2, v_3)$?



Für $n = 4$ können wir leicht eine Konfiguration konstruieren, die $\kappa_4 \geq 24$ zeigt: Betrachten wir die Konfiguration im vorigen Abschnitt für $n = 4$, dann ist der innere Ball eine Einheitskugel, und genauso groß wie die äußeren. Und man kann 8 weitere Bälle an die Mittelpunkte $\pm 2e_i$ setzen, die die Eckbälle nur berühren — das gibt eine Konfiguration von 24 Kugeln vom Radius 1, die gleichzeitig die Einheitskugel berühren, ohne sich zu überlappen.

Diese 24er-Konfiguration ist in verschiedenster Hinsicht außergewöhnlich; sie definiert ein 4-dimensionales *reguläres Polytop* mit 24 Seitenflächen, die allesamt Oktaeder sind, und sie ist hochsymmetrisch. Dieses “24-Zell” wurde von Ludwig Schläfli um 1850 entdeckt, als er die regulären Polytope in Dimension $n \geq 4$ klassifiziert hat. (Siehe zum Beispiel Hilbert & Cohn-Vossen [5].)

Für $n = 4$ ist die Zahl 24 von Berührungskugeln maximal, also $\kappa_n \leq 24$, das wurde aber erst von Musin 2008 bewiesen [7] [9]. Und man nimmt auch an, dass die Konfiguration eindeutig ist — das ist aber nicht bewiesen.

Für $n = 8$ und $n = 24$ gibt es Methoden aus der Analysis (Gegenbauer-Polynome etc.), mit denen sich der Beweis für die oberen Schranken $\kappa_8 \leq 240$ und $\kappa_{24} = 196560$ leicht führen

lässt. Bemerkenswert sind aber die Konfigurationen, die die unteren Schranken liefern. Für $n = 8$ nimmt man dafür das “Wurzelsystem” der Ausnahme-Spiegelungsgruppe E_8 .

Für $n = 24$ nimmt man die Wurzeln (kürzesten Vektoren) des von John Leech 1967 erstmals beschriebenen “Leech-Gitters”:

- Alle Vektoren $v \in \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$ mit einer geraden Anzahl von negativen Komponenten (Anzahl: $2^7 = 128$) und
- alle Vektoren $v \in \{0, 1, -1\}$ mit zwei nicht-Nullen (Anzahl: $4 \binom{8}{2} = 112$).

Für alle anderen Dimensionen ist die Kusszahl nicht bekannt. So weiß man zum Beispiel aktuell $40 \leq \kappa_5 \leq 44$. Literaturhinweis: Pfender & Ziegler [9].

Definition 1.40. Für jedes $n \geq 1$ bezeichne λ_n die Dichte einer dichtesten Packung gleich großer Kugeln, und λ'_n die Dichte einer dichtesten Gitterpackung von gleich großen Kugeln.

Es gilt offenbar $\lambda_n \leq \lambda'_n$. Man überlegt sich leicht $\lambda_1 = \lambda'_1 = 1$ und $\lambda_2 = \lambda'_2 = \frac{\pi}{\sqrt{12}} \approx 0,91$.

Viel komplizierter ist $\lambda_3 = \lambda'_3 = \frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 0,74$: die zweite Gleichung hat Gauß 1831 bewiesen, aber die erste ist die berühmte Kepler-Vermutung aus dem Jahr 1611, erst 1998 verifiziert von Hales und Ferguson. Siehe Henk & Ziegler [4].

Auch hier gibt es in den Dimensionen $n = 8$ und $n = 24$ bemerkenswert dichte Gitterpackungen, die vom E_8 -Gitter bzw. vom Leech-Gitter herkommen. In Dimension $n = 9$ ist die dichteste bekannte Packung dichter als die dichteste bekannte Gitterpackung, was also auf $\lambda_9 < \lambda'_9$ “hindeutet”.

1.4.4 Maßkonzentration

In hohen Dimensionen liegt der Großteil der Oberfläche der S^n in einer ganz engen Nachbarschaft des Äquators.

Anders gesagt: Zwei zufällige Punkte auf der S^n sind mit großer Wahrscheinlichkeit fast orthogonal!

Quelle: Matoušek [6, Chap. 14]

- [1] Martin Aigner and Günter M. Ziegler. *Das BUCH der Beweise*. Springer-Verlag, Heidelberg Berlin, third edition, 2009.
- [2] Vladimir G. Boltianskii. *Hilbert's Third Problem*. V. H. Winston & Sons (Halsted Press, John Wiley & Sons), Washington DC, 1978.
- [3] Gerd Fischer. *Lehrbuch der Algebra*. Vieweg, Wiesbaden, 2008.
- [4] Martin Henk and Günter M. Ziegler. Kugeln im Computer — Die Kepler-Vermutung. In E. Behrends and M. Aigner, editors, *Alles Mathematik. Von Pythagoras zum CD-Player*, pages 153–175. Vieweg, Wiesbaden, second (expanded, paperback) edition, 2002. In German.
- [5] David Hilbert and Stephan Cohn-Vossen. *Anschauliche Geometrie*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1932. Second edition 1996.
- [6] Jiří Matoušek. *Lectures on Discrete Geometry*, volume 212 of *Graduate Texts in Math*. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [7] Oleg R. Musin. The kissing number in four dimensions. *Annals of Mathematics*, 168:1–32, 2008.
- [8] János Pach and Pankaj K. Agarwal. *Combinatorial Geometry*. J. Wiley and Sons, New York, 1995.
- [9] Florian Pfender and Günter M. Ziegler. Kissing numbers, sphere packings, and some unexpected proofs. *Notices of the AMS*, 51(8):873–883, September 2004. <http://www.ams.org/notices/200408/fea-pfender.pdf>.
- [10] Alexey B. Sossinsky. *Geometries*, volume 64 of *Student Math. Library*. Amer. Math. Soc., Providence RI, 2012.