

2 Affine Geometrie

2.1 Affine Transformationen

Definition 2.1. Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt *affin*, wenn

$$f(\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_k x_k) = \lambda_0 f(x_0) + \dots + \lambda_k f(x_k) \quad (1)$$

für $k \geq 1$, $x_0, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_0, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_0 + \dots + \lambda_k = 1$.

Sie heißt *Affinität*, wenn sie bijektiv ist (was insbesondere $m = n$ impliziert).

Diese Definition funktioniert für einen (endlich-dimensionalen) Vektorraum V über einem beliebigen Körper K an der Stelle von \mathbb{R}^n genauso: Wir definieren für allgemeinen Körper K eine affine Abbildung $f : V \rightarrow V$ als eine Abbildung, die die Bedingung (1) für alle $k \geq 1$ und $\lambda_0, \dots, \lambda_k \in K$ erfüllt.

Für affine Abbildungen ist allerdings der Nullpunkt nicht wichtig. Auch das folgende Lemma (und fast alles in diesem Kapitel "funktioniert" über einem beliebigen (endlich-dimensionalen) Vektorraum, aber um der Konkretheit willen formulieren wir das über dem \mathbb{R}^n).

Lemma 2.2.

- (i) Die Nullabbildung $f : x \rightarrow 0$ ist affin. Die konstante Abbildung $c_b : x \mapsto b$ ist affin für jedes $b \in \mathbb{R}^m$.
- (ii) Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine affine Abbildung und $w \in \mathbb{R}^m$, so ist $f + T_b : x \mapsto f(x) + b$ ebenfalls affin.
Ist f eine Affinität, dann ist $f + T_b$ ebenfalls eine Affinität.
- (iii) Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax + b$ affin.
- (iv) Sind $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ affine Abbildungen, so ist $f + g$ ebenfalls affin.
(Sind f, g Affinitäten, dann ist $f + g$ im Allgemeinen keine Affinität!)

Beweis. Nachrechnen! □

Aufgabe 1. Man visualisiere affine Abbildungen in der Ebene! Klassifikation? Stimmt es, dass eine affine Abbildung, die keine Translation ist, einen Fixpunkt hat? Stimmt das für jede Affinität?

Die Bedingung aus der Definition 2.1 ist leer für $k = 1$. Für $k = 2$ bedeutet sie, dass f Geraden auf Geraden abbildet, und auf den Geraden Teilungsverhältnisse erhält (z.B. Mittelpunkte). Es stellt sich heraus, dass es über \mathbb{R} auch schon ausreicht, die Bedingung für $k = 2$ zu fordern:

Lemma 2.3. Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist genau dann affin, wenn

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (2)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beweis. Die Bedingung (2) gilt für jede affine Abbildung: das ist genau der Spezialfall $k = 1$ der Bedingung (1).

Gelte nun (2); wir versuchen (1) für alle $k \geq 1$ zu beweisen. Für $k = 0$ ist (1) trivial, und für $k = 1$ ist das genau (2). Für $k > 1$ können nicht alle λ_i gleich 1 sein, also können wir annehmen, dass $\lambda_0 \neq 1$ ist, und dann argumentieren wir mit Induktion:

$$f(\lambda_0 x_0 + \cdots + \lambda_k x_k) = f\left(\lambda_0 x_0 + (1 - \lambda_0) \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_0} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_0} x_k \right)\right). \quad \square$$

Über \mathbb{R} ist eine affine Abbildung also genau eine, die Geraden auf Geraden abbildet, und dabei Teilungsverhältnisse erhält.

Achtung: Dieser Beweis funktioniert *nicht* — und die Aussage ist auch nicht richtig — für affine Geometrie über einem allgemeinen Körper K . Im Beweis zu Lemma 2.3 gibt es dann nämlich Schwierigkeiten mit “Für $k > 1$ können nicht alle λ_i gleich 1 sein”: das stimmt nicht, wenn die Charakteristik von K die Zahl $k + 1$ teilt!

Aufgabe. Sei $K = \text{GF}(2)$ der Körper mit 2 Elementen.

Zeige, dass jede bijektive Abbildung $K^2 \rightarrow K^2$ affin ist, also Bedingung (1) erfüllt. Wie viele solche Abbildungen gibt es?

Zeige, dass nicht jede bijektive Abbildung $K^3 \rightarrow K^3$ affin ist, aber trotzdem jede Abbildung (2) erfüllt. Wie viele bijektive Abbildungen gibt es, und wie viele bijektive affine Abbildungen gibt es?

Proposition 2.4. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist genau dann affin, wenn es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ gibt mit $f(x) = Ax + b$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Affinität, wenn es eine Matrix $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det A \neq 0\}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $f(x) = Ax + b$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. Den “dann”-Teil haben wir schon im Lemma 2.2 gezeigt.

Sei nun f affin, so setze $b := f(0)$ und $A_i := f(e_i) - f(0)$ für $1 \leq i \leq n$, und $A := (A_1, \dots, A_n)$. (Diese Setzungen sind “alternativlos”, wenn $f(x = Ax + b)$ auf $0, e_1, \dots, e_n$ die richtigen Werte erzeugen soll.) Und mit $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ rechnet man nach, dass f und $Ax + b$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ die selben Werte ergeben.

Für die Aussage über Affinitäten verwenden wir, dass eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\det A = 0$ nichttrivialen Kern hat, also dann $x \mapsto Ax$ nicht injektiv ist. Und wir verwenden, dass jede quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\det A \neq 0$ invertierbar ist, also A^{-1} existiert. \square

Korollar 2.5. Die Affinitäten $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bilden eine Gruppe, nämlich

$$\text{Affin}(n) = \{f : f(x) = Ax + b \text{ für ein } A \in \text{GL}(n), b \in \mathbb{R}^n\} \cong \mathbb{R}^n \rtimes \text{GL}(n).$$

Beweis. Die Umkehrabbildung zu $f(x) = Ax + b$ ist $f^{-1}(x) = A^{-1}(x - b) = A^{-1}x + (-A^{-1}b)$. \square

Man kann sich überlegen, dass auch $\text{Affin}(n)$ zwei Zusammenhangskomponenten hat, die durch $\det A > 0$ bzw. $\det A < 0$ gegeben sind.

2.2 Kollinearitäten

Wir haben Affinitäten als bijektive Abbildungen definiert, die

- (1) Geraden auf Geraden abbilden und
- (2) Teilungsverhältnisse erhalten.

Eine bijektive Abbildung, die nur (1) erfüllt, kann man *Kollinearität* nennen. Im Allgemeinen reicht die erste Bedingung nicht aus, es ist also nicht jede Kollinearität eine Affinität, wie man z.B. am Fall $m = n = 1$ sieht, oder an der Aufgabe 2.1, oder an der Abbildung $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, $z \mapsto \bar{z}$. Das sind aber auch schon fast alle Gegenbeispiele, wie man am folgenden Resultat sieht.

Theorem 2.6 (Charakterisierung der affinen Abbildungen). *Sei K ein Körper mit mindestens drei Elementen, und $n \geq 2$.*

Dann ist jede Kollinearität $f : K^n \rightarrow K^n$ eine Semi-Affinität, d.h. sie erfüllt

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \alpha(\lambda)f(x) + (1 - \alpha(\lambda))f(y)$$

für einen Körperautomorphismus α .

Für $K = \mathbb{R}$ gibt es keine Körperautomorphismen außer der Identität. In diesem Fall ist also für $n > 1$ jede Kollinearität eine Affinität.

Für $K = \mathbb{C}$ gibt es viele Körperautomorphismen, insbesondere die Konjugation, die auch noch \mathbb{R} auf \mathbb{R} abbildet.

Dieses Resultat kann man aus einem Satz aus der projektiven Geometrie ableiten, den wir später beweisen. Hier geben wir nur das Hauptlemma an. Dass \mathbb{R} keine nicht-trivialen Automorphismen hat, ist leicht zu zeigen, siehe Fischer [2, S. 33].

Lemma 2.7. *Sei K ein Körper mit mindestens drei Elementen und $f : K^n \rightarrow K^n$ eine Kollinearität. Dann bildet f parallele Geraden auf parallele Geraden ab.*

Beweis. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Für $n \geq 2$ zeigt man, dass (1.) zwei Geraden genau dann parallel sind, wenn sie in einer Ebene liegen und keinen Schnittpunkt haben, und (2.) jede Ebene durch die Verbindungsgeraden der Punkte auf zwei sich schneidenden Geraden überdeckt wird — letzteres stimmt eben nur für $|K| \geq 3$.

Für Details siehe Fischer [2, Abschnitt 1.3]. □

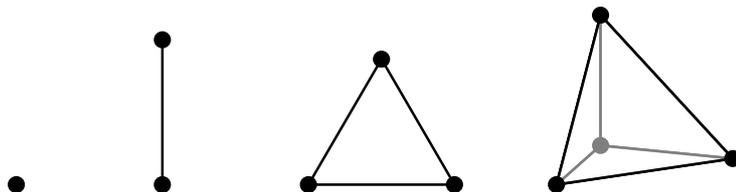
2.3 Der Hauptsatz der Affinen Geometrie

Affine Unterräume wurden ja schon in Abschnitt 1.1.1 definiert und beschrieben, genauso der Begriff der “affinen Unabhängigkeit”, den wir aber trotzdem hier wiederholen.

Definition 2.8 (affin unabhängig, affine Basis). Punkte $p_0, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$ heißen *affin unabhängig*, wenn es keine nichttriviale *affine Abhängigkeit* $\lambda_0 p_0 + \dots + \lambda_k p_k = 0$, $\lambda_0 + \dots + \lambda_k = 0$ zwischen den Punkten gibt.

Jede maximale Menge von affin unabhängigen Punkten bildet eine *affine Basis*. (Eine affine Basis ist also einfach eine Menge von $n + 1$ affin unabhängigen Punkten.)

$k + 1$ affin unabhängige Punkte bilden die Ecken eines k -dimensionalen *Simplex* (Punkt für $k = 0$, Strecke für $k = 1$, Dreieck für $k = 2$, Tetraeder für $k = 3$).



Lemma 2.9. Punkte $p_0, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$ sind genau dann affin unabhängig, wenn es für jeden der Punkte eine affine Hyperebene gibt, die den Punkt nicht enthält, alle anderen aber schon.

Lemma 2.10. Punkte $p_0, \dots, p_n \in \mathbb{R}^n$ sind genau dann eine affine Basis, wenn

$$\det(p_1 - p_0, \dots, p_n - p_0) \neq 0.$$

Definition 2.11 (Affiner Spann, affine Hülle). Für $p_0, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$ heißt

$$\text{aff}(p_0, \dots, p_k) := \{\lambda_0 p_0 + \dots + \lambda_k p_k : \lambda_0 + \dots + \lambda_k = 1\}$$

der *affine Spann* oder die *affine Hülle* von p_0, \dots, p_k .

Lemma 2.12 (Baryzentrische Koordinaten). Sind $p_0, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$ affin unabhängig, so hat jeder Punkt $x \in \text{aff}(p_0, \dots, p_k)$ eine eindeutige Darstellung in der Form $x = \lambda_0 p_0 + \dots + \lambda_k p_k$ mit $\lambda_0 + \dots + \lambda_k = 1$.

Die Koeffizienten $\lambda_0, \dots, \lambda_k$ heißen dann die *baryzentrischen Koordinaten* von x . Insbesondere heißt der Punkt $x_0 = \frac{1}{k+1}(p_0 + \dots + p_k)$ das *Baryzentrum* oder der *Schwerpunkt* der Punkte p_0, \dots, p_k .

Theorem 2.13 (Hauptsatz der Affinen Geometrie). Seien p_0, \dots, p_m und p'_0, \dots, p'_m zwei Folgen von Punkten im \mathbb{R}^n . Dann gibt es eine Affinität $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax + b$, mit $A \in \text{GL}(n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$ mit $f(p_i) = p'_i$, $0 \leq i \leq m$, dann und nur dann, wenn zwischen den Punkten p_i bzw. p'_i dieselben affinen Abhängigkeiten (mit denselben Koeffizienten) bestehen.

Beweis. Klar? □

Korollar 2.14 (Hauptsatz der Affinen Geometrie, Spezialfall). *Sind die Punktfolgen p_0, \dots, p_m und p'_0, \dots, p'_m im \mathbb{R}^n affin unabhängig, dann gibt es eine Affinität $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax + b$, mit $A \in \text{GL}(n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$ mit $f(p_i) = p'_i$, $0 \leq i \leq m$. Im Fall $m = n$, also wenn die Punktfolgen affine Basen sind, ist die Affinität eindeutig bestimmt.*

Jede Affinität

- (A1) bildet Geraden auf Geraden ab,
- (A2) erhält Strecken-/Teilungsverhältnisse entlang von Geraden,
- (A3) bildet parallele Geraden auf parallele Geraden ab,
- (A4) erhält Volumenverhältnisse.

Welche dieser Eigenschaften reicht zur Charakterisierung von Affinitäten?

Wir wissen schon aus Lemma 2.3, dass die Eigenschaften (A1) und (A2) zusammen zur Charakterisierung reichen. Die Diskussion zu Proposition 2.4 zeigt, dass (A1) alleine schon reicht, wenn wir über \mathbb{R} arbeiten und nur bijektive Abbildungen berücksichtigen.

Proposition 2.15. *$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Affinität, wenn sie Volumenverhältnisse für n -dimensionale Simplexe (äquivalent: n -dimensionale Spate) erhält, wenn es also eine Konstante $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, gibt mit*

$$\det(f(p_1) - f(p_0), \dots, f(p_n) - f(p_0)) = \alpha \det(p_1 - p_0, \dots, p_n - p_0)$$

für alle $p_0, \dots, p_n \in \mathbb{R}^n$.

Beweis. Offenbar erhält jede Affinität $f(x) = Ax + b$ Volumenverhältnisse, mit $\alpha = \det A \neq 0$. Wenn umgekehrt f Volumenverhältnisse erhält, so bildet f Punkte auf einer Geraden auf Punkte auf einer Geraden ab: Dazu betrachten wir eine Gerade, die von unterschiedlichen Punkten $p_0 \neq p_1$ "aufgespannt" wird. Wir können die zwei Punkte zu einer affinen Basis p_0, p_1, \dots, p_n ergänzen, die auf die Punkte p'_0, p'_1, \dots, p'_n abgebildet wird. Weil Volumenverhältnisse erhalten bleiben, ist $\det(p'_1 - p'_0, \dots, p'_n - p'_0) \neq 0$, also bilden die Punkte auch eine Basis. Sei nun $q = \lambda_0 p_0 + \dots + \lambda_n p_n$ ein weiterer Punkt (in baryzentrischen Koordinaten), der auf $q' = \mu_0 p'_0 + \dots + \mu_n p'_n$ abgebildet wird. Weil Volumenverhältnisse erhalten bleiben, gilt $\mu_i = \lambda_i$ für alle i . Also werden die Punkte q auf der Geraden durch p_0 und p_1 (also mit $\lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$) auf Punkte auf der Geraden durch p'_0 und p'_1 abgebildet. □

Korollar 2.16. *Die volumenerhaltenden Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sind genau die Affinitäten der Determinante 1, bilden also die Gruppe*

$$\text{Affin}(n, \mathbb{R}) := \{f : f(x) = Ax + b \text{ für ein } A \in \text{SL}(n), b \in \mathbb{R}^n\} \cong \mathbb{R}^n \rtimes \text{SL}(n),$$

wobei $\text{SL}(n)$ die spezielle lineare Gruppe $\text{SL}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det A = 1\}$ bezeichnet.

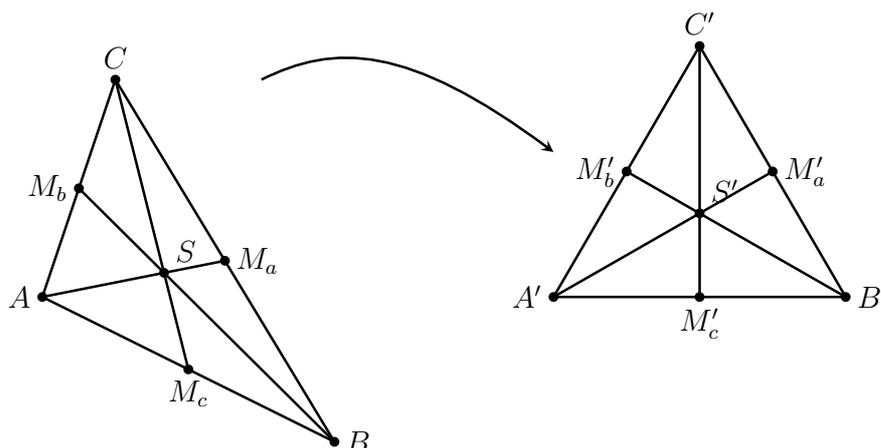
Bemerkung 2.17 („Freiheitsgrade“ — Dimension der Gruppe der affinen Transformationen). Eine Affinität ist durch die Bilder von $n + 1$ Punkten einer affinen Basis festgelegt, und diese können (generisch) frei gewählt werden. Also ist die Anzahl der Freiheitsgrade und die Dimension der Gruppe $\text{Affin}(n)$ gleich $(n + 1)n$.

In der Tat ist $\{(A, b) : \det A \neq 0\}$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^{n \times (n+1)}$.

2.4 Anwendungen

Proposition 2.18 (Die Seitenhalbierenden schneiden sich.). *In jedem Dreieck schneiden sich die Verbindungslinien von den Ecken zu den gegenüberliegenden Seitenmittelpunkten.*

Beweis. Die Behauptung ist invariant unter affinen Transformationen, also können wir annehmen, dass wir es mit einem gleichseitigen Dreieck zu tun haben.



Dort ist die Behauptung dann aus Symmetriegründen offensichtlich. □

Entsprechend höherdimensional: Baryzentren.

Proposition 2.19 (Satz von Ceva). *In jedem Dreieck schneiden sich die Verbindungslinien von den Ecken A, B, C zu Punkten A', B', C' auf den gegenüberliegenden Seiten dann und nur dann, wenn*

$$\frac{AC'}{C'B} \frac{BA'}{A'C} \frac{CB'}{B'A} = 1.$$

Beweis. Invariant unter affinen Transformationen, also können wir annehmen, dass wir es mit einem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$ zu tun haben.

Für dieses Dreieck rechnet man die Behauptung dann leicht(er) nach. □

Merke: Koordinatentransformationen ausnutzen!

Dto: “Der Satz von Menelaus” über die Schnittpunkte einer Geraden mit den (verlängerten) Kanten eines Dreiecks, siehe Brannan et al. [1, Sect. 2.4].

Aufgabe. Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = Ax + b$ eine affine Abbildung, die die Punkte $p_0 = (1, 0)$, $p_1 = (4, 1)$ und $p_2 = (s, 1)$ auf $f(p_0) = (2, 1)$, $f(p_1) = (5, -2)$ und $f(p_2) = (1, t)$ abbildet, wobei s, t aus \mathbb{R} sind. Für welche Werte von s, t hat f

- (1) genau einen Fixpunkt,
- (2) eine Fixpunktgerade,
- (3) keinen Fixpunkt?

Aufgabe. Sind die folgenden Punktmenge im \mathbb{R}^2 affin-äquivalent? Wenn nein, woran kann man das sehen — z.B. an affinen Abhängigkeiten? Wenn ja, geben Sie eine affine Äquivalenz an — also eine Affinität, die die erste Punktmenge auf die zweite abbildet!

1. $\{(0, 0), (1, 0), (1, 1)\}$ und $\{(0, 0), (1, 0), (2, 2)\}$?
2. $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$ und $\{(0, 0), (2, 2), (4, 4)\}$?
3. $\{(0, 0), (1, 0), (2, 2)\}$ und $\{(0, 0), (2, 2), (4, 4)\}$?
4. $\{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)\}$ und $\{(0, 0), (1, 0), (\frac{1}{2}, 1), (\frac{1}{2}, -1)\}$?
5. $\{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)\}$ und $\{(0, 0), (1, 0), (\frac{1}{2}, 1), (\frac{1}{2}, -2)\}$?

Achtung: die Punktmenge sind nicht geordnet/nummeriert!

Aufgabe. Sind die folgenden Punktmenge P_1 und P_2 im \mathbb{R}^5 affin-äquivalent? Wenn nein, woran kann man das sehen — z.B. an affinen Abhängigkeiten? Wenn ja, geben Sie eine affine Äquivalenz an!

$P_1 :$	$P_2 :$
(1, 0, 0, 0, 0)	(1, 1, 0, 0, 0)
(0, 1, 0, 0, 0)	(0, 1, 1, 0, 0)
(0, 0, 1, 0, 0)	(0, 0, 1, 1, 0)
(0, 0, 0, 1, 0)	(0, 0, 0, 1, 1)
(0, 0, 0, 0, 1)	(1, 0, 0, 0, 1)
(0, 0, 0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0, 0)
(1, 1, 1, 1, 1)	(1, 1, 1, 1, 1)

Kommentar: Dies ist ein Beispiel aus einem relativ neuen Forschungsaufsatz [3], wo es um den Zusammenhang zwischen den Eigenschaften “kongruent”, “affin äquivalent” und “kombinatorisch äquivalent” zwischen 0/1-Konfigurationen (also die Eckenmenge von sogenannten 0/1-Polytopen) ging. Dabei

$$\text{kongruent} \implies \text{affin äquivalent} \implies \text{kombinatorisch äquivalent}$$

klar, und für affin unabhängige Menge (also für 0/1-Simplexe) gilt offenbar

$$\text{kongruent} \implies \text{affin äquivalent} \iff \text{kombinatorisch äquivalent.}$$

Das Beispiel von P_1 und P_2 ist nun für die Unterscheidung von “affin äquivalent” und “kombinatorisch äquivalent” für allgemeine 0/1-Polytope relevant: P_1 und P_2 sind die Eckenmenge von “Bipyramiden” über 4-dimensionalen Simplexen — die beide in der Eckenmenge des 5-dimensionalen 0/1-Würfels liegen [3, p. 9].

[1] David A. Brannan, Matthew F. Esplen, and Jeremy J. Gray. *Geometry*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2012.

[2] Gerd Fischer. *Analytische Geometrie*. Vieweg, Wiesbaden, 2001. 7. Auflage.

[3] Günter M. Ziegler. Lectures on 0/1-polytopes. In G. Kalai and G. M. Ziegler, editors, *Polytopes — Combinatorics and Computation*, volume 29 of *DMV Seminars*, pages 1–41. Birkhäuser-Verlag, Basel, 2000.

3 Transformationsgruppen als Mannigfaltigkeiten, und die Anzahl der Freiheitsgrade

Eine *Mannigfaltigkeit* ist ein Raum, der lokal aussieht wie \mathbb{R}^n für ein festes $n \in \mathbb{N}$ (aber global meistens nicht). “Lokal”: Karten; “aussieht wie”: Homöomorphismus. Hier betrachten wir nur *eingebettete* Mannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^N$, N evtl. groß; das ist keine prinzipielle Einschränkung (Satz von Whitney), macht aber alles weniger technisch.

Beispiel 3.1 (Der Kreis S^1). Definiere vier offene Umgebungen auf dem Einheitskreis $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$:

$$\begin{array}{ll} \text{Nordhalbkreis} & U_N = \{(x, y) \in S^1 : y > 0\} & \chi_N : U_N \rightarrow (-1, 1), & (x, y) \rightarrow x \\ \text{Südhalbkreis} & U_S = \{(x, y) \in S^1 : y < 0\} & \chi_S : U_S \rightarrow (-1, 1), & (x, y) \rightarrow x \\ \text{Westhalbkreis} & U_W = \{(x, y) \in S^1 : x < 0\} & \chi_W : U_W \rightarrow (-1, 1), & (x, y) \rightarrow y \\ \text{Osthalbkreis} & U_O = \{(x, y) \in S^1 : x > 0\} & \chi_O : U_O \rightarrow (-1, 1), & (x, y) \rightarrow y \end{array}$$

Die vier Karten sind (U_i, χ_i) , $i \in \{N, S, W, O\}$, mit inversen Abbildungen

$$\begin{array}{ll} \chi_N^{-1} & : (-1, 1) \rightarrow U_N, & x \mapsto (x, \sqrt{1-x^2}) \\ \chi_S^{-1} & : (-1, 1) \rightarrow U_S, & x \mapsto (x, -\sqrt{1-x^2}) \\ \chi_W^{-1} & : (-1, 1) \rightarrow U_W, & y \mapsto (-\sqrt{1-y^2}, y) \\ \chi_O^{-1} & : (-1, 1) \rightarrow U_O, & y \mapsto (\sqrt{1-y^2}, y) \end{array}$$

Auf dem Durchschnitt von U_N und U_O lautet der *Kartenübergang*

$$\chi_O \circ \chi_N^{-1} : \chi_N(U_N \cap U_O) \rightarrow \chi_O(U_N \cap U_O), \\ x \mapsto \sqrt{1-x^2}.$$

Definition 3.2 (Mannigfaltigkeit). Ein (Hausdorffscher) topologischer Raum M heisst *topologische Mannigfaltigkeit*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine offene Überdeckung $M = \bigcup_i U_i$ und Homöomorphismen (“Karten”) $\chi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ so gibt, dass jeder Kartenübergang $\chi_j \circ \chi_i^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ die *Kompatibilitätsbedingung* erfüllt, ein Homöomorphismus zu sein. Ist jeder Kartenübergang sogar differenzierbar / ein Diffeomorphismus / stückweise linear, so ist M eine differenzierbare / glatte / PL Mannigfaltigkeit. Die Dimension von M ist n .

Bemerkung 3.3. Die Dimension ist wohldefiniert, weil es keinen (lokalen) Homöomorphismus oder Diffeomorphismus zwischen \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m gibt für $n \neq m$. Für Diffeomorphismen folgt dies aus der Tatsache, dass die Jacobimatrix quadratisch sein muss, für Homöomorphismen ist das etwas schwieriger zu beweisen, und man benötigt dazu den Satz von Brouwer. Beachte auch, dass es sehr wohl stetige, bijektive Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt (Stichwort: raumfüllende Kurven), bei denen aber die Umkehrabbildung nicht stetig ist.

Beispiel 3.4 (Die Sphäre S^n). Stereographische Projektion vom Nord- bzw. Südpol liefert eine Darstellung der S^n als Mannigfaltigkeit mit nur zwei Karten; die Umkehrabbildung liefert sogar eine rationale Parametrisierung der Sphäre minus einem Punkt (Übungsaufgabe).

Definition 3.5. Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen zwei Mannigfaltigkeiten der Dimension m bzw. n ist stetig/glatt, wenn für alle $p \in M$ und alle Karten (U, χ) von M und (V, ψ) von N mit $p \in U$ und $f(p) \in V$ gilt, dass der *Kartenausdruck*

$$\psi \circ f \circ \chi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

stetig bzw. glatt ist. Insbesondere heissen M und N *diffeomorph*, falls es eine glatte Bijektion mit glatter Inversen zwischen M und N gibt.

Definition 3.6. Eine *Liegruppe* (Sophus Lie, 1842–1899) ist eine glatte Mannigfaltigkeit, die gleichzeitig eine Gruppe ist, und zwar so, dass die Gruppenoperationen glatte Abbildungen sind. Dazu reicht es, die Glattheit der Abbildung

$$G \times G \rightarrow G, \quad (g, h) \mapsto g^{-1}h$$

zu fordern. Wie auch schon bei Mannigfaltigkeiten werden wir nur eingebettete Liegruppen $G \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ betrachten; diese heissen *Matrixgruppen*. (Eigentlich bezeichnet man damit abgeschlossene Untergruppen der $GL(n, \mathbb{R})$, oder dazu äquivalent, in den $\mathbb{R}^{n \times n}$ eingebettete Gruppen, die abgeschlossen unter nichtsingulären Grenzübergängen sind.) Siehe [1].

Beispiel 3.7. $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det A \neq 0\}$. Wir bemerken zuerst, dass $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ eine polynomiale Abbildung ist, also insbesondere stetig, und dass $0 \in \mathbb{R}$ abgeschlossen ist. Damit ist $\mathbb{R}^{n \times n} \setminus \det^{-1}(0)$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^{n \times n}$, und damit $GL(n, \mathbb{R})$ zunächst eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n^2 (hier benötigt man noch, dass offene Teilmengen glatter Mannigfaltigkeiten selbst glatte Mannigfaltigkeiten sind); ausserdem sind die Gruppenoperationen offensichtlich glatt, sodass es sich wirklich um eine Liegruppe handelt.

Beispiel 3.8. $\text{Affin}(n, \mathbb{R}) = \{(A, b) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^n\}$ ist auch eine Liegruppe. Wenn man “Dimension” als “Anzahl freier Parameter” interpretiert, sieht man $\dim \text{Affin}(n, \mathbb{R}) = n^2 + n = n(n+1)$.

Theorem 3.9 (Satz vom Urbild). *Ist $f : X \rightarrow Y$ eine glatte Abbildung zwischen glatten Mannigfaltigkeiten und ist $y \in Y$ ein regulärer Wert von f (d.h. an allen Punkten $x \in f^{-1}(y)$ hat die Ableitungsmatrix vollen Rang), so ist $f^{-1}(y)$ entweder leer oder eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von X der Kodimension $\dim Y$.*

Beispiel 3.10. $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det A - 1 = 0\}$ ist eine Liegruppe der Dimension $n^2 - 1$. Dazu braucht man den Satz vom Urbild, und dass $\frac{\partial \det A}{\partial a_{ij}} = \text{adj}(A)_{ij} = (A^{-1})_{ij} \det A$.

Beispiel 3.11.

- $\dim O(n) = (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ durch Abzählen der freien Parameter: $n-1$ für einen Vektor $v_1 \in S^{n-1}$, $n-2$ für einen Vektor auf der zu v_1 orthogonalen S^{n-2} , etc.
- $\dim \text{Eukl}(n, \mathbb{R}) = \binom{n}{2} + n = \binom{n+1}{2}$.

3.1 Tangentialraum von Liegruppen

Beispiel 3.12 (komplexe S^1). Wir betrachten die S^1 als Einheitskreis in der komplexen Zahlenebene, $S^1 = \text{SO}(2) = \{e^{i\varphi} : 0 \leq \varphi < 2\pi\}$, zusammen mit dem Tangentialraum in der 1, nämlich $1 + i\mathbb{R}$. Dann ist die Exponentialabbildung

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1, \quad \varphi \mapsto e^{i\varphi}$$

ein surjektiver, glatter Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ nach (S^1, \cdot) ; lokal ist er sogar isometrisch.

Definition 3.13. Für eine eingebettete Mannigfaltigkeit M und $v \in M$ ist der *Tangentialraum* an M in v definiert als

$$\begin{aligned} T_v M &= \{ \text{Tangentialvektoren glatter Kurven durch } v \text{ im Punkt } v \} \\ &= \{ A'(0) \mid A : \mathbb{R} \rightarrow M \text{ glatt in } 0, A(0) = v \}. \end{aligned}$$

Beispiel 3.14. Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ ist die Kurve $t \mapsto B(t) = \begin{pmatrix} \cos \varphi t & \sin \varphi t \\ -\sin \varphi t & \cos \varphi t \end{pmatrix}$ in $\text{SO}(2) \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$ glatt, aber $t \mapsto \tilde{B}(t) = \begin{pmatrix} \cos |\varphi t| & \sin |\varphi t| \\ -\sin |\varphi t| & \cos |\varphi t| \end{pmatrix}$ nicht. Bemerke, dass die Menge aller möglichen Tangentialvektoren — die von der Form $B'(0) = \begin{pmatrix} 0 & \varphi \\ -\varphi & 0 \end{pmatrix}$ sind — wie in [Beispiel 3.12](#) eine Gerade parametrisieren!

Bemerke auch, dass für Liegruppen die Multiplikation mit jedem Gruppenelement ein Diffeomorphismus ist (“Liegruppen sind an jeder Stelle gleich”). Daher reicht es für Liegruppen aus, den Tangentialraum am neutralen Element der Gruppe zu betrachten.

Theorem 3.15 ([1, Section 5.2]). *Der Tangentialraum der $\text{SO}(n) \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ in E_n ist genau die Menge aller schiefsymmetrischen Matrizen:*

$$T_{E_n} \text{SO}(n) = \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A + A^\top = 0 \}.$$

Beweis. Zur Vorwärtsinklusion nehmen wir eine glatte Kurve $A : \mathbb{R} \rightarrow \text{SO}(n)$ mit $A(0) = E_n$ und differenzieren die Gleichung $AA^\top = E_n$ nach t . Das ergibt

$$\frac{d}{dt} A(t)A(t)^\top = A'(t)A(t)^\top + A(t)A'(t)^\top = 0,$$

und in $t = 0$ ausgewertet bedeutet das, dass $A'(0)$ schiefsymmetrisch ist.

Für die andere Richtung gehen wir schrittweise vor:

Exponentialabbildung: Die Exponentialabbildung für Matrizen wird genauso über eine Potenzreihe definiert, wie wir das von den reellen Zahlen kennen:

$$\exp(A) = E_n + \frac{1}{1!}A + \dots + \frac{1}{n!}A^n + \dots$$

Wir brauchen, dass $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ falls $AB = BA$. Das sieht man, indem man die Potenzreihen beider Seiten anschreibt und dann (wegen $AB = BA$) erkennt, dass man wie im Reellen rechnen kann. Für nicht kommutierende Matrizen gilt diese Gleichung jedoch im allgemeinen nicht!

exp(schief) $\in O(n)$: Falls A schiefsymmetrisch ist, kommutiert A mit A^\top , denn dann ist $AA^\top = A(-A) = (-A)A = A^\top A$; also ist

$$\exp(A)\exp(A)^\top = \exp(A)\exp(A^\top) = \exp(A + A^\top) = \exp(0) = E_n,$$

und damit gilt $\exp(A) \in O(n)$.

exp(schief) $\in SO(n)$: Falls A schiefsymmetrisch ist, so ist die Kurve $t \mapsto \exp(tA)$ stetig auf $[0, 1]$, und ihr Bild variiert stetig zwischen E_n und $\exp(A)$. Wegen dieser Stetigkeit, $\det(E_n) = 1$, und der Tatsache dass \det auf $O(n)$ nur die Werte ± 1 annimmt, schließen wir dass $\det \exp(A) = 1$.

Schiefe Matrizen sind Tangentialvektoren: Zunächst zeigen wir $\frac{d}{dt} \exp(tA) = A \exp(tA)$ durch Potenzreihenentwicklung. Daraus schließen wir mit $\exp(tA)|_{t=0} = E_n$, dass der Tangentialvektor der Kurve $t \mapsto \exp(tA)$ für $t = 0$ genau $A \in T_{E_n} SO(n)$ ist.

Damit kommen also alle schiefsymmetrischen Matrizen als Tangentialvektoren an die $SO(n)$ in der Einheitsmatrix E_n vor, und der Beweis ist zu Ende. \square

Theorem 3.16 ([1, Chapter 7]). *Für jede eingebettete Liegruppe gilt $\exp(T_e(G)) \subseteq G$. Ausserdem ist \exp ein lokaler Homöomorphismus, erhält also die Dimension.*

Korollar 3.17. $\dim SO(n) = \frac{n(n-1)}{2}$, weil dies die Dimension des Vektorraums ("Lie-Algebra") aller schiefsymmetrischen $n \times n$ Matrizen ist, und der Tangentialraum die gleiche Dimension wie die zugehörige Mannigfaltigkeit hat.

Bemerkung 3.18. Die Exponentialabbildung erhält tatsächlich noch viel mehr als nur die topologische Struktur. In einer Umgebung des neutralen Elements e haben alle Elemente von G die Form $\exp(A)$ für ein $A \in T_e(G)$, und das Produkt $\exp(A)\exp(B)$ ist von der Form $\exp(C)$ für ein $C \in T_e(G)$. Der Satz von Campbell–Baker–Hausdorff sagt aus, dass diese Matrix C sogar als eine Summe $A + B +$ Terme in *Lieklammern* $[A, B] = AB - BA$ dargestellt werden kann [1, Section 7.6].

[1] John Stillwell. *Naive Lie Theory*. Springer, New York, 2008.