4 Kegelschnitte und Quadriken

4.1 Kegelschnitte

Vorbemerkung: Kegelschnitte sind ein klassisches Thema seit der antiken griechischen Mathematik. So schrieb (angeblich) Apollonios von Perge (ca. 262 v. Chr.–ca. 190 v. Chr.) sein "achtbändiges" Hauptwerk "Konika" über Kegelschnitte. In *Wikipedia* stand vor einiger Zeit:

> In seinem bedeutendsten Werk Konika („Über Kegelschnitte") widmete er sich eingehenden Untersuchungen über Kegelschnitte, Grenzwertbestimmungen und Minimum-Maximum-Problemen. Er wies nach, dass die drei verschiedenen Kegelschnitte (Ellipse, Parabel und Hyperbel), deren Namen und Definitionen er einführte, vom selben allgemeinen Kegeltypus stammen."

Inzwischen ist der Text revidiert, und es ist die Rede von

> [. . .] die vier verschiedenen Kegelschnitte (Ellipse, Kreis, Parabel und Hyperbel), deren Namen und Definitionen er einführte [. . .]

— nicht unbedingt eine Verbesserung.

Vorbemerkung: Quadriken (Lösungsmengen von quadratischen Gleichungen in n Variablen) werden für $n = 2$ oft mit Kegelschnitten "identifiziert". So schreibt *Wikipedia*:

> Ein **Kegelschnitt** (lateinisch *sectio conica*, englisch *conic section*, *cone-plane intersection*) ist eine Kurve, die entsteht, wenn man die Oberfläche eines Kreiskegels bzw. Doppelkreiskegels mit einer Ebene schneidet. Ein Kegelschnitt ist der zweidimensionale Sonderfall einer Quadrik.

Und Fischer [3, S. 397]:

> *Im Fall $n = 2$ nennt man eine Quadrik einen Kegelschnitt.*

Solche Aussagen verdecken aber

- die naheliegende Definition von Kegelschnitten als "Schnitten eines (Doppel-)Kegels mit einer Ebene"
- die Tatsache, dass zum Beispiel die leere Menge zwar eine Quadrik ist, aber kein Schnitt eines Kegels, und genauso auch die Vereinigung von zwei parallelen Geraden,
- die Frage, wann zwei Quadriken bzw. zwei Kegelschnitte gleich/äquivalent sind.

Im Folgenden werden wir

- Kegelschnitte als Schnitte eines (Doppel-)Kegels mit einer Ebene definieren, und (bis auf Kongruenz-/Isometrie) klassifizieren
- Quadriken als Lösungsmengen von quadratischen Gleichungen definieren, durch Matrizen darstellen, bis auf Isometrie klassifizieren, und auch bis auf affine Transformationen klassifizieren (jeweils mit "Normalform")
- ableiten, dass für $n = 2$ die Kegelschnitte (bis auf Isometrie) genau die nicht-leeren Quadriken sind (Ausnahme: zwei parallele Geraden sind auch eine Quadrik, aber kein Kegelschnitt).

Die maximale Allgemeinheit wird erreicht, wenn wir Kegelschnitte statt über $\mathbb{R}$ über einem beliebigen Körper K (der Charakteristik $\neq 2$) betrachten – dann macht allerdings die Betrachtung "bis auf Kongruenz" keinen Sinn mehr, sondern nur die Klassifikation bis auf affine oder bis auf projektive Äquivalenz, die wir später betrachten.

Hier ist unser Ausgangspunkt der "orthogonale" Kreiskegel

$$C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\}$$

(der ja eigentlich ein Doppelkegel ist). Wir schreiben ihn für das Folgende einfacher als

$$C \;=\; \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}.$$

Schneidet man C mit einer Ebene E, so erhält man *zum Beispiel*
- ◦ für Schnitt mit $z = c$: einen Kreis, bzw. für $c = 0$ einen Punkt,
- ◦ für Schnitt mit $y = c$: eine Hyperbel, bzw. für $c = 0$ zwei sich schneidende Geraden,
- ◦ für Schnitt mit $z = y + c$: Parabel, Doppelgerade

Definition 4.1. Eine Teilmenge $Q \subset \mathbb{R}^2$ ist ein *Kegelschnitt*, wenn es eine Isometrie zwischen $\mathbb{R}^2$ und einer Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$ gibt, unter der Q auf $C \cap E$ abgebildet wird, also auf den Schnitt der Ebene E mit dem *Doppelkreiskegel* $C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$.

Wir betrachten also jetzt einen Schnitt von C mit einer *beliebigen* Ebene E, wobei wir die Schnitte *bis auf Isometrie* klassifizieren. Wir können dabei die Symmetrien des Kreiskegels ausnutzen, also annehmen, dass wir eine Ebene der Form $z = c$, $c \geq 0$ betrachten, die wir dann um einen Winkel φ, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ (also um höchstens 90 Grad) um die y-Achse "kippen".
Wir überlegen uns, dass die Isometrie, die Punkte der Ebene $z = 0$ auf eine solche "allgemeine" Ebene gegeben ist, wie folgt abbildet:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\, x - \sin\varphi\, c \\ y \\ \sin\varphi\, x + \cos\varphi\, c \end{pmatrix}.$$

Die Bildpunkte dieser Transformation müssen also die Gleichung des Kreiskegels erfüllen:

$$(\cos\varphi\, x - \sin\varphi\, c)^2 + y^2 = (\sin\varphi\, x + \cos\varphi\, c)^2.$$

Unter Verwendung der Doppelwinkelsätze (Additionstheoreme) $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi$ und $2\cos\varphi\sin\varphi = \cos 2\varphi$ erhalten wir eine einfachere Form

$$(\cos 2\varphi)x^2 - 2c\sin 2\varphi\, x + y^2 = (\cos 2\varphi)c^2, \tag{3}$$

also eine polynomiale Gleichung vom Grad 2 in den Variablen x und y.
Fall 1. Für $\varphi = \pi/4$, also $\cos 2\varphi = 0$ und $\sin 2\varphi = 1$ ergibt dies

$$-2c\, x + y^2 = 0$$

also für $c > 0$ eine **Parabel** $x = \frac{1}{2c}y^2$, und für $c = 0$ eine **Gerade** (genauer eine Doppelgerade) $y^2 = 0$.

Nehmen wir also jetzt $\varphi \neq \pi/4$ an, so können wir durch $\cos 2\varphi$ teilen und quadratisch ergänzen, und erhalten

$$(x - c\tan 2\varphi)^2 \ + \ \frac{y^2}{\cos 2\varphi} = (1 + \tan^2 2\varphi)c^2.$$

Wenn wir jetzt $x - 2c\tan 2\phi$ einfach durch x ersetzen, so entspricht das einer Translation, also einer Isometrie, und wir erhalten

$$x^2 \ + \ \frac{y^2}{\cos 2\varphi} = \frac{c^2}{\cos^2 2\varphi}.$$

Fall 2. Für $0 \leq \varphi < \pi/4$ ist $\cos 2\varphi > 0$, dann ist das für $c > 0$ die Gleichung einer beliebigen (!) **Ellipse**, die man mit $a^2 := \frac{c^2}{\cos^2 2\varphi}$ und $b^2 := \frac{c^2}{\cos 2\varphi}$ auf die Normalform

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \ = \ 1 \qquad \text{mit } a \geq b > 0$$

bringen kann; für $c = 0$ erhält man entsprechend mit $b^2 := \cos 2\varphi$

$$x^2 + \frac{y^2}{b^2} \ = \ 0 \qquad \text{mit } b > 0$$

also den **Punkt** $(0, 0)$.
Fall 3. Für $\pi/4 < \varphi \leq \pi/2$ ist $\cos 2\varphi < 0$, dann ist das für $c > 0$ die Gleichung einer **Hyperbel**, die man mit $a^2 := \frac{c^2}{\cos^2 2\varphi}$ und $b^2 := -\frac{c^2}{\cos 2\varphi}$ auf die Normalform

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \ = \ 1 \qquad \text{mit } a \geq b > 0$$

bringen kann. Beachte, dass dies keine *beliebige* Hyperbel ist, sondern eine, bei der die Asymptoten eines Astes maximal einen rechten Winkel einschließen.
Für $c = 0$ erhält man entsprechend mit $a^2 := \frac{1}{\cos^2 2\varphi}$ und $b^2 := -\frac{1}{\cos 2\varphi}$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \ = \ 0 \qquad \text{mit } a \geq b > 0,$$

also **zwei sich schneidende Geraden** $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$, bzw. $y = \pm\frac{b}{a}x$.
Damit haben wir im Wesentlichen den folgenden Satz bewiesen — dessen Zusatz man auch leicht verifiziert.

Theorem 4.2. *Jeder Schnitt des "orthogonalen" Standard-Kreiskegels*

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$$

mit einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ ist isometrisch zu einer Menge aus genau einer der folgenden sechs Familien:
1. *eine Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit $a \geq b > 0$,*
2. *eine Parabel $x = \frac{1}{2c}y^2$ mit $c > 0$,*
3. *eine Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ mit $a \geq b > 0$ (also mit Öffungswinkel $\alpha \leq \pi/2$),*
4. *zwei sich schneidende Geraden,*
5. *eine Gerade, oder*
6. *ein Punkt.*

Umgekehrt tritt jede dieser Figuren mit den gegebenen Parametern auch als Schnitt auf.

4.2 Quadriken

Achtung: wir haben eigentlich noch nicht definiert, was eine Ellipse/Hyperbel/Parabel eigentlich *ist*. Entsprechende Definitionen in verschiedenen Lehrbüchern sind ausgesprochen unbefriedigend. Achten Sie bei der Lektüre zum Beispiel darauf, ob euklidische oder affine Äquivalenz zugelassen wird ...

Jedenfalls sehen wir aus der Diskussion im vorherigen Abschnitt, mit Gleichung (3), dass die Kegelschnitte alle Lösungsmengen von quadratischen Gleichungen sind, sie sind also "Quadriken".

Definition 4.3. Eine *Quadrik* (oder *Hyperfläche zweiten Grades*) in einem n-dimensionalen affinen Raum ist die Lösungsmenge $Q \subset \mathbb{R}^n$ einer Polynomgleichung vom Grad 2 in den affinen Koordinaten des Raumes.

Man spricht dabei von *quadratischen Gleichungen*. Die Quadrik wird auch als *Nullstellenmenge* des Polynoms $q(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ in den Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ bezeichnet.

Lemma 4.4. *Die Definition einer Quadrik ist unabhängig von den gewählten Koordinaten: Jedes Bild einer Quadrik unter einer affinen Transformation (insbesondere also: unter einer euklidischen Transformation) ist wieder eine Quadrik.*
Jeder Schnitt einer Quadrik mit einem affinen Unterraum ist wieder eine Quadrik.

In der obigen Definition haben wir Polynome vom Grad höchstens 1, also *lineare* Polynome, ausgeschlossen. Dieser Fall ist nicht besonders interessant: dann ist Q entweder leer, oder eine Hyperebene im $\mathbb{R}^n$, oder der gesamte $\mathbb{R}^n$. Wir werden sehen, dass alle diese Fälle (außer dem $\mathbb{R}^n$) durch die "Hintertür" doch wieder auftauchen: Immerhin ist das Quadrat $(x-a)^2$ eines linearen Terms $(x-a)$ quadratisch, und hat dieselbe Nullstellenmenge wie dieser.

If Fall $n = 1$ ist Q also die Lösung einer quadratischen Gleichung, also besteht Q aus einem Punkt ("doppelte Nullstelle") oder aus zwei Punkten oder ist leer.

Für $n = 2$ können wir die quadratische Gleichung wie folgt schreiben:

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\}$$

für $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ mit $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Bessere Notation, mehrere Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} Q &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a_{11}{x_1}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}{x_2}^2 + 2a_{01}x_1 + 2a_{02}x_2 + a_{00} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : (1, x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \end{aligned}$$

für $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(0 \leq i, j \leq 2)$, wobei wir $a_{ij} = a_{ji}$ annehmen dürfen, und nicht alle a_{ij} mit $i, j \geq 1$ verschwinden.

Entsprechend können wir Quadriken im n-dimensionalen Raum wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} Q &= \Big\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{0\le i,j\le n} a_{ij}x_ix_j = 0, \text{ mit } x_0 := 1\Big\} \\ &= \Big\{x \in \mathbb{R}^n : (1, x^t) \begin{pmatrix} a_{00} & {a_0}^t \\ a_0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = 0\Big\} \\ &= \Big\{x \in \mathbb{R}^n : (1, x^t) \begin{pmatrix} c & b^t \\ b & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = 0\Big\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : x^tAx + 2b^tx + c = 0\} \end{aligned}$$

für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch (und nicht die Nullmatrix, $A \neq O$), $a_0 \in \mathbb{R}^n$, $a_{00} \in \mathbb{R}$
bzw. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch (mit $A \neq O$), $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe. Eine Quadrik im $\mathbb{R}^n$ enthalte die sieben Punkte $0, a, b, c, a+b, a+c$ und $b+c$. Man zeige, dass sie auch den Punkt $a+b+c$ enthält.

4.2.1 Euklidische Klassifikation der Quadriken

Im Folgenden werden Koordinatentransformationen angewandt, um die Quadriken auf besonders einfache, und eindeutig bestimmte, Gleichungen zu bringen, also auf „Normalform“. Dabei wenden wir an, in dieser Reihenfolge:
(1) orthogonale Transformationen,
(2) Translationen, und dann evtl.
(3) Skalierung.
Dabei verwenden wir, dass die Kombination von (1) und (2) eine beliebige Isometrie ergibt. Diese Kombination muss uns also die Klassifikation der Quadriken bis auf Isometrie liefern. Lassen wir zusätzlich Skalierung (von einzelnen Variablen) zu, so ergibt das beliebige affine Transformationen, und damit die entsprechende Klassifikation der Quadriken.
Ein fundamentales Hilfsmittel aus der Linearen Algebra ist der Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen/symmetrische Matrizen:

Theorem 4.5 (Spektralsatz)**.** *Jeder selbstadjungierte Endomorphismus auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum mit Skalarprodukt hat eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.*
Äquivalent: *Für jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (also mit $A^t = A$) gibt es eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (also mit $S^t = S^{-1}$), so dass $S^tAS = \Lambda$ eine Diagonalmatrix ist.*

Zur Äquivalenz der beiden Formulierungen: Die Diagonaleinträge von Λ sind die Eigenwerte von A. Die Spalten von S bilden eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A, wobei für die zweite Formulierung das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ angenommen wird (was wegen Gram–Schmidt zulässig ist). Damit ist der Spektralsatz *konstruktiv*: wir wissen, wie man S konstruieren kann.

Sei nun die Quadrik $Q \subset \mathbb{R}^n$ gegeben als Menge der Nullstellen von

$$q(x) = (1, x^t) \begin{pmatrix} c & b^t \\ b & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$$

mit $A = A^t \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.

(1) Orthogonale Transformation. Wir konstruieren $S \in \mathrm{O}(n)$ so, dass

$$S^t A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && \lambda_k &&&&&& \\ &&& \lambda_{k+1} &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& \lambda_{k+\ell} &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0$ und $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_{k+\ell} < 0$. (Zum Beispiel kann man die nichtverschwindenden Eigenwerte nach Größe ordnen, und erhält damit $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k > 0 > \lambda_{k+1} \geq \cdots \geq \lambda_{k+\ell}$.) Es ist also $k, \ell \geq 0$ mit $k + \ell > 0$.
Damit können wir das quadratische Polynom $q(x)$ wie folgt faktorisieren:

$$\begin{aligned} q(x) &= (1, x^t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & b^t \\ b & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \\ &= (1, \bar{x}^t) \begin{pmatrix} c & \bar{b}^t \\ \bar{b} & \Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit $\bar{x} := S^{-1}x$, $\bar{b} := S^t b$ und $\Lambda := S^t A S$.
Hier sind also die ersten $k \geq 0$ Spalten von S orthonormale Eigenvektoren zu positiven Eigenwerten von A, die nächsten $\ell \geq 0$ Spalten von S sind orthonormale Eigenvektoren zu negativen Eigenwerten von A, und die letzten $n - k - \ell \geq 0$ Spalten von S sind eine Orthonormalbasis für den Eigenraum zum Eigenwert 0, also zum Kern von A. Dabei dürfen wir im Fall, dass das mehr als eine Spalte ist ($n - k - \ell \geq 2$) annehmen, dass alle diese Spalten außer möglicherweise der ersten, senkrecht auf b stehen, dass also die letzten $n - k - \ell - 1$ Koordinaten von $\bar{b} = S^t b$ verschwinden.

Damit liegt das Polynom $q(x)$ jetzt in der Form

$$q(x) = \lambda_1 \bar{x}_1^2 + \cdots + \lambda_{k+\ell} \bar{x}_{k+\ell}{}^2 + 2\bar{b}_1 \bar{x}_1 + \cdots + 2\bar{b}_{k+\ell+1} \bar{x}_{k+\ell+1} + c$$

vor (wobei $\bar{b}_{k+\ell+1} = 0$ sein könnte, und im Fall $k + \ell = n$ auch so sein muss). Dieses kann man nun durch eine quadratische Ergänzung vereinfachen, oder — äquivalent dazu (!) — durch eine geeignete Translation.

(2) Translation. Eine Translation $x \mapsto x + u$ (also eine *euklidische* Abbildung) lässt sich in den "homogenen" Koordinaten (mit zusätzlicher Koordinate $x_0 = 1$) als *lineare* Abbildung darstellen:

$$\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1\\u+x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0^t\\u & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix},$$

wobei E die Einheitsmatrix darstellt (hier: $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$). Die Inverse der Translation um u ist die Translation um $-u$. Daher faktorisieren wir weiter $q(x)$ als

$$(1, x^t)\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & S\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -u^t\\0 & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & u^t\\0 & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & S^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c & b^t\\b & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & S\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0^t\\u & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0^t\\-u & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & S^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix} =$$

$$(1, \bar{\bar{x}}^t)\begin{pmatrix}c + 2\bar{b}^t u + u^t\Lambda u & \bar{b}^t + u^t\Lambda\\ \bar{b} + \Lambda u & \Lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \bar{\bar{x}}\end{pmatrix}$$

mit $\bar{\bar{x}} := S^t x - u$.

Nun setzen wir

$$r := \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \Lambda = k + \ell$$

und

$$r' := \operatorname{rank}\begin{pmatrix}c & b^t\\b & A\end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix}c & \bar{b}^t\\ \bar{b} & \Lambda\end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix}c + 2\bar{b}^t u + u^t\Lambda u & \bar{b}^t + u^t\Lambda\\ \bar{b} + \Lambda u & \Lambda\end{pmatrix}.$$

Dabei ist offenbar $0 \le r \le r' \le r + 2$, $r \le n$ und $r' \le n + 1$.

Fall 1: Liegt b im Spaltenraum von A, d.h. $\bar{b}$ im Spaltenraum von Λ, also $\operatorname{rank}(\bar{b}\,\Lambda) = \operatorname{rank}(\Lambda) = k + \ell$, so gibt es ein u mit $\bar{b} + \Lambda u = 0$ (nämlich $u := -\Lambda^*\bar{b}$, wobei Λ^* die Diagonaleinträge λ_i^{-1} hat), und wir berechnen $c + 2\bar{b}^t u + u^t\Lambda u = c - \bar{b}^t\Lambda^*\bar{b} =: \bar{\bar{c}}$. In diesem Fall "1b" ist $r' = r$ wenn $\bar{\bar{c}} = 0$ ist, und sonst sind wir im Fall "1a", mit $r' = r + 1$.

Fall 2: Liegt b nicht im Spaltenraum von A, d.h. $\bar{b}$ nicht im Spaltenraum von Λ, so hat $q(x)$ also einen linearen Term, und wir können c durch eine weitere Translation wegtransformieren.

Insgesamt ergibt das den folgenden Normalformsatz:

Theorem 4.6 (Euklidische Hauptachsentransformation)**.** *Jede nicht-leere Quadrik im $\mathbb{R}^n$ lässt sich durch eine Isometrie auf eine der folgenden drei Typen von Normalformen bringen, für $k \ge 1$, $\ell \ge 0$, $k + \ell \le n$, und $a_1 \ge \cdots \ge a_k > 0$, $0 < a_{k+1} \le \cdots \le a_{k+\ell}$:*

(1a) $$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{x_k^2}{a_k^2} - \frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}^2} - \cdots - \frac{x_{k+\ell}^2}{a_{k+\ell}^2} = 1,$$

(1b) $$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{x_k^2}{a_k^2} - \frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}^2} - \cdots - \frac{x_{k+\ell}^2}{a_{k+\ell}^2} = 0 \qquad \textit{mit } k \ge \ell \textit{ und } a_1 = 1,$$

(2) $$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{x_k^2}{a_k^2} - \frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}^2} - \cdots - \frac{x_{k+\ell}^2}{a_{k+\ell}^2} = 2x_{k+\ell+1} \qquad \textit{mit } k \ge \ell,\ k + \ell < n.$$

Hier ist $r = k + \ell$, und (1a) entspricht dem Fall $r' = r + 1$, (1b) ist der Fall $r' = r$, und (2) ist der Fall $r' = r + 2$.

Dass man jede Quadrik auf eine dieser Normalformen transformieren kann, haben wir im Wesentlichen bewiesen; dafür kann man zunächst annehmen, dass entweder $\bar{\bar{c}} = 0$ gilt, oder $\bar{\bar{c}} = 1$ (indem man nämlich im Fall $\bar{\bar{c}} \neq 0$ die Gleichung durch $\bar{\bar{c}}$ teilt, und ggf. (für $\bar{\bar{c}} < 0$) noch k und ℓ

vertauscht. Nun setzt man $\lambda_i =: \frac{1}{a_i^2}$ für $i \leq k$ und $\lambda_i =: -\frac{1}{a_i^2}$ für $k < i \leq k + \ell$. Die Bedingung $k \geq 1$ schließt die linearen Quadriken aus.

Eigentlich würde man den Normalformsatz so formulieren, dass die Normalformen alle unterschiedlich sind, und Quadriken mit unterschiedlicher Normalform, also mit unterschiedlichen Daten

$$[\text{Typ}, k, \ell, a_1, a_2, \ldots, a_{k+\ell}]$$

auch nicht ineinander transformierbar sind. Das ist für die oben angegebene Formulierung nicht ganz richtig, aus zwei Gründen:

1. die Quadriken der Form (1b) haben im Fall $k = \ell$ zusätzliche Äquivalenzen, und
2. die Quadriken der Form (1b) für $\ell = 0$ sind lineare Unterräume, und dabei ist das Ergebnis unabhängig von den Werten a_i.

Mit etwas mehr Mühe/Geduld lässt sich die obige Beschreibung aber zu so einer "eindeutigen Normalform" verfeinern. Um dies zu *formulieren*, kann/müsste man insbesondere im Fall (1b) lexikographische Ordnung etc. verwenden. Um sie zu *beweisen*, argumentiert man entweder geometrisch, oder algebraisch — muss dann zeigen, dass die Gleichung durch die Quadrik im Wesentlichen (bis auf Vielfache) eindeutig festgelegt ist.

13. Mai 2013

Wir geben die Klassifikation der Quadriken für $n = 2$ tabellarisch an:

Typ	k	ℓ	r	r'	typische Gleichung	Beschreibung
(1a)	1	0	1	2	$\frac{x^2}{a^2} = 1$	zwei parallele Geraden
(1a)	2	0	2	3	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Ellipse
(1a)	1	1	2	3	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Hyperbel
(1b)	1	0	1	1	$x^2 = 0$	(Doppel-)Gerade
(1b)	2	0	2	2	$\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 0$	Punkt
(1b)	1	1	2	2	$\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 0$	Geradenpaar mit Schnittpunkt
(2)	1	0	1	3	$\frac{x^2}{a^2} = 2y$	Parabel

Wir diskutieren also nochmal die Aussage „die Kegelschnitte sind genau die nicht-leeren ebenen Quadriken" … und stellen fest, dass es drei Ausnahmen gibt, nämlich die Ebene, die leere Menge, und zwei parallele Geraden — alle drei Ausnahmen sind Quadriken, aber keine Kegelschnitte.

Genauso bekommen wir die Quadriken im $\mathbb{R}^3$ als

Typ	k	ℓ	r	r'	typische Gleichung	Beschreibung
(1a)	1	0	1	2	$\frac{x^2}{a^2} = 1$	paralleles Ebenenpaar
(1a)	2	0	2	3	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Zylinder über einer Ellipse
(1a)	3	0	3	4	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	Ellipsoid
(1a)	1	1	2	3	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Zylinder über einer Hyperbel
(1a)	2	1	3	4	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	einschaliges Hyperboloid
(1a)	1	2	3	4	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	zweischaliges Hyperboloid
(1b)	1	0	1	1	$x^2 = 0$	Doppelebene
(1b)	2	0	2	2	$\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 0$	Gerade
(1b)	3	0	3	3	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + z^2 = 0$	Punkt
(1b)	1	1	2	2	$\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 0$	Ebenenpaar mit Schnittgerade
(1b)	2	1	3	3	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0$	Kreiskegel
(2)	1	0	1	3	$\frac{x^2}{a^2} = 2y$	Zylinder über einer Parabel
(2)	2	0	2	4	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$	elliptisches Paraboloid
(2)	1	1	2	4	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$	hyperbolisches Paraboloid

Diese wurde übrigens erstmals von Euler im 1748 erschienenen zweiten Band seiner "Introductio in analysin infinitorum" angegeben, der auch die heute noch verwendeten Begriffe Quadrik, ein-/zweischaliges Hyperboloid etc. eingeführt hat. Siehe [3, S. 311-312].

Bemerkung 4.7. Die interessantesten Fälle sind offenbar die mit $r' = n + 1$; alle anderen Quadriken erhält man als Zylinder oder Kegel über niedrigdimensionaleren Quadriken.

Unter den Quadriken im $\mathbb{R}^3$ mit $r' = n + 1$ (nichtlinear, nicht Zylinder oder Kegel, also im Fall (1b)) sind

- ◦ einschaliges Hyperboloid und
- ◦ hyperbolisches Paraboloid

Regelflächen, bei denen es durch jeden Punkt der Quadrik *zwei* Geraden gibt, die in der Quadrik verlaufen. Unter den Regelflächen wird insbesondere auf das einschalige Hyperboloid hingewiesen — siehe die "Mae West"-Skulptur in München [4].

Aufgabe. Man zeige, dass sich jedes einschalige Hyperboloid

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax^2 + by^2 - cz^2 = 1\}$$

(mit $a, b, c > 0$) als Vereinigung von (unendlich vielen) Geraden in $\mathbb{R}^3$ darstellen lässt.

Aufgabe. Man bestimme jeweils den Typ der folgenden Quadrik in $\mathbb{R}^2$ für $a = 1$, $a = 4$, $a = 7$:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ ax^2 - 4xy + y^2 + 2x - y = 0\}$$

Im Fall der Ellipse bestimme man die beiden Brennpunkte.

4.2.2 Affine Klassifikation der Quadriken

Wenn wir nur auf Klassifikation der Quadriken bis auf *affine* Transformation interessiert sind, dann dürfen wir insbesondere Koordinatentransformationen der Form $\frac{x_i}{a_i} \mapsto x_i$ durchführen, und bekommen damit aus dem euklidischen den affinen Normalformsatz:

Theorem 4.8 (Affine Hauptachsentransformation)**.** *Jede nicht-lineare Quadrik im* $\mathbb{R}^n$ *lässt sich durch eine affine Transformation auf eine der folgenden drei Typen von Normalformen bringen, für* $k \geq 1$, $\ell \geq 0$, $k + \ell \leq n$*:*

$$\begin{aligned}
\text{(1a)}\quad x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+\ell}^2 &= 1,\\
\text{(1b)}\quad x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+\ell}^2 &= 0 \qquad \textit{mit } k \geq \ell,\\
\text{(2)}\quad x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+\ell}^2 &= 2x_{k+\ell+1} \qquad \textit{mit } k + \ell < n.
\end{aligned}$$

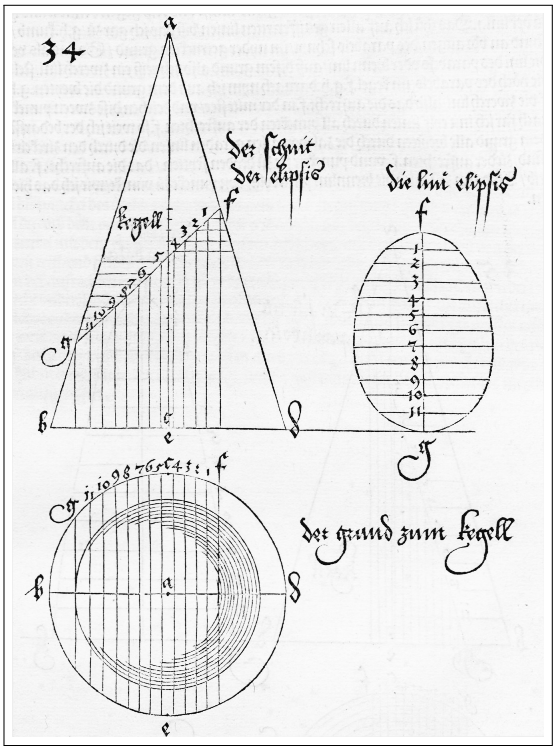
Dass man jede Quadrik auf eine dieser Normalformen transformieren kann, folgt aus dem euklidischen Fall mit einer zusätzlichen Substitution $\frac{x_i}{a_i} \mapsto x_i$.
Quadriken mit diesen Normalformen sind alle unterschiedlich und nicht durch affine Transformationen ineinander transformierbar — mit einer Ausnahme, nämlich der linearen Quadrik im Fall (1b) mit $\ell = 0$. Um das zu beweisen, argumentiert man wieder entweder geometrisch, oder algebraisch.

4.3 Kegelschnitte und ihre Eigenschaften

4.3.1 Die Ellipse

… **Definition:** Eine *Ellipse* Q ist
— affines Bild des Einheitskreises,
— euklidisches Bild von $\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$, mit $b \geq a > 0$,

… hat zwei aufeinander senkrecht stehende Symmetrieachsen, $x = 0$ bzw. $y = 0$, die *Hauptachsen*; vergleiche dazu die Zeichnung aus Dürers berühmter "Underweysung der Messung, mit dem Zirckel und Richtscheyt" [2]:



... hat vier *Scheitelpunkte* $(\pm a, 0)$ und $(0, \pm b)$ auf den Hauptachsen (für $a = b$ sind alle Geraden durch das Zentrum $(0, 0)$ Symmetrieachsen, und alle Punkte auf der Ellipse Scheitelpunkte),

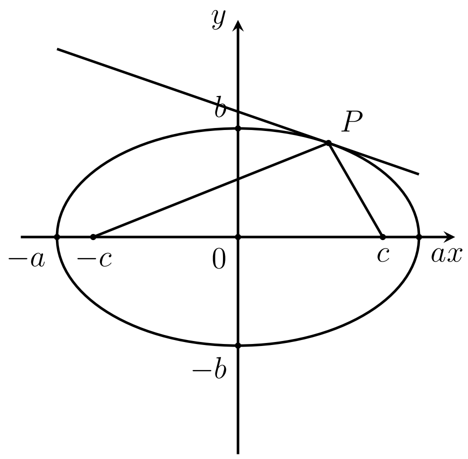
... hat *Brennpunkte* $F = (c, 0)$ und $F' = (-c, 0)$, für $c := \sqrt{a^2 - b^2}$ (hier verwenden wir $a \geq b$; für $a = b$ fallen die Brennpunkte zusammen).

Proposition 4.9 (Drei Eigenschaften/Charakterisierungen der Brennpunkte)**.**

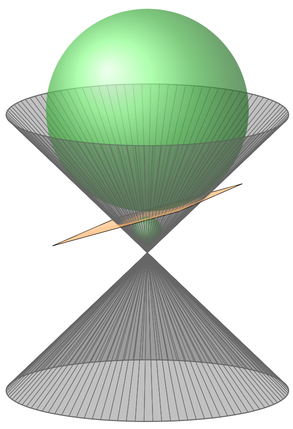
- ["Gärtner-Konstruktion"] *Für alle Punkte* $P = (x_0, y_0)$ *auf der Ellipse gilt*

$$d(F, P) + d(P, F') = 2a.$$

- [Reflexionseigenschaft] *Lichtstrahlen, die von einem Brennpunkt ausgehen, und in der Ellipse reflektiert werden, gehen durch den anderen Brennpunkt; das heißt, die Strecken* FP *und* $F'P$ *haben denselben Winkel zur Tangente an die Ellipse in* P*.*



- [Dandelin'sche Kugeln] *3-dimensionale geometrische Konstruktion*



Die Gleichungen von Tangenten an Kegelschnitte bekommt man durch einen Prozess, der "Polarisierung" heißt:

Lemma 4.10 (Tangentengleichung). *Die Tangente ℓ an die Ellipse $Q = \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ im Punkt $P = (x_0, y_0)$ ist gegeben durch*

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Beweis. Ein Punkt (x, y), der wie P sowohl auf der Ellipse Q als auch auf ℓ liegt, erfüllt

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \qquad \text{Punkt liegt auf } Q \\ \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} &= 1 \qquad \text{Punkt liegt auf } \ell \\ \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} &= 1 \qquad P \text{ liegt auf } Q \end{aligned}$$

und damit

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 0$$

also $x = x_0$ und $y = y_0$. □

Warum ging das so einfach? Wenn ich eine Gerade mit einem Kegelschnitt (z.B. einer Ellipse) schneide, und einen Schnittpunkt kenne, dann lässt sich der zweite ganz leicht bestimmen – wie die zweite Nullstelle einer quadratischen Gleichung, wenn man die erste kennt.
Zwei „affine“ Sätze über Ellipsen:

Proposition 4.11. *[1, Sect. 2.2.3] Die Mittelpunkte der Schnitte einer Ellipse mit einer Parallelenschar liegen auf einem Durchmesser.*

Aufgabe. Sei Q eine Ellipse und P ein Punkt in der Ellipse. Beschreiben Sie die Kurve, auf der die Mittelpunkte der Schnittsegmente der Ellipse mit den Geraden durch P liegen.

Proposition 4.12. *[1, Sect. 2.2.3] Zu jedem Durchmesser ℓ einer Ellipse gibt es einen anderen Durchmesser ℓ' so dass:*

- *Die Mittelpunkte der Sehnen, die zu ℓ parallel sind, liegen auf ℓ',*
- *die Mittelpunkte der Sehnen, die zu ℓ' parallel sind, liegen auf ℓ.*

4.3.2 Die Hyperbel

… **Definition:** Eine *Hyperbel* Q ist
— affines Bild Standardhyperbel $\{(x, y) : xy = 1\}$,
— euklidisches Bild von $\{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\}$, mit $a, b > 0$,

… hat zwei aufeinander senkrecht stehende Symmetrieachsen, $x = 0$ bzw. $y = 0$, die *Hauptachsen*,

… hat zwei *Scheitelpunkte* $(\pm a, 0)$ auf den Hauptachsen,

… hat *Brennpunkte* $F = (c, 0)$ und $F' = (-c, 0)$, für $c := \sqrt{a^2 + b^2}$,

… hat zwei *Asymptoten*, die durch $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ gegeben sind, also $bx \pm ay = 0$, und denen sich die *Hyperbeläste* annähern,

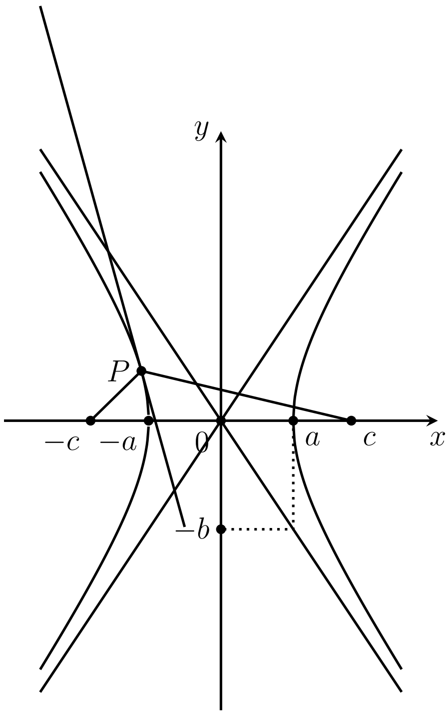
… Konstruktion der Brennpunkte mit dem Zirkel! (Verwende Kreise mit Mittelpunkt $(\pm a, 0)$ durch $(0, \pm b)$)

Proposition 4.13 (Zwei Charakterisierungen der Brennpunkte)**.**

- ["Gärtner-Konstruktion"] *Für alle Punkte $P = (x_0, y_0)$ auf der Hyperbel gilt*

$$|d(F,P) - d(P,F')| = 2a.$$

- [Reflexionseigenschaft] *Lichtstrahlen, die auf einen Brennpunkt zielen, aber in der Hyperbel reflektiert werden, zielen dann auf den anderen Brennpunkt; das heißt, die Strecken FP und $F'P$ haben denselben Winkel zur Tangente an die Hyperbel in P.*



Lemma 4.14 (Tangentengleichung)**.** *Die Tangente an die Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ im Punkt $P = (x_0, y_0)$ ist gegeben durch*

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

1. Juni 2012

Aufgabe. Haben eine Hyperbel und eine Ellipse dieselben Brennpunkte, so haben sie vier Schnittpunkte, und sie schneiden sich in diesen senkrecht.

4.3.3 Die Parabel

… **Definition:** Eine *Parabel* Q ist:
— affines Bild der Standardparabel $\{(x,y) : y = x^2\}$,
— euklidisches Bild von $\{y = ax^2\}$, mit $a > 0$,
… hat nur eine Symmetrieachse, $y = 0$.
… der *Scheitelpunkt* ist $(0,0)$,

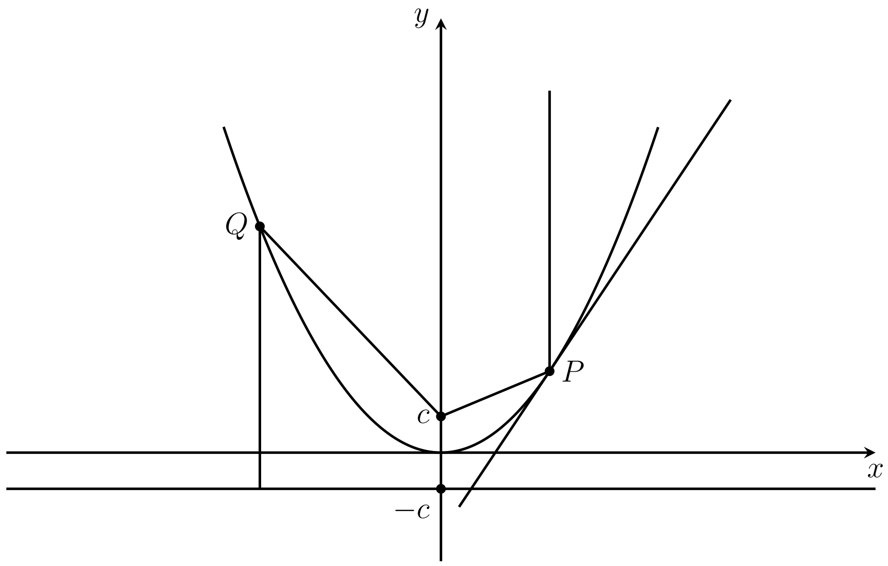
$\ldots$ der *Brennpunkt* ist $F = (0, c)$, für $c := \frac{1}{4a}$,
$\ldots$ die *Leitgerade* ist $L = \{y = -c\}$.

Proposition 4.15 (Zwei Charakterisierungen der Brennpunkte)**.**

- [Parabolspiegel!] *Für alle Punkte* $P = (x_0, y_0)$ *auf der Parabel gilt*

$$d(F, P) = d(P, L).$$

- [Reflexionseigenschaft] *Lichtstrahlen, die vom Brennpunkt ausgehen, und in der Parabel reflektiert werden, sind danach parallel zur Symmetrieachse.*

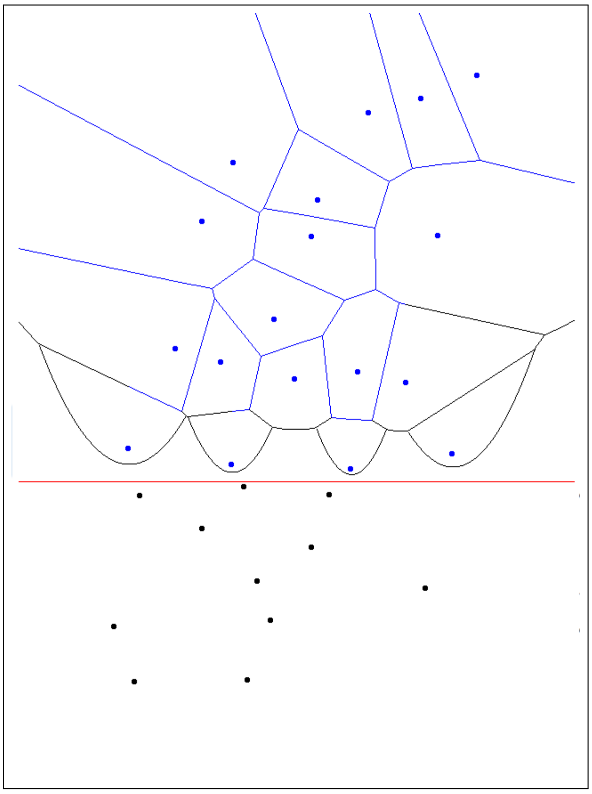


Aufgabe. Beweisen Sie Proposition 4.15

Lemma 4.16 (Tangentengleichung)**.** *Die Tangente an die Parabel* $y = ax^2$ *im Punkt* $P = (x_0, y_0)$ *ist gegeben durch*

$$y = ax_0(2x - x_0).$$

Anwendung/Illustration: "Fortune's Sweep" zur Konstruktion von ebenen Voronoi-Diagrammen. Selbst ausprobieren:



(Applet auf http://www.diku.dk/hjemmesider/studerende/duff/Fortune/)

[1] David A. Brannan, Matthew F. Esplen, and Jeremy J. Gray. *Geometry*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2012.

[2] Albrecht Dürer. *Unterweysung der Messung mit dem Zyrkel und Rychtscheydt*. Nürnberg, 1525. http://de.wikisource.org/wiki/Underweysung_der_Messung,_mit_dem_Zirckel_und_Richtscheyt,_in_Linien,_Ebenen_unnd_gantzen_corporen/Erstes_Buch.

[3] Gerd Fischer. *Lernbuch Lineare Algebra und Analytische Geometrie*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2011.

[4] Günter M. Ziegler. Mathematik im Alltag: Der Name der Rose. *Mitteilungen der DMV*, 19(1):42–44, 2011. http://www.mathematik.de/ger/presse/ausdenmitteilungen/artikel/mdmv-19-1-042.pdf.