7 Sphärische und elliptische Geometrie

Hier diskutieren wir ausführlicher *sphärische Geometrie*, also

$$X = S^n, \qquad G = \mathrm{O}(n+1)$$

und dann, davon abgeleitet, *elliptische Geometrie*, also

$$X = S^n/(x \sim -x) = \mathbb{R}\mathrm{P}^n, \qquad G = \mathrm{PO}(n+1) = \mathrm{O}(n+1)/(\pm I).$$

7.1 Sphärische Zweiecke

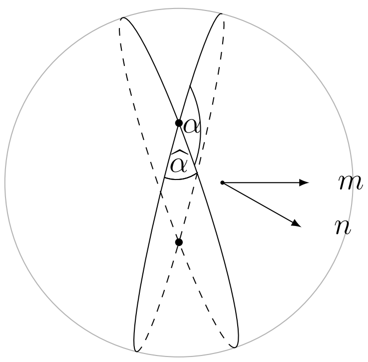
Definition 7.1 (Kollinear, Hemisphäre, Zweieck)**.** *Kollineare* Punkte auf der Sphäre S^n sind Punkte, die auf einem *Großkreis* liegen (also auf einem Schnitt der S^n mit einem 2-dimensionalen Unterraum).
Eine *Hemisphäre* auf der S^n ist eine Teilmenge von der Form

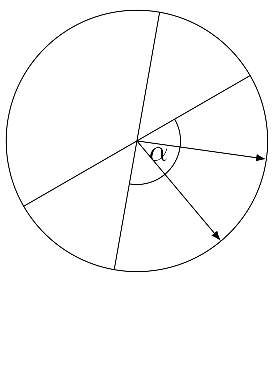
$$H_{N'} := \{x \in S^n : \langle x, N' \rangle \geq 0\}$$

wobei $N' \in S^n$ der *Pol* der Hemisphäre ist ($N \in H_{N'}$, $-N \notin H_{N'}$).
Ein *Zweieck* ist der Schnitt von zwei verschiedenen, nicht gegenüberliegenden Hemisphären, also $H_{N'} \cap H_{M'}$ mit $M' \neq \pm N'$.

Lemma 7.2. *Jede Hemisphäre hat die Hälfte des Volumens der n-dimensionalen Sphäre. Ein Zweieck hat einen Anteil von $\alpha/2\pi$ am Volumen der n-Sphäre, wobei α der Innenwinkel des Zweiecks ist (und $\widehat{\alpha}$ der Außenwinkel), also*

$$\widehat{\alpha} + \alpha = \pi, \qquad \langle N, N' \rangle = \cos \widehat{\alpha}, \qquad \langle N, N' \rangle = -\cos \alpha.$$





7.2 Sphärische Dreiecke

Sehr viel Geometrie lässt sich von der Geometrie von Dreiecken ableiten.
Jedes Dreieck liegt in einer 2-dimensionalen Hypersphäre, also dem Schnitt der S^n mit einem 3-dimensionalen Unterraum des $\mathbb{R}^{n+1}$. Daher nehmen wir im Folgenden ohne Einschränkung der Allgemeinheit an, dass wir ein sphärisches Dreieck in der S^2 betrachten.

Definition 7.3 (Dreieck)**.** Ein *Dreieck* $\triangle \subset S^2$ ist in der sphärischen Geometrie ein Schnitt dreier Hemisphären

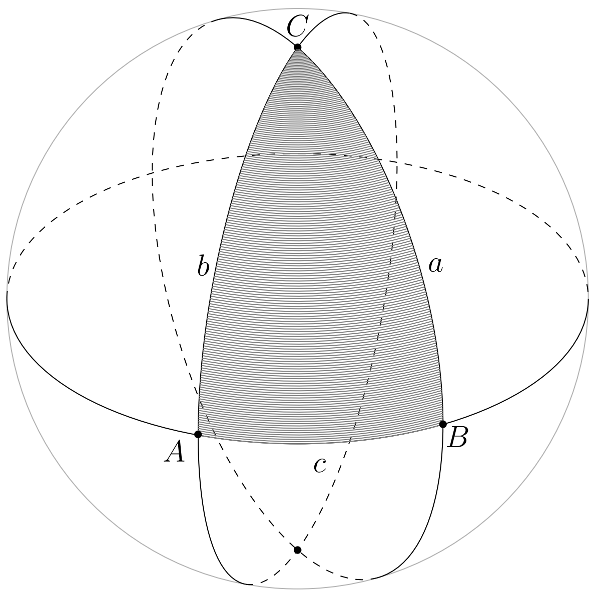
$$\triangle := H_{A'} \cap H_{B'} \cap H_{C'}$$

deren Pole A', B', C' nicht kollinear sind (also nicht auf einem Großkreis liegen).

Lemma 7.4. *Jedes sphärische Dreieck $\triangle \subset S^2$ lässt sich auch beschreiben als*

$$\triangle = \{x \in S^2 : x = \lambda A + \mu B + \nu C,\ \lambda, \mu, \nu \geq 0\}$$

für drei nicht kollineare Punkte $A, B, C \in S^2$, die Ecken *des Dreiecks.*



Beweis. Die Punkte A, B, C sind gegeben durch

$$A = \frac{B' \times C'}{|B' \times C'|}, \qquad B = \frac{C' \times A'}{|C' \times A'|}, \qquad C = \frac{A' \times B'}{|A' \times B'|}.$$

Mit dieser Konstruktion überprüft man

$$\begin{aligned}
\langle A', A\rangle &> 0, & \langle A', B\rangle &= 0, & \langle A', C\rangle &= 0,\\
\langle B', A\rangle &= 0, & \langle B', B\rangle &> 0, & \langle B', C\rangle &= 0,\\
\langle C', A\rangle &= 0, & \langle C', B\rangle &= 0, & \langle C', C\rangle &> 0.
\end{aligned}$$

Alternativ: Die zwei Gleichungen in der ersten Spalte legen A fest bis auf einen freien Parameter, $|A| = 1$ legt dann A fest bis auf das Vorzeichen, $\langle A', A\rangle > 0$ legt das Vorzeichen fest. $\square$

Lemma 7.5. *Im Dreieck $\triangle = ABC$ sind die Kantenlängen (in der intrinsischen Metrik der Sphäre, vom Radius* 1*) gegeben durch*

$$\cos a = \langle B, C\rangle, \qquad \cos b = \langle C, A\rangle, \qquad \cos c = \langle A, B\rangle$$

und die äußeren Winkel durch

$$\cos\widehat{\alpha} = \langle B', C'\rangle, \qquad \cos\widehat{\beta} = \langle C', A'\rangle, \qquad \cos\widehat{\gamma} = \langle A', B'\rangle,$$

mit Innenwinkeln $\alpha = \pi - \widehat{\alpha}$ usw.

Beweis. Abstände auf der Sphäre (also auch die Kantenlängen im Dreieck) messen wir in der *intrinsischen* Metrik: der Abstand zwischen A und B, also die Kantenlänge c, ist durch die Länge des kürzesten Weges von A nach B gegeben. Der kürzeste Weg ist ein Großkreisbogen. Weil wir die Einheitsphäre (Radius 1 betrachten), ist die Länge des Großkreisbogens genau der Winkel zwischen den Vektoren $0A$ und $0B$, die wir wie üblich mit den Punkten A und B identifizieren. Und nach der üblichen Formel für das Skalarprodukt ist damit $\langle A, B\rangle = \cos c$. (Vergleiche Definition 1.10.)
Die anderen Formeln folgen analog, bzw. aus Symmetrie und Dualität. □

Proposition 7.6. *Zu jedem Dreieck $\triangle = ABC$ gibt es das duale Dreieck $\triangle' = A'B'C'$ so dass*

- *das Duale des Dualen ist das Ausgangsdreieck: $\triangle'' = \triangle$,*
- *die Kantenlängen des Dreiecks sind die Außenwinkel des Dualen, und umgekehrt: $a' = \widehat{\alpha}$, usw.*

Lemma 7.7 (Dreiecksungleichungen)**.** *Die Kantenlängen, Außenwinkel und Innenwinkel des sphärischen Dreiecks $\triangle = ABC$ erfüllen*

$$\begin{array}{cccc} a+b-c>0 & a-b+c>0 & -a+b+c>0 & a+b+c<2\pi \\ \widehat{\alpha}+\widehat{\beta}-\widehat{\gamma}>0 & \widehat{\alpha}-\widehat{\beta}+\widehat{\gamma}>0 & -\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}+\widehat{\gamma}>0 & \widehat{\alpha}+\widehat{\beta}+\widehat{\gamma}<2\pi \\ \alpha+\beta-\gamma<\pi & \alpha-\beta+\gamma<\pi & -\alpha+\beta+\gamma<\pi & \alpha+\beta+\gamma>\pi. \end{array}$$

Beweis. Die ersten drei Ungleichungen für die Seitenlängen folgen aus der Dreiecksungleichung für die Metrik auf der Sphäre. Die vierte folgt aus

$$a+b+c = d(B,C)+d(C,A)+d(A,B) < d(B,C)+d(C,-B)+d(-B,A)+d(A,B) = \pi+\pi.$$

Die Ungleichungen für die Außenwinkel folgen daraus sofort nach Proposition 7.6, und damit auch die Ungleichungen für die Innenwinkel mit $\alpha = \pi - \widehat{\alpha}$ usw. □

Insbesondere wissen wir aus Lemma 7.7, dass in jedem sphärischen Dreieck die Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma$ größer ist als π.

Theorem 7.8. *Die Fläche des Dreiecks $\triangle = ABC$ mit Innenwinkeln α, β, γ ist $\alpha + \beta + \gamma - \pi$.*

Beweis. Die Zweiecke, die von den Innenwinkeln von $\triangle$ und von denen des gegenüberliegenden Dreiecks $-\triangle$ aufgespannt werden, überdecken die Sphäre S^2 ganz, dabei die Dreiecke $\triangle$ und $-\triangle$ dreifach, den Rest aber einfach. Also erhalten wir

$$(2\alpha + 2\beta + 2\gamma) + (2\alpha + 2\beta + 2\gamma) = 4\pi + 2\mathrm{Vol}(\triangle) + 2\mathrm{Vol}(\triangle),$$

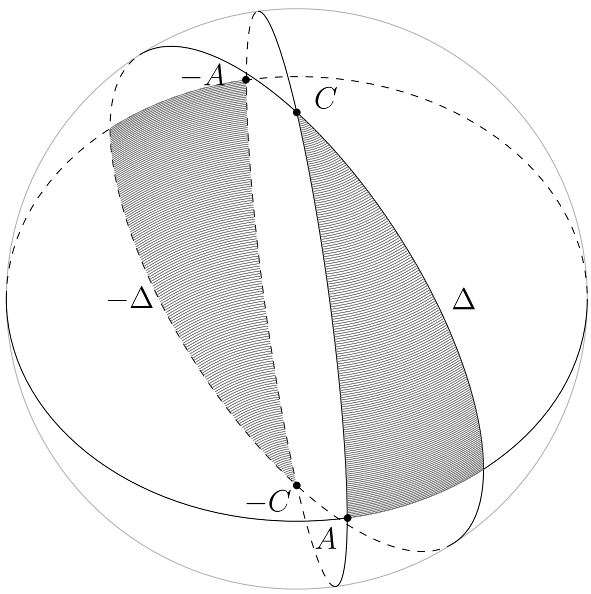
also

$$4\alpha + 4\beta + 4\gamma = 4\pi + 4\mathrm{Vol}(\triangle).$$

$\square$

Aufgabe. Sei V ein sphärisches Viereck, dessen vier Kanten alle gleich lang sind, und dessen Innenwinkel alle $2\pi/3$ (also $120°$) betragen. Berechnen Sie die Fläche von V auf zwei verschiedene Weisen, sowie den Umfang von V.

Aufgabe. Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck mit Kathetenlängen $3\pi/8$ und $\pi/2$. Berechnen Sie Umfang und Fläche des Dreiecks, falls es (i) ein sphärisches Dreieck (ii) ein euklidisches Dreieck (also in der Ebene $\mathbb{R}^2$) ist. Welches Dreieck ist größer?



28. Juni 2012

Proposition 7.9. *Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$.*

(i) *Ein sphärisches Dreieck mit den Kantenlängen a, b, c existiert dann und nur dann, wenn die vier Dreiecksungleichungen*

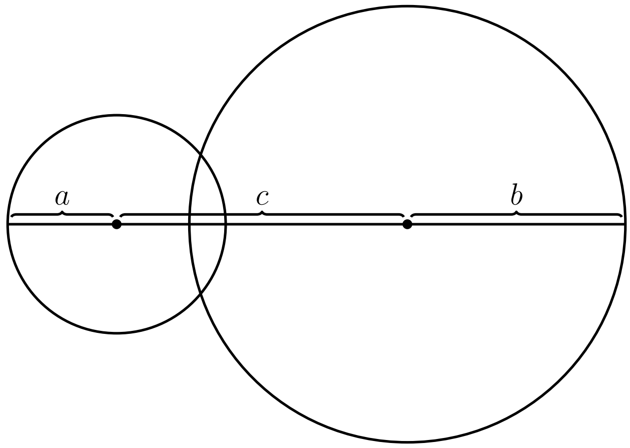
$$a+b-c>0 \qquad a-b+c>0 \qquad -a+b+c>0 \qquad a+b+c<2\pi$$

erfüllt sind.

(ii) *Wenn das Dreieck existiert, dann ist es eindeutig bis auf Kongruenztransformationen.*

Beweis. Wir dürfen A, B im Abstand c auf dem Äquator platzieren, und betrachten die Kreisscheiben K_A und K_B vom Radius b bzw. a um A bzw. B.

Wir brauchen, dass die Kreisscheiben überlappen und sich die Randkreise in zwei Schnittpunkten (in der oberen und in der unteren Hemisphäre) schneiden. Das wird durch die vier Ungleichungen garantiert: Wenn $a + b \leq c$ ist, dann sind die beiden Kreisscheiben disjunkt. Wenn $a+c \leq b$, dann ist $K_B \subset K_A$; wenn $b+c \leq a$, dann ist $K_A \subset K_B$. Wenn $a+b+c \geq 2\pi$, dann ist $K_A \cup K_B = S^2$, die Kreischeiben überdecken die Sphäre, aber die Randkreise schneiden sich nicht.



In allen anderen Fällen gibt es wie gewünscht die beiden Schnittpunkte, und daraus folgt Existenz und Eindeutigkeit des Dreiecks. $\square$

In jedem sphärischen Dreieck kann man aus den Seitenlängen die Winkel berechnen (wie in der euklidischen Geometrie, mit Hilfe des Kosinussatzes!), aber auch aus den Winkeln die Seitenlängen berechnen.

Proposition 7.10 (Kosinussatz)**.** *Im sphärischen Dreieck mit Kantenlängen a, b, c und Außenwinkeln $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\gamma}$ gilt der Seitenkosinussatz*

$$\cos\widehat{\alpha} = \frac{-\cos a + \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

und der Winkelkosinussatz

$$\cos a = \frac{-\cos\widehat{\alpha} + \cos\widehat{\beta}\cos\widehat{\gamma}}{\sin\widehat{\beta}\sin\widehat{\gamma}}.$$

und entsprechend für $\cos\widehat{\beta}$ und $\cos\widehat{\gamma}$ bzw. $\cos b$ und $\cos c$ bei gleichzeitiger Permutation von $a \to b \to c$ und $\widehat{\alpha} \to \widehat{\beta} \to \widehat{\gamma}$.

Beweis 1 (nach Pak [3, p. 360]). Wir dürfen nach einer Drehung annehmen, dass A im Nordpol der Sphäre liegt, und B, C auf Großkreisen durch den Nordpol, die den Äquator in $\bar{B}$ bzw. $\bar{C}$ schneiden.
Wenn wir $A, B, C, \bar{B}, \bar{C}$ als Einheitsvektoren behandeln, so gilt offenbar

$$B = (\cos c)A + (\sin c)\bar{B} \qquad C = (\cos b)A + (\sin b)\bar{C}.$$

Nun gilt $\langle \bar{B}, \bar{C} \rangle = \cos\alpha$, $\langle B, C \rangle = \cos a$, sowie $\langle A, \bar{B} \rangle = \langle A, \bar{C} \rangle = 0$ und damit

$$\cos a = \langle B, C \rangle = \langle (\cos c)A + (\sin c)\bar{B}, (\cos b)A + (\sin b)\bar{C} \rangle = \ldots = \cos c \cos b + \sin c \sin b \cos\alpha.$$

Beachte, dass α der Innenwinkel ist. Der erste Teil des Winkelkosinussatzes folgt nun für $\widehat{\alpha} = \pi - \alpha$, der zweite aufgrund von Dualität. $\square$

Beweis 2 (nach Springborn [4, p. 7]). Seien $V := (A\ B\ C) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $W := (A'\ B'\ C') \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die Basismatrizen, die dem Dreieck bzw. dem polaren Dreieck entsprechen.
Die *Gram-Matrix* zu V ist dann die symmetrische, positiv-definite Matrix

$$G := V^t V = \begin{pmatrix} \langle A,A\rangle & \langle A,B\rangle & \langle A,C\rangle \\ \langle B,A\rangle & \langle B,B\rangle & \langle B,C\rangle \\ \langle C,A\rangle & \langle C,B\rangle & \langle C,C\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{pmatrix}.$$

Genauso gehört zu W die Gram-Matrix

$$G' := W^t W = \begin{pmatrix} \langle A',A'\rangle & \langle A',B'\rangle & \langle A',C'\rangle \\ \langle B',A'\rangle & \langle B',B'\rangle & \langle B',C'\rangle \\ \langle C',A'\rangle & \langle C',B'\rangle & \langle C',C'\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\widehat{\gamma} & \cos\widehat{\beta} \\ \cos\widehat{\gamma} & 1 & \cos\widehat{\alpha} \\ \cos\widehat{\beta} & \cos\widehat{\alpha} & 1 \end{pmatrix}.$$

Und schließlich berechnen wir das Produkt

$$W^t V = \begin{pmatrix} \langle A',A\rangle & \langle A',B\rangle & \langle A',C\rangle \\ \langle B',A\rangle & \langle B',B\rangle & \langle B',C\rangle \\ \langle C',A\rangle & \langle C',B\rangle & \langle C',C\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle A',A\rangle & 0 & \\ 0 & \langle B',B\rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle C',C\rangle \end{pmatrix} =: D,$$

eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonaleinträgen, also invertierbar.
Damit können wir G' einerseits aus W berechnen, also aus $\cos\widehat{\alpha}, \cos\widehat{\beta}$ und $\cos\widehat{\gamma}$, andererseits aus V mit $W^t = DV^{-1}$ und $W = (V^t)^{-1}D$, und damit $G' = W^tW = DV^{-1}(V^t)^{-1}D = DG^{-1}D$, und damit aus a, b und c.
Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für G' und Vergleich der Matrixeinträge liefert zuerst Formeln für die Diagonaleinträge von D, und dann die Seitenkosinussätze.
Die Winkelkosinussätze erhält man entweder analog, oder viel einfacher aus der Dualität von Proposition 7.6. ☐

Wir geben zwei weitere, wichtige Formeln/Resultat der sphärischen Geometrie ohne Beweis an.

Proposition 7.11 (Sinussatz)**.** *Im sphärischen Dreieck mit Kantenlängen a, b, c und Außenwinkeln $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\gamma}$ gilt*

$$\frac{\sin a}{\sin\widehat{\alpha}} = \frac{\sin b}{\sin\widehat{\beta}} = \frac{\sin c}{\sin\widehat{\gamma}}.$$

(Dies gilt natürlich genauso für die Innenwinkel α, β, γ, wegen $\widehat{\alpha} = \pi - \alpha$ und damit $\sin\widehat{\alpha} = \sin\alpha$, usw.)

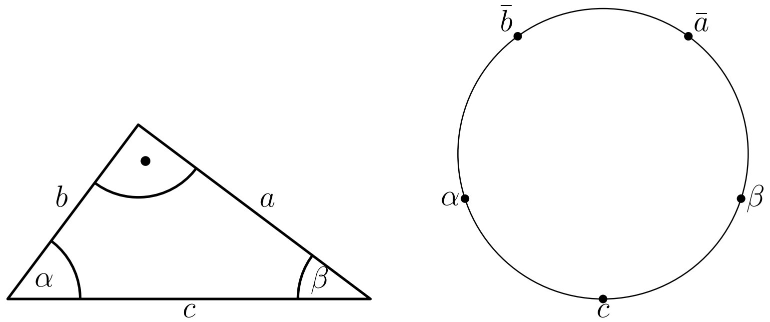
Proposition 7.12 (Napier'sche Regel)**.** *Im rechtwinkligen sphärischen Dreieck mit Seitenlängen a, b, c, Innenwinkeln α, β sowie $\gamma = \pi/2$, und "Seitenkomplementen" $\bar{a} := \pi/2 - a$, $\bar{b} := \pi/2 - a$ gilt*

$$\cos c = \sin\bar{a}\sin\bar{b} = \cot\alpha\cot b,$$

sowie die vier weiteren Gleichungen, die man durch die zyklische Vertauschung

$$c \to \alpha \to \bar{b} \to \bar{a} \to \beta \to c$$

daraus gewinnen kann.



7.3 Sphärische und Elliptische Geometrie

Im letzten Abschnitt haben wir die Geometrie von sphärischen Dreiecken in der S^2 analysiert. Alle Ergebnisse gelten aber genauso in der S^n $(n \geq 2)$, weil jedes Dreieck der S^n in einer 2-dimensionalen Untersphäre liegt.

Weiter kann man analysieren, dass die hochdimensionale Geometrie sehr weitgehend aus der Geometrie von Dreiecken abgeleitet werden kann. Siehe zum Beispiel die Beiträge zur "Coarse Metric Geometry" von Mikhail Gromov, dem Abel-Preisträger von 2010, vgl. Burago, Burago & Ivanov [1].

Trotzdem ist auch festzustellen, dass die Gewinnung von expliziten Formeln, zum Beispiel für das Volumen eines sphärischen Tetraeders aus den Kantenlängen, schwierig ist, und tief in andere Bereiche der Mathematik führt — zum Beispiel in die Algebraische Topologie (K-Theorie!), siehe Dupont [2].

Die Geometrie, die wir dabei betrachten, ist nach Klein durch

$$X = S^n \qquad G = \mathrm{O}(n+1)$$

gegeben. Zu den Invarianten gehört dann die Metrik

$$d(x,y) = \cos^{-1}\langle x, y\rangle,$$

die Werte im Intervall $[0,\pi]$ annimmt.

Die Dimension der Gruppe $\mathrm{O}(n+1)$ ist $\frac{1}{2}n(n+1)$, genau wie die der Gruppe $\mathrm{Eukl}(n)$.

Will man eine Geometrie im Sinne von Euklid und Hilbert gewinnen, in der es durch zwei verschiedene Punkte immer *genau eine* Gerade gibt, so muss man gegenüberliegende Punkte auf der Sphäre identifizieren:

Definition 7.13 (Elliptische Geometrie)**.** Für die *Elliptische Geometrie* nehmen wir als Punkte die Paare von antipodalen Punkten von S^n, als Geraden die Mengen der Antipodenpaare auf einem Großkreis. Wir erhalten so die Geometrie

$$X = S^n/(x \sim -x) = \mathbb{R}\mathrm{P}^n \qquad G = \mathrm{O}(n+1)/(\pm I) = \mathrm{PO}(n+1).$$

In dieser Geometrie geht nicht nur durch zwei verschiedenen Punkte genau eine Gerade, sondern zwei verschiedene Geraden schneiden sich immer in genau einem Punkt, es gibt also *keine Parallelen* — genau wie in der projektiven Geometrie ($X = \mathbb{R}\mathrm{P}^n$, $G = \mathrm{PGL}(n+1,\mathbb{R})$, mit

$n^2 - 1 = n(n+2)$ Freiheitsgraden), wobei die elliptische Geometrie aber eine viel kleinere Gruppe hat, und dafür mehr Invarianten, unter anderem die Metrik

$$d(x,y) = \min\{\cos^{-1}\langle x,y\rangle, \cos^{-1}\langle x,-y\rangle\} = \cos^{-1}|\langle x,y\rangle|,$$

die Werte im Intervall $[0,\pi/2]$ annimmt.
Die Dimension der Gruppe PO$(n+1)$ ist $\frac{1}{2}n(n+1)$, genau wie die der Gruppe O$(n+1)$.
Dreiecke, Winkel, Volumina etc. verhalten sich dabei sehr ähnlich wie in der sphärischen Geometrie, wobei die Geometrie nur für ungerades n orientierbar ist.

Aufgabe. Berechnen Sie die Kantenlängen, Winkel, Fläche und Umfang des Dreiecks mit den Ecken Berlin (Geographische Lage: 52° 31′ N, 13° 24′ O), Brüssel (50° 51′ N, 4° 21′ O) und Athen (37° 59′ N, 23° 44′ O) auf der Erdkugel, auf der der Abstand von den Polen zum Äquator bekanntlich 10.000 km beträgt.

[1] Dmitri Burago, Yuri Burago, and Sergei Ivanov. *A Course in Metric Geometry*, volume 33 of *Graduate Studies in Math.* Amer. Math. Soc., Providence RI, 2001.

[2] Johan L. Dupont. *Scissors Congruences, Group Homology and Characteristic Classes*, volume 1 of *Nankai Tracts in Mathematics*. World Scientific, Singapore, 2001.

[3] Igor Pak. Lectures on Discrete and Polyhedral Geometry. book manuscript at http://www.math.ucla.edu/~pak/geompol8.pdf, version of April 20, 2010.

[4] Boris A. Springborn. Geometry I. Lecture Notes, TU Berlin/Berlin Mathematical School, 2007/08, 59 pp., ftp://ftp.math.tu-berlin.de/pub/Lehre/GeometryI/WS07/geometry1_ws07.pdf.