

8 Möbiusgeometrie

17.+21. Juni 2013

Quelle/Referenz für dieses Kapitel: Springborn [1, Lectures 28/29]

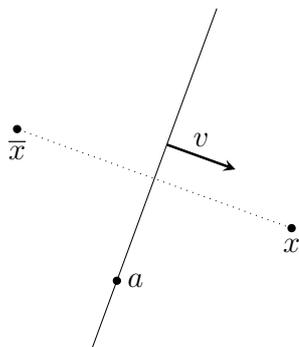
8.1 Spiegelung an einer Sphäre

Jede Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^n$ kann in der Form $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x - a, v \rangle = 0\}$ geschrieben werden, wobei $a \in H$ ist und $v \neq 0$ ein Normalenvektor ist.

Die Spiegelung an H ist gegeben durch

$$x \mapsto \bar{x} = x - 2 \frac{\langle x - a, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v.$$

Dabei liegt $\hat{x} =: x - \frac{\langle x - a, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v$ auf der Hyperebene, und es gilt $|x - \hat{x}| = |\bar{x} - \hat{x}|$.

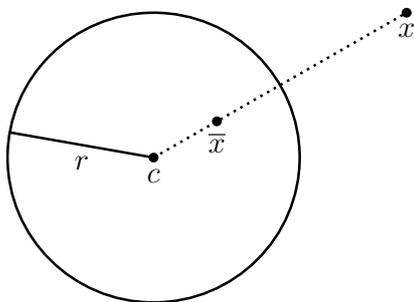


Sehr ähnlich definiert man die Spiegelung (oder ‘Inversion’) an einer Sphäre.

Definition 8.1 (Spiegelung an einer Sphäre). Sei $S(c, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x - c, x - c \rangle = r^2\}$ die Sphäre mit Mittelpunkt $c \in \mathbb{R}^n$ und Radius $r > 0$.

Die Spiegelung an $S(c, r)$ ist die Abbildung

$$s : x \mapsto \bar{x} = c + \frac{r^2}{\langle x - c, x - c \rangle} (x - c).$$



Wir notieren:

- \bar{x} liegt auf dem Strahl, der in c beginnt und durch x geht.
- Dabei gilt $|x - c| |\bar{x} - c| = r^2$.
- Die Punkte auf $S(c, r)$ werden auf sich selbst abgebildet.

- Die Abbildung ist eine Involution: $x \mapsto \bar{x} \mapsto \overline{\bar{x}} = x$.
- Die Abbildung ist für $x = c$ nicht definiert. Wir fügen einen *Punkt im Unendlichen* “ ∞ ” hinzu, und definieren dann die Abbildung als $c \mapsto \infty$ and $\infty \mapsto c$.
- Mit dieser Festsetzung ist die Spiegelung an der Sphäre $S(c, r)$ eine *Bijektion* $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$.

8.2 Möbiusgeometrie

Definition 8.2 (Möbiustransformationen, Möbiusgeometrie). Eine *Möbiustransformation* ist eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, die sich als Hintereinanderausführung von endlich vielen Spiegelungen in Hyperebenen und/oder Sphären darstellen lässt.

Ist eine Möbiustransformation die Hintereinanderausführung einer geraden Anzahl von Spiegelungen, so ist sie *orientierungserhaltend*, andernfalls ist sie *orientierungsumkehrend*.

Die Gruppe der Möbiustransformationen bezeichnen wir mit $\text{Möb}(n)$, die Untergruppe der orientierungserhaltenden Möbiustransformationen mit $\text{Möb}^+(n)$.

$$X = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}, \quad G := \text{Möb}(n).$$

In dieser Definition sind natürlich einige Behauptungen versteckt, etwa dass $\text{Möb}(n)$ wirklich eine Gruppe ist und $\text{Möb}^+(n)$ eine Untergruppe, und dass Orientierung wohldefiniert ist.

Lemma 8.3. *Ähnlichkeitsabbildungen sind Möbiustransformationen:*

$$\text{Ähnl}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \rtimes (\text{O}(n) \times \mathbb{R}_{>0}) \subseteq \text{Möb}(n).$$

Beweis. Jede orthogonale Abbildung in $\text{O}(n)$ ist eine Hintereinanderausführung von höchstens n Spiegelungen an Hyperebenen.

Translationen kann man durch Spiegelung an zwei parallelen Hyperebenen erzeugen.

Die Streckung $x \mapsto \lambda x$ erhält man durch Spiegelung an $S^{n-1} = S(0, 1)$, gefolgt von Spiegelung an $S(0, \sqrt{\lambda})$. \square

Hinweis: Mit “Sphären” bezeichnet man in der Möbiusgeometrie oft nicht nur die $(n - 1)$ -dimensionale Sphären $S(c, r) \subset \mathbb{R}^n$, sondern auch die Hyperebenen (interpretiert als “Sphären durch ∞ ”).

Theorem 8.4. *Möbiustransformationen bilden Hyperebenen und Sphären auf Hyperebenen und Sphären ab.*

Beweis. (1) Es reicht, das für die Spiegelung in der Einheitsosphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ zu zeigen, weil jede Sphäreninversion in einer beliebigen Sphäre S dargestellt werden kann als

- Ähnlichkeitstransformation, die S auf $S(0, 1)$ abbildet,
- gefolgt von Inversion in $S(0, 1)$
- gefolgt von Umkehrung der Ähnlichkeitstransformation.

(2) Wir zeigen, dass

$$\{x \in \mathbb{R}^n : p|x|^2 - 2\langle x, v \rangle + q = 0\} \quad \text{für } |v|^2 - pq > 0$$

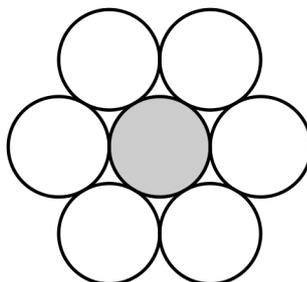
genau die Sphären (also $(n - 1)$ -Sphäre und Hyperebenen) im \mathbb{R}^n beschreibt. Für $p = 0$ folgt nämlich $v \neq 0$, und wir haben eine Hyperebenengleichung. Für $p \neq 0$ zeigt quadratische Ergänzung, dass dies eine Sphärengleichung ist.

(3) Rechnung: Für $\bar{x} := \frac{1}{|x|^2}x$ gilt

$$p|x|^2 - 2\langle x, v \rangle + q = 0 \quad \iff \quad q|\bar{x}|^2 - 2\langle \bar{x}, v \rangle + v = 0.$$

□

Aufgabe. Beschreiben Sie das Bild der folgenden Konfiguration



nach einer sphärischen Inversion

- in einem der abgebildeten Kreise,
- in einem Kreis mit Mittelpunkt in einem der Berührungspunkte.

Theorem 8.5 (Möbiustransformationen sind lokal winkelerhaltend (“konform”)). *Möbiustransformationen erhalten lokal die Winkel zwischen glatten Kurven (insbesondere: Geraden, Kreise) die sich schneiden.*

Beweis. Weil Ähnlichkeitsabbildungen offenbar konform sind, reicht es, dies für die Inversion in der Einheitssphäre $x \mapsto \frac{1}{|x|^2}x$ nachzuweisen.

Nun rechnet man das Differenzial dieser Abbildung (oder, wer mutiger ist, einer beliebigen Sphäreninversion $s : \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$) aus, also die Matrix $Ds = \left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j}\right)$, und zeigt, dass diese Matrix eine Ähnlichkeitsabbildung beschreibt, also Vielfaches einer orthogonalen Matrix ist. □

Bemerkung 8.6. (1) “winkelerhaltend” gilt auch bei ∞ , wenn man den Winkel im Unendlichen geeignet interpretiert. (Dazu betrachtet man Geraden durch den Mittelpunkt der Sphäre, in der invertiert wird.)

(2) Für $n > 2$ gilt auch die Umkehrung: eine konforme Abbildung ist eine Möbiustransformation. Auch schon lokal. Für $n = 2$ ist das global auch richtig, lokal aber völlig falsch: Riemann’scher Abbildungssatz. Trotzdem ist komplexe Interpretation wichtig, siehe nächster Abschnitt.

Umkehrung von Theorem 8.4:

Proposition 8.7. *Für $n > 1$ sind die bijektiven Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, die Hyperebenen und Sphären auf Hyperebenen und Sphären abbilden, genau die Möbiustransformationen.*

Beweis. Eine solche Abbildung bildet insbesondere auch Kreise und Geraden (die 1-dimensionalen Schnitte von Hyperebenen und Sphären) auf Kreise und Geraden ab.

(1) Im Fall $f(\infty) = \infty$ werden alle Geraden auf Geraden abgebildet. Also haben wir es nach Theorem 2.6 mit einer affinen Abbildung zu tun. Weiter dürfen wir (nach einer Translation) annehmen, dass die Abbildung 0 auf 0 abbildet. Also ist die Abbildung linear.

Wenn nun weiter die Einheitssphäre auf die Einheitssphäre abgebildet wird, dann ist die Abbildung eine Ähnlichkeitstransformation (nämlich ein Vielfaches einer orthogonalen Abbildung).

(2) Gilt $f(\infty) = c$, so sei g die Inversion in der Sphäre $S(c, 1)$. Weil die Sphäreninversion g Hyperebenen und Sphären auf Hyperebenen und Sphären abbildet, gilt dies auch für die Abbildung $g \circ f$. Die Abbildung $g \circ f$ bildet nach ∞ nach ∞ ab, ist also nach Fall (1) eine Möbiustransformation. Weil $g = g^{-1}$ als Sphäreninversion aber auch eine Möbiustransformation ist, gilt dies auch für f . \square

Bemerkung: für $n = 1$ ist das natürlich falsch.

Erweiterung von Lemma 8.3:

Korollar 8.8. *Ähnlichkeitstransformationen sind genau die Möbiustransformationen, die ∞ fixieren.*

Korollar 8.9. *Für die n -dimensionale Möbiusgeometrie ist die Anzahl der Freiheitsgrade, also die Dimension der Gruppe $\text{Möb}(n)$, gleich $\frac{1}{2}(n+2)(n+1) = \binom{n+2}{2}$.*

Beweis. n Freiheitsgrade für den Punkt, der durch Inversion g in einer Sphäre vom Radius 1 nach Unendlich abgebildet wird. $g \circ f$ ist dann eine Ähnlichkeitstransformation, und für die gibt es (wie schon diskutiert) $n+1 + \binom{n}{2}$ Freiheitsgrade, mit $\binom{n}{2} = \dim \text{O}(n)$. \square

Aufgabe. Beschreiben Sie die Möbiustransformationen, die die folgenden Folgen von Punkten aufeinander abbilden:

- (i) $(0, 0), (1, 0), (0, 1) \rightarrow (0, 0), (1, 0), (2, 0)$,
- (ii) $(0, 0), (1, 0), (0, 1) \rightarrow (0, 0), (1, 0), (-1, 0)$.

8.3 Komplex-projektive Interpretation der 2-dimensionalen Möbiusgeometrie

Im Fall $n = 2$ können wir den \mathbb{R}^2 mit der komplexen Zahlenebene identifizieren, $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ also mit $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Die Möbiustransformationen in der Ebene können wir alle als gebrochen-lineare komplexe oder konjugiert-komplexe Funktionen darstellen:

- orientierungserhaltende Ähnlichkeitstransformationen sind $z \mapsto az + b$ für $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$,
orientierungsumkehrende Ähnlichkeitstransformationen sind $z \mapsto a\bar{z} + b$ für $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| = 1$,
- Spiegelung an der x -Achse ist $z \mapsto \bar{z}$,
- Spiegelung im Einheitskreis ist $z \mapsto \frac{1}{|z|^2} z = \frac{1}{\bar{z}}$.

Proposition 8.10. Die orientierungserhaltenden Möbiustransformationen auf $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sind genau die Transformationen

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{für } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ mit } \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0,$$

die orientierungsumkehrenden Möbiustransformationen auf $\widehat{\mathbb{C}} =$ sind genau die Transformationen

$$z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \quad \text{für } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ mit } \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0.$$

Beweis.

(1) Die angegebenen gebrochen-linearen Transformationen bilden eine Gruppe: Die orientierungserhaltenden sind dabei genau die projektiven Transformationen von \mathbb{CP}^1 .

(2) Als Spezialfälle identifizieren wir alle oben angegebenen Erzeuger für die Möbiustransformationen in der Ebene; also ist die Gruppe $\text{Möb}(2)$ in der Gruppe der gebrochen-linearen komplexen Funktionen enthalten.

(3) Umgekehrt sieht man aus

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)}$$

für $c \neq 0$, dass jede gebrochen-lineare Funktion sich als Komposition der oben angegebenen Erzeuger schreiben lässt. Entsprechend gilt das, wenn wir z durch \bar{z} erzeugen. Daraus folgt auch die umgekehrte Inklusion: Jede gebrochen-lineare komplexe oder konjugiert-komplexe Funktion ist eine Möbiustransformation. \square

Insbesondere sehen wir also, dass $\text{Möb}^+(2) \cong \text{PGL}(2, \mathbb{C})$.

Aus der Identifikation der Möbiusgruppe der Ebene mit komplex-projektiven Transformationen können wir nun leicht mehrere wichtige Schlussfolgerungen ziehen

Korollar 8.11. (1) orientierungserhaltende Möbiustransformationen der Ebene erhalten das komplexe Doppelverhältnis

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)},$$

für vier beliebige komplexe Zahlen $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ von denen mindestens drei verschieden sind, orientierungsumkehrende Möbiustransformationen konjugieren das Doppelverhältnis.

(2) "6-Punkte-Formel": Sind z_1, z_2, z_3 und w_1, w_2, w_3 jeweils drei verschiedene Werte, so gibt es genau eine gebrochen-lineare Funktion $f \in \text{PGL}(2, \mathbb{C})$ mit $f(z_i) = f(w_i)$.

(3) Vier Punkte $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ liegen genau dann auf einem Kreis, wenn ihr Doppelverhältnis reell ist.

8.4 Stereographische Projektion als Möbiusabbildung

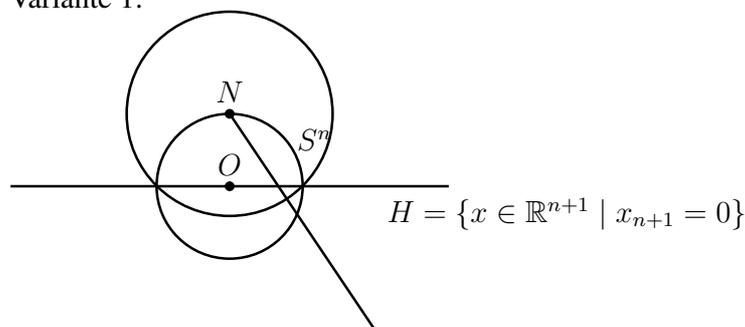
Definition 8.12 (Stereographische Projektion). Sei $S^n = S(0, 1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die Einheitskugel, und sei $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die durch $x_{n+1} = 0$ (Variante 1) bzw. $x_{n+1} = -1$ (Variante 2) gegebene Hyperebene, welche wir (durch Weglassen der konstanten letzten Koordinate, also 0 oder -1) mit \mathbb{R}^n identifizieren können.

Die *stereographische Projektion* ist die Abbildung

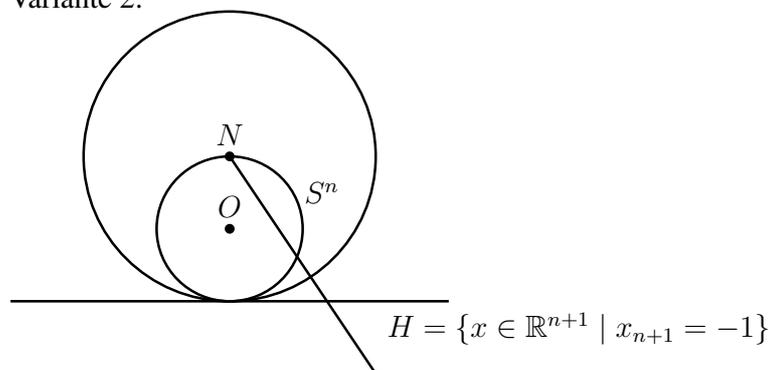
$$S^n \rightarrow H \cup \{\infty\},$$

die dadurch gegeben wird, dass der Nordpol $N \in S^n$ auf ∞ abgebildet wird, und jeder andere Punkt von $P \in S^n$ auf eindeutigen Schnittpunkt der Geraden PN mit der Hyperebene H .

Variante 1:



Variante 2:



Proposition 8.13. Die Stereographische Projektion ist die Einschränkung einer Möbiustransformation $\mathbb{R}^{n+1} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \cup \{\infty\}$, nämlich der Sphäreninversion in der Sphäre $S(N, \sqrt{2})$ in Variante 1 bzw. der Sphäre $S(N, 2)$ in Variante 2.

Beweis. Die Sphäreninversion bildet (in beiden Varianten) Geraden durch den Mittelpunkt N der Inversionssphäre auf Geraden durch N ab, andererseits die Sphäre S^n auf die Hyperebene $H \cup \{\infty\}$ ab — also den Schnittpunkt jeder Gerade mit $S \setminus \{N\}$ auf den Schnittpunkt derselben Geraden mit H . Daraus folgt schon alles. \square

Korollar 8.14. Die stereographische Projektion ist konform.

Korollar 8.15. $\text{Möb}(n)$ ist genau die Menge aller bijektiven Abbildungen $f : S^n \rightarrow S^n$, die Kreise auf Kreise abbilden. Genauso ist dies die Menge aller bijektiven Abbildungen, die $(n - 1)$ -dimensionale Teilsphären auf ebensolche abbilden.

Beweis. Mit Hilfe der (inversen) stereographischen Transformation können wir die n -dimensionale Möbiusgeometrie auch auf der n -dimensionalen Sphäre $X := S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ interpretieren.

Damit transportieren wir die Aussage, dass die Möbiustransformationen auf $X = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ genau die bijektiven Abbildungen sind, die Hyperebenen und Sphären auf Hyperebenen und Sphären abbilden — und genauso Kreise und Geraden auf Kreise und Geraden. \square

8.5 Lorentz-Geometrie

Definition 8.16. Für $p, q \geq 0$ mit $p + q = n + 1$ bezeichnet $\mathbb{R}^{p,q}$ den Vektorraum \mathbb{R}^{n+1} mit der Bilinearform

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \cdots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - \cdots - x_{p+q} y_{p+q},$$

die wir als *Skalarprodukt* bezeichnen.

Allgemeiner könnten wir mit einem endlich-dimensionalen reellen Vektorraum \mathbb{R}^m arbeiten, auf dem eine symmetrische Bilinearform gegeben ist, die nicht degeneriert (die also vollen Rang hat: nur der Nullvektor ergibt mit jedem anderen Vektor Null), die aber *nicht* notwendigerweise positiv definit ist.

In dieser Situation kann man den Algorithmus von Gram–Schmidt so anpassen, dass er doch eine “Orthogonalbasis” e_1, \dots, e_n liefert, für die

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{für } 1 \leq i = j \leq p, \\ -1 & \text{für } p < i = j \leq p + q, \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

gilt. Hier ist p die maximale Dimension eines Unterraums, auf dem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit ist, q die maximale Dimension eines Unterraums, auf dem das Skalarprodukt negativ definit ist. Insbesondere gilt $p + q = m$ (weil das Skalarprodukt nach Annahme nicht degeneriert ist), und die Kennzahlen p und q sind für alle Orthogonalbasen dieselben. Das Paar (p, q) heißt der *Index* des Vektorraums.

Mit $O(p, q)$ bezeichnet man die Gruppe aller orthogonalen Transformationen auf $\mathbb{R}^{p,q}$, die also das Skalarprodukt erhalten. Uns interessiert im Folgenden besonders der Spezialfall $q = 1$.

Definition 8.17 (Lorentz-Raum). Der Raum $\mathbb{R}^{n,1}$, also der Vektorraum \mathbb{R}^{n+1} mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n - x_{n+1} y_{n+1}$$

heißt ein *Lorentz-Vektorraum*.

Die *Lorentz-Gruppe* aller linearen Transformationen $T : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, die das Skalarprodukt erhalten, für die also $\langle Tv, Tw \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle v, w gilt, wird mit $O(n, 1)$ bezeichnet.

Lemma 8.18 (Koordinatendarstellung). Eine Matrix $A \in O(n, 1)$ ist dadurch charakterisiert, dass die Spalten eine Orthonormalbasis bezüglich des gegebenen Skalarprodukts bilden, dass also

$$A^t E A = E$$

gilt, wobei E die Diagonalmatrix

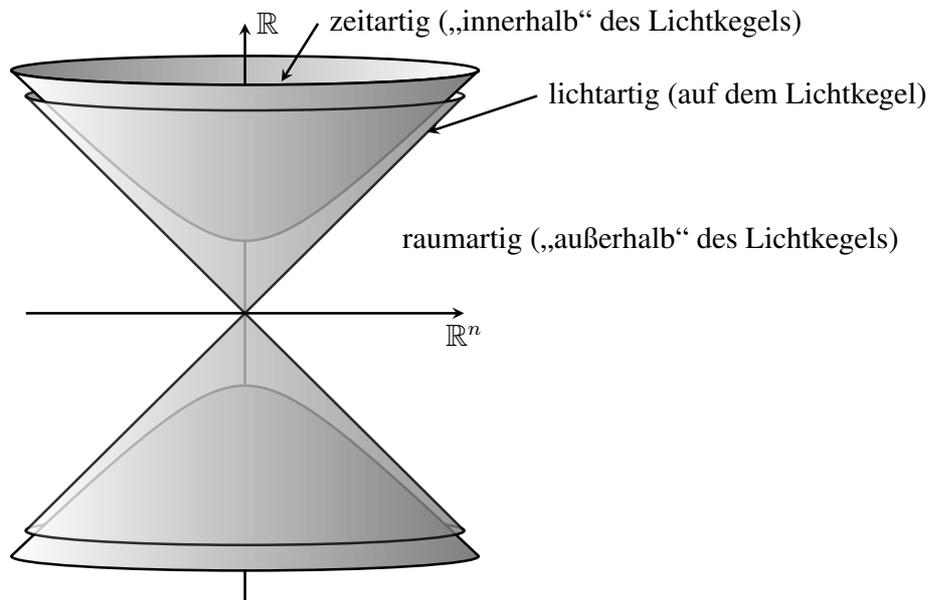
$$E = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0^t & -1 \end{pmatrix}$$

bezeichnet.

Definition 8.19 (Bezeichnungen aus der Relativitätstheorie). Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^{n,1}$ heißt

- raumartig, wenn $\langle x, x \rangle > 0$,
- lichtartig, wenn $\langle x, x \rangle = 0$,
- zeitartig, wenn $\langle x, x \rangle < 0$.

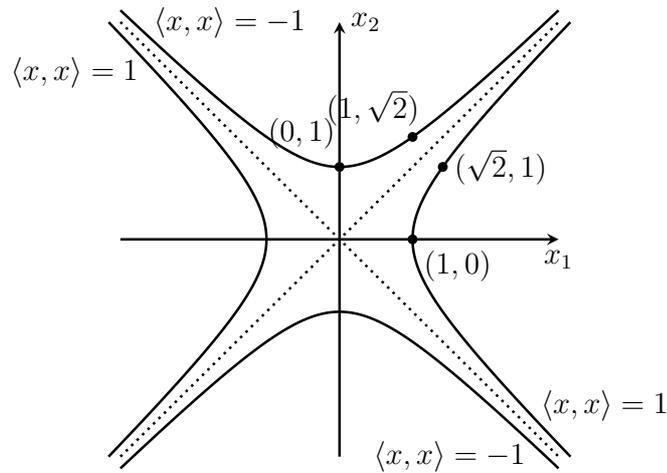
Der Doppelkegel der lichtartigen Vektoren heißt der *Lichtkegel*.



Beispiel 8.20. Im Lorentz-Raum $\mathbb{R}^{1,1}$ ist das Skalarprodukt durch $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2$ gegeben. Die Mengen $\{x \in \mathbb{R}^{1,1} : \langle x, x \rangle = 1\}$ und $\{x \in \mathbb{R}^{1,1} : \langle x, x \rangle = -1\}$ sind jeweils Hyperbeln.

Orthonormalbasen sind zum Beispiel $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Beachte: Orthonormalbasen müssen wir als geordnete Folgen von Vektoren schreiben, weil es auf die Reihenfolge ankommt.



Definition und Lemma 8.21. Die Menge der zeitartigen Vektoren der „Länge“ 1

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^{n,1} : \langle x, x \rangle = -1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

ist ein zweischaliges Hyperboloid. Dabei bezeichnet

$$H^n := \{x \in \mathbb{R}^{n,1} : \langle x, x \rangle = -1, x_{n+1} > 0\}$$

die obere Schale.

Jede orthogonale Transformation bildet die Vektoren in der oberen Schale H^n entweder auf die Vektoren der oberen Schale ab, oder auf die Vektoren der unteren Schale (d.h., er vertauscht die Schalen).

Die Untergruppe der orthogonalen Transformationen, die die obere Schale auf sich selbst abbilden, wird mit $O^+(n, 1)$ bezeichnet. Sie ist

$$O^+(n, 1) = \{A \in O(n, 1) : a_{n+1, n+1} > 0\}.$$

Die Bedingung $a_{n+1, n+1} > 0$ kann dabei so interpretiert werden, dass das Bild Ae_{n+1} des (zeitartigen) letzten Basisvektors e_{n+1} wieder zeitartig ist, also $e_{n+1}^t Ae_{n+1} > 0$ erfüllen muss.

8.6 Das reell-projektive Modell

Die Gruppe $O(n+1, 1)$ ist eine Menge von linearen Transformationen, die den Lichtkegel auf sich selbst abbildet.

Interpretieren wir die n -Sphäre nun eingebettet in den $\mathbb{R}^{n+1,1}$ mit

$$S^{(n)} \cong \{x \in \mathbb{R}^{n+1,1} : \langle x, x \rangle = 0, x_{n+2} = 1\},$$

so sehen wir, dass $O(n+1, 1)$ bijektive Abbildungen auf $S^{(n)}$ induziert, die Kreise auf Kreise abbildet – also Möbiustransformationen, nach Korollar 8.15.

Diese Gruppe kann man mit $PO(n+1, 1)$ identifizieren — $S^{(n)}$ wird dabei als der projektivierte Lichtkegel im $\mathbb{R}^{n+1,1}$ interpretiert. Genauso können wir aber die Gruppe mit $O^+(n+1, 1)$ identifizieren — dabei wird das als die Gruppe der Transformationen interpretiert, die den positiven Lichtkegel auf sich selbst abbilden, und der ist eben ein Kegel über der $S^{(n)}$.

Wir sehen also, dass $PO(n+1, 1) = O^+(n+1, 1) \subseteq \text{Möb}(n)$. Es gilt aber noch mehr.

Theorem 8.22 (Das reell-projektive Modell der Möbiusgeometrie). *Die n -dimensionale Möbiusgeometrie kann durch die Menge $X = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{RP}^{n+1}$ mit der Gruppe*

$$\mathrm{PO}(n+1, 1) = \mathrm{O}^+(n+1, 1) = \mathrm{Möb}(n)$$

dargestellt werden.

Beweis. Um dies zu beweisen, müssen wir nur noch zeigen, dass die Transformationen, die die Möbiusgruppe erzeugen, mittels der stereographischen Projektion auf die Sphäre S^n transportiert, durch projektive Abbildungen dargestellt werden können, die die Sphäre fest halten. \square

Die $(n-1)$ -dimensionalen Untersphären der S^n können hierbei mit Hyperebenen im \mathbb{RP}^{n+1} interpretiert werden, die S^n echt schneiden — und diese können wir mit ihren Normalenvektoren, also den raumartigen Punkten in \mathbb{RP}^{n+1} identifiziert werden, also mit den Punkten “außerhalb” der Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Man verifiziert dafür, dass “außerhalb” hier wohldefiniert ist ...

Korollar 8.23 (Darstellung von Möbiustransformationen durch Matrizen). *Möbiustransformationen können durch die $(n+2) \times (n+2)$ -Matrizen in $A \in \mathrm{O}^+(n+1, 1)$ dargestellt werden.*

8.7 Kreispackungen und Anwendungen

8.8 Kreispackungen und der Riemann’sche Abbildungssatz

8.9 Kreispackungen und irrationale Zahlen

- [1] Boris A. Springborn. Geometry I. Lecture Notes, TU Berlin/Berlin Mathematical School, 2007/08, 59 pp., ftp://ftp.math.tu-berlin.de/pub/Lehre/GeometryI/WS07/geometry1_ws07.pdf.