FREIE UNIVERSITÄT BERLIN | Geometrie
Institut für Mathematik | SoSe 2013
Prof. Günter M. Ziegler | Albert Haase

3. Übungsblatt Geometrie

Abgabe bis spätestens ***Montag, den 6.5.2013,*** *vor der Vorlesung. Bitte vermerken, in welcher Veranstaltung ihr das korrigierte Blatt erhalten möchtet.*

Aufgabe 1: *Ebene Pflasterungen* (3 + 6 Punkte)

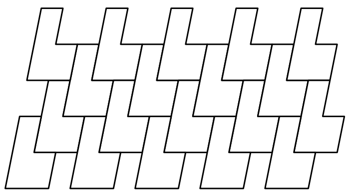
Gegeben seien Polygone (geschlossene n-Ecke) $M_1, \ldots, M_m \subset \mathbb{R}^2$. Eine Menge $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots\}$ von Polygonen heißt *ebene Pflasterung*, falls

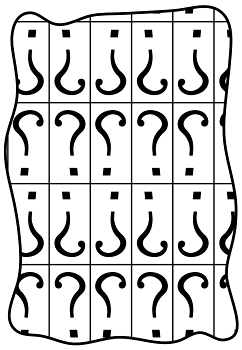
(i) $P_i^\circ \cap P_j^\circ = \emptyset$ für alle $i \neq j$ (wobei P° das Innere von P bezeichne)
(ii) $\bigcup_i P_i = \mathbb{R}^2$
(iii) jedes $P \in \mathcal{P}$ isometrisch (kongruent) zu einem der M_i ist.

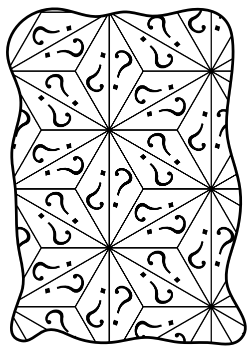
Die *Symmetriegruppe* einer ebenen Pflasterung $\mathcal{P}$ ist $\mathrm{Sym}(\mathcal{P}) := \{g \in \mathrm{Eukl}(n) \mid g(\mathcal{P}) = \mathcal{P}\}$.

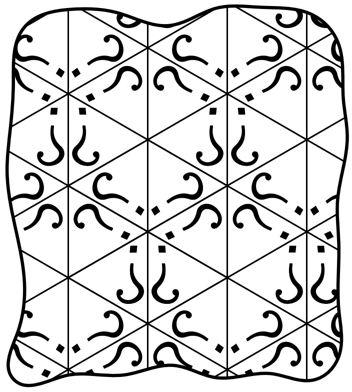
(a) Sei G die Symmetriegruppe einer ebenen Pflasterung $\mathcal{P}$. Ist G kristallographisch? J.S. Fjodorow hat 1891 gezeigt, dass es bis auf Isomorphie nur 17 kristallographische Symmetriegruppen von ebenen Pflasterungen, genannt *Tapetengruppen*, gibt.

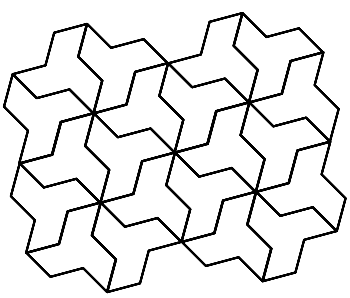
(b) Im Folgenden sind 6 Pflasterungen der Ebene angedeutet. Bestimme jeweils die euklidischen Bewegungen (Elemente aus $\mathrm{Eukl}(n)$), die ihre Symmetriegruppe enthalten muss.

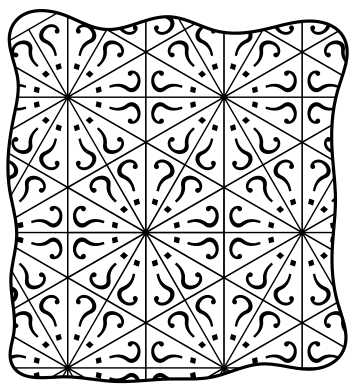

(a)


(b)


(c)


(d)


(e)


(f)

Aufgabe 2: *Hochdimensionale Effekte* (5 Punkte)

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass das Volumen der n-dimensionalen Kugel B^n vom Radius 1

$$\mathrm{Vol}(B^n) \;=\; \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \;\sim\; \frac{\pi^{n/2}}{\frac{n}{2}!}$$

ist. Zeige, *ohne* diese Aussage zu verwenden, dass $\frac{2^n}{n!}$ eine untere Schranke für $\mathrm{Vol}(B^n)$ ist. *Tipp:* Betrachte ein geeignetes geometrisches Objekt C^n, das in B^n enthalten ist. Ihr dürft verwenden, dass das Volumen eines n-Simplex $\Delta(x_0, \ldots, x_n) = \mathrm{conv}(x_0, \ldots, x_n)$ [1]

$$\mathrm{Vol}(\Delta(x_0, \ldots, x_n)) = \frac{\det(x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0)}{n!}$$

ist, wobei $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ affin unabhängig sind.

Aufgabe 3: *Affine Abbildungen* (2 + 2 + 2 Punkte)

In der Vorlesung wurde folgendes Kriterium bewiesen: Eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann affin, wenn

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \tag{1}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sei nun $K = \mathrm{GF}(2) = \mathrm{F}_2$ der Körper mit 2 Elementen.

a) Sei $f\colon K^2 \to K^2$ eine bijektive Abbildung. Zeige, dass f affin ist (im Sinne der Definition).

b) Zeige, dass jede bijektive Abbildung $f\colon K^3 \to K^3$ Gleichung (1) erfüllt, aber nicht notwendigerweise affin ist.

c) Wieviele bijektive Abbildungen $f\colon K^3 \to K^3$ gibt es? Wieviele Affinitäten? Beweise.

[1] Hier bezeichnet conv die konvexe Hülle der Punkte $x_0, \ldots, x_n$.