Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Günter M. Ziegler

Geometrie
SoSe 2013
Albert Haase

6. Übungsblatt Geometrie

*Abgabe bis spätestens **Montag, den 3.6.2013,** vor der Vorlesung. Bitte vermerken, in welcher Veranstaltung ihr das korrigierte Blatt erhalten möchtet.*

Aufgabe 1: *Hyperbel* (2 + 2 + 2 Punkte)

Es sei

$$H := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \right\}$$

eine Hyperbel. Wir definieren ihre sogenannten Brennpunkte als

$$F_1 := \left(-\sqrt{a^2+b^2}, 0 \right) \qquad \text{und} \qquad F_2 := \left(\sqrt{a^2+b^2}, 0 \right).$$

a) Zeige, dass für alle Punkte aus $p \in H$ gilt:

$$\left| \|p - F_1\| - \|p - F_2\| \right| = 2a.$$

b) Zeige, wie im Fall der Ellipse (5. Übungsblatt), dass 2 Punkte im $\mathbb{R}^2$ und ein Abstand $c > 0$ eine Hyperbel eindeutig definieren.

c) Berechne die Gleichung einer Tangenten an H im Punkt $(x_0, y_0) \in H$.

Aufgabe 2: *Affine und projektive Quadriken* (3 + 3 Punkte)

a) „Für jede projektive Quadrik[1] $Q \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ ist $\bar{Q} := Q \cap \mathbb{R}^n$ eine affine Quadrik." Stimmt diese Aussage? Beweise.

b) Welche Quadriken treten als $\bar{Q}$ auf? Das heißt, für welche affine Quadriken $\bar{Q}$ gibt es eine projektive Quadrik Q mit $Q \cap \mathbb{R}^n = \bar{Q}$? Ist Q in diesem Fall eindeutig?

Aufgabe 3: *Gebrochen-lineare Abbildungen* (2 + 6 Punkte)

a) Gib die gebrochen-linearen Abbildungen an, die die folgenden geordneten Basen aufeinander abbilden:

(i) $((0,0),(1,0),(1,1),(0,1)) \quad \to \quad ((0,0),(1,0),(0,1),(\frac{1}{3},\frac{1}{3}))$,
(ii) $((0,0),(1,0),(1,1),(0,1)) \quad \to \quad ((0,0),(1,0),(0,1),(1,1))$.

b) Gegeben sind die folgenden affinen Quadriken:

Der Einheiskreis $K = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1 \right\}$,
die Normalparabel $P = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 = y \right\}$,
und die Hyperbel $H = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y^2 - x^2 = 1 \right\}$.

Gib die gebrochen-linearen Abbildungen an, die (i) K auf P abbilden, (ii) K auf H abbilden, und (iii) P auf H abbilden. Wie errechnen sich ihre Inversen?

[1] Eine *projektive Quadrik* ist eine Teilmenge $Q \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ der Form $Q = \{[v] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n \mid v^t M v = 0\}$ für eine symmetrische Matrix $M \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$, $M \neq 0$.