Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Günter M. Ziegler

Geometrie
SoSe 2013
Albert Haase

9. Übungsblatt Geometrie

Es gibt dieses Mal 12 Bonuspunkte. Rechnet eure Gesamtpunktzahl aus und überlegt euch, ob ihr die Extrapunkte gebrauchen könntet! Die Bonusaufgaben sind erst am 1.07 fällig, Aufgaben 3 und 4 allerdings schon am 24.06.

Aufgabe 1: *Bonusaufgabe: Sphärische Geraden und Transformationen* ((2 + 2) Punkte)

In der Vorlesung hatten wir die sphärische Geometrie im Sinne von Klein als Menge S^n, die n-dimensionale Einheitssphäre, und orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(n+1)$ definiert. Geraden in dieser Geometrie sind Schnitte von S^n mit zweidimensionalen linearen Unterräumen.

(a) Je zwei Punkte aus S^n liegen auf einer (eindeutigen) Gerade. Ist dies wahr oder falsch? Beweise.

(b) Wir betrachten S^2. Wir nennen eine Transformation aus $\mathrm{O}(3)$ *orientierungserhaltend*, wenn sie die „Drei-Finger-Regel" erhält. Genauer, wenn jede rechtshändige (linkshändige) Basis auf eine rechtshändige (linkshändige) Basis abgebildet wird. Formuliere diese Bedingung „mathematisch" und gib eine Transformation an, die die Orientierung *nicht* erhält, aber keine Spiegelung ist.

Aufgabe 2: *Bonusaufgabe: Sphärische Dreiecke I* ((2 + 2 + 4) Punkte)

Ein *sphärisches Dreieck* Δ ist als Schnitt von drei Hemisphären $H_{A'}, H_{B'}$ und $H_{C'}$ definiert, falls A', B' und $C' \in S^n$ nicht auf einer Gerade liegen. Dabei ist

$$H_{A'} = \left\{ x \in S^2 \;\middle|\; \left\langle x, A' \right\rangle \geq 0 \right\}.$$

Die *Ecken* A, B und C des Dreiecks sind die Schnittpunkte von jeweils zwei der drei durch die Hemisphären gegebenen Großkreise, die im Dreieck enthalten sind. Das *duale Dreieck* hat die Ecken A', B' und C' und als Kantenlängen die entsprechenden Außenwinkel von Δ.

(a) Warum ist der Begriff „Dreieck" für S^n mit $n > 2$ wohldefiniert?

(b) Gegeben seien drei Punkte D, E, F aus S^2, die nicht auf einer Gerade liegen. Wieviele verschiedene Dreiecke mit Ecken D, E, F gibt es?

(c) Gibt es *selbst-duale* Dreiecke, also welche, die mit ihrem dualen Dreieck übereinstimmen? Beweise oder widerlege.

Aufgabe 3: *Sphärische Dreiecke II* (10 Punkte)

Berechne die Kantenlängen, Winkel, Fläche und den Umfang des sphärischen Dreiecks mit den Ecken (geographischen Lagen):

Berlin	$52^\circ\ 31'N,\ \ 13^\circ\ 24'O$
Brüssel	$50^\circ\ 51'N,\ \ 4^\circ\ \ 21'O$
Athen	$37^\circ\ 59'N,\ \ 23^\circ\ 44'O$

Bemerkung: Auf der Erdkugel beträgt der Abstand von den Polen zum Äquator (etwa) 10.000 km. Gerundete Ergebnisse sind zulässig.[1]

Aufgabe 4: *Sphärischer und euklidischer Seitenkosinussatz* (8 Punkte)

Es sei ein sphärisches Dreieck Δ mit Ecken A, B und C in S^2 gegeben. Weiter seien a, b und c die Längen der zu A, B respektive C gegenüberliegenden Kanten. Mit $\widehat{\alpha}$ bezeichnen wir den Außenwinkel der Ecke A. Dann gilt wie in der Vorlesung gezeigt der sphärische Seitenkosinussatz (Proposition 7.10 des Skripts)

$$\cos \widehat{\alpha} = \frac{-\cos a + \cos b \cos c}{\sin b \sin c}\ . \tag{1}$$

Der euklidische Seitenkosinussatz für ein euklidisches Dreieck $\bar{\Delta}$ mit Ecken $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ in $\mathbb{R}^2$, Kantenlängen $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ und euklidischem (Innen-)Winkel $\bar{\alpha} := \measuredangle(\bar{C}, \bar{A}, \bar{B})$ lautet

$$\bar{a}^2 = \bar{b}^2 + \bar{c}^2 - 2\,\bar{b}\,\bar{c}\cos(\bar{\alpha}). \tag{2}$$

Wir wollen verifizieren, dass kleine sphärische Dreiecke fast wie euklidische „aussehen". Dazu wollen wir zeigen, dass die Winkel in einem sphärischen Dreieck für sehr kleine Seitenlängen den Winkeln eines euklidischen Dreiecks in etwa gleich kommen. Es genügt dies für einen der Winkel zu zeigen. Warum?

Wir gehen von einem sphärischen Dreieck Δ wie oben beschrieben aus und multiplizieren die Seitenlängen a, b und c mit $t > 0$. Die Ecken des resultierenden Dreiecks mit Seitenlängen ta, tb und tc bezeichnen wir mit A_t, B_t und C_t. Schließlich lassen wir $t \to 0$ gehen.

(a) Zeige, dass der sphärische Innenwinkel $\alpha_t := \sphericalangle(C_t, A_t, B_t)$ der Ecke A_t im Grenzwert gegen den (euklidischen) Winkel $\bar{\alpha} := \measuredangle(\bar{C}, \bar{A}, \bar{B})$ eines euklidischen Dreiecks mit den Seitenlängen $\bar{a} := a, \bar{b} := b$ und $\bar{c} := c$ und Ecken $\bar{A}, \bar{B}$ und $\bar{C}$ konvergiert.

(b) Dazu muss zunächst gezeigt werden, dass ein solches euklidisches Dreieck überhaupt existiert.

Tipp: Forme zum Beweis der Konvergenz in Teil (a) die Gleichung (1) um und betrachte Taylorentwicklungen zweiten Grades der trigonometrischen Funktionen.

[1] Es wäre allerdings gut, wenn Athen nach dem Runden noch in der EU läge.